L'enseignement des mathématiques en anglais langue seconde. Etude didactique de l'articulation des apprentissages linguistiques et mathématiques, à travers l'expérimentation de situations intégrées de type CLIL

Christian Larue

THÈSE PRÉSENTÉE

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR DE

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE EDSP2

SPÉCIALITÉ DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Par Christian LARUE

L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES EN ANGLAIS LANGUE SECONDE

Etude didactique de l'articulation des apprentissages linguistiques et mathématiques, à travers l'expérimentation de situations intégrées de type CLIL

Sous la direction de : Isabelle BLOCH
(co-directeur : Patrick GIBEL)

Soutenue le le 24 novembre 2015

Membres du jury :

M.	LEVI, Laurent	MC HDR Université de Pau et des Pays de l'Adour	Président
Mme	DURAND-GUERRIER, Viviane	PU Université de Montpellier	rapporteure
Mme	RABY, Françoise	PU LAIRDIL Université de Toulouse	rapporteure
Mme	GRUGEON-ALLYS, Brigitte	PU Université de Paris-Est Créteil	Examinatrice
Mme	BLOCH, Isabelle	PU émérite Université de Bordeaux	Directrice de thèse
M.	GIBEL, Patrick	MC Université de Bordeaux	Co-directeur de thèse

L’enseignement des Mathematiques en Anglais Langue Seconde

Résumé :

La thèse met en lumière les conditions d’enseignement et d’apprentissage des mathématiques en langue seconde en étudiant avec précision l’articulation des savoirs mathématiques et des savoirs linguistiques. Elle traite le cas spécifique de l’enseignement des mathématiques en anglais dans un contexte CLIL et les séances expérimentales ont lieu en classes européennes de lycée. Le thème commun à ces séances est celui des preuves visuelles et multimodales. La Théorie des Situations Didactiques (TSD) offre un cadre théorique privilégié – notamment pour la construction des situations expérimentales - cadre qu’il a fallu compléter par des approches théoriques sémiotiques et linguistiques. Ainsi l’approche adoptée s’est révélée en adéquation avec la perspective actionnelle et la phraséodidactique a apporté de nombreux éléments permettant de mettre en relief le rôle de la phraséologie dans un enseignement intégré. Une focalisation particulière a dû être opérée sur les objets mathématiques et les processus d’abstraction mais aussi sur certains faits de langue. Les investigations ont permis d’affiner les descriptions des raisonnements produits tout en conservant une référence aux niveaux de milieux, au sens de la TSD. L’étude a nécessité de développer le concept de représentation et de décliner les représentations produites dans le contexte de la L2. Ce sont ces concepts et celui d’adidacticité, central dans la TSD, qui ont permis d’organiser les séances de manière optimale, en faisant apparaître le rôle essentiel joué par la perception active dans les processus de conceptualisation.

Mots clés :

Mathématiques en langue seconde, situations intégrées, CLIL, phraséodidactique, raisonnement, preuves visuelles.

Teaching Mathematics in English as a Second Language

Abstract :

The purpose of this thesis is to investigate learning and teaching conditions of mathematics in English as a second language by closely examining how mathematical and language knowledge can fit together. This study deals with the specific case of CLIL teaching and the related experimental situations are performed in European classes in a French high school. The situations have a common topic, namely that of visual and multimodal proof. The theory of Didactical Situations is the central theoretical framework but our study has proven to be compatible with task-based pedagogy. Besides, phraseodidactics provided a useful and adequate auxiliary framework by shedding some light onto the essential role played by phraseology. We particularly kept focused on mathematical objects and processes of abstraction but also on some specific language features. The concept of representation is central in our research works and thus had to be precisely defined. The success of our experimental situations owes a lot to the use of adidacticity, a central concept in TSD, and our focusing on the crucial part played by active perception during processes of conceptualisation. The purpose of one of the experimental situations (conducted in a second language) was to ensure that pupils divised, by themselves, a visual proof of an arithmetic property previously conjectured, carried out on the very level of schematisation an explicit generalisation and used real cubes to perform another type of proof, thus making the inductive step of the induction explicit.

Keywords :

Mathematics learning in English as a second language, integrated situations, CLIL, phraseodidactics, reasoning processes, visual proofs.

Unité de recherche :

Lab-E3D, EA 4140, 33000 Bordeaux, France

Remerciements

Mes remerciements s’adressent en tout premier lieu à Isabelle Bloch et à Patrick Gibel pour avoir accepté de diriger mon travail. Ils ont toujours été présents pour me guider et pour m’éclairer sur des points délicats. Ils ont, tout au long de ces cinq années, apporté un regard pertinent sur mes avancées mais surtout, ils ont décelé très vite, pour mes travaux de recherche, une structure globale et un fil directeur sur lesquels ils n’ont eu de cesse d’insister. Mais bien au-delà de leur aide et de leur soutien en matière de didactique et d’encadrement, que j’imagine difficilement comme pouvant être plus efficaces que ceux qu’ils m’ont témoignés, c’est pour leurs incontestables qualités humaines que je les remercie et pour la générosité dont ils ont fait preuve à mon égard.

Je remercie mon ami Marc Lalaude, avec qui j’ai eu tant d’échanges fructueux. Il m’a, lui aussi, encouragé à tous points de vue. Il a débuté ses travaux de thèse après moi et je lui souhaite donc bon courage pour la suite. Nous partageons une certaine vision du monde et n’avons pas hésité « à le refaire » lorsque c’était nécessaire, c'est-à-dire lors des moments de détente. J’espère que nous continuerons.

Je remercie Viviane Durand-Guerrier et Françoise Raby pour avoir accepté de se rendre disponibles pour être rapporteures de cette thèse.

Je remercie Brigitte Grugeon-Allys et Laurent Lévi pour avoir bien voulu être également membres du jury,

Un grand merci enfin aux anciens élèves de Première et de Terminale du Lycée louis Barthou qui ont suivi l’enseignement européen et qui ont participé avec beaucoup d’entrain à chacune de mes séances expérimentales. Je leur dois de très beaux schémas de preuves visuelles mais surtout parmi les plus beaux souvenirs de ma carrière d’enseignant.

Je dédie ce travail

à mes filles Alice et Joséphine

à Michelle, leur maman

à mes parents, René et Jacqueline

à mon amie Carole et à sa petite fille Alba

à mes frères et à toute leur famille

à Glyn, Johan, Jessica, Chloe et George

à Rovima Ariñas et à Shelkin Lumangyao

à Kofi Alouda Assimesso

à Ahmed et à Simo

à tous mes proches et à tous mes amis,

à Edouard, René, Laurent, Luc, Marc, Lucas, Pierre, Franck …

Table des matières

INTRODUCTION

Cette étude a pour objectif de tenter de mettre en lumière les conditions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques en langue seconde en examinant au plus près l'articulation des savoirs mathématiques et des savoirs linguistiques. Notre intention est de traiter le cas de l'enseignement des mathématiques en anglais dans un contexte CLIL, et plus spécifiquement celui de l'enseignement européen, l'acronyme CLIL signifiant Content and Language Integrated Learning. Notre travail est parti d'une constatation toute simple : sur le terrain, l'enseignement des mathématiques en anglais se fait parfois dans des conditions d'utilisation de la langue seconde[1] (L2) telles que les objectifs d'acquisition langagière sont imprécis et/ou le niveau de langue utilisée est trop pauvre car les activités dévolues aux élèves ne conduisent pas à l'usage d'un registre de langue (L2) soutenu, ou suffisamment étendu, et à la production de formulations spécifiques. A cet égard, les formulations qui seront élaborées par les élèves, à l'occasion de nos séquences expérimentales, le seront en grande partie en autonomie, du fait de l'insertion de situations complètement adidactiques.

Les enseignants doivent donc être à mêmes d'utiliser la L2 pour véritablement éclairer les objets mathématiques, sans parler de citer des faits de langue significatifs lorsqu'ils en ont l'occasion, ou encore donner un caractère plus transversal à leur pratique en utilisant un lexique non limité à celui des mathématiques et réutilisable dans d'autres contextes. Suite à ces constatations, il apparait nécessaire de développer un cadre théorique qui permette de répondre à notre problématique. Nous espérons montrer à travers notre étude et les exemples de situations que nous proposerons, qu'à niveau de maîtrise égal et en supposant dans l'absolu ce niveau comme suffisant, l'enseignement CLIL dispensé peut prendre une forme plus efficace et viser des objectifs suffisamment clairs du point de vue de l'articulation des savoirs mathématiques et langagiers (en L2). Nous montrerons que les situations expérimentales et les ingénieries qui les sous-tendent permettent une exploration plus élargie de la L2 grâce à la constitution d'un répertoire didactique transversal, et plus précisément d'un répertoire de formulations non cantonné à des formulations langagières collant de trop près au seul registre formel (au sens mathématique). Au contraire, le répertoire devra être élaboré en amont de manière à fournir des possibilités de reformulation, en permettant une certaine latitude et une réelle tolérance adaptative quant à la formulation des raisonnements, que ceux-ci soient de nature mathématique ou qu'ils visent des questions de signification, lorsque celle-ci est envisagée conjointement dans un rapport à la langue et dans un rapport à l'objet mathématique.

La problématique étant nouvelle, nous avons été conduit à développer un cadre théorique particulier, en nous appuyant sur des modèles existants, issus à la fois de la linguistique et de la didactique des mathématiques.

La question que notre problématique ne peut manquer de soulever est la suivante : comment apprendre les mathématiques et une seconde langue vivante d'une manière qui se veut intégrative ?

Survient la question du comment et presque immédiatement celle beaucoup plus délicate de *comment faire au mieux, comment rendre cet apprentissage intégré le plus efficace possible* ?

[1] Nous désignerons par L1 et L2, la Langue 1 et la Langue 2 ; la L1 étant le français et la L2 l'anglais, sauf exception.

Le but de nos travaux est d'apporter un maximum d'éléments de réponse à ces questions et à toutes celles qui n'ont pas manqué d'apparaître au fur et à mesure que nous avons exploré les domaines périphériques. Il nous a fallu en tout cas, à un niveau théorique et pragmatique, étudier de manière générale les modalités et les méthodes didactiques de construction de situations mathématiques en les adaptant au cas des classes européennes. Nous avons ensuite mis en œuvre ces situations et analysé leurs effets en termes de savoirs visés, mathématiques et linguistiques, mais aussi en termes d'acquisition de connaissances culturelles et transversales, c'est-à-dire ne relevant pas seulement des mathématiques ou de la langue. Ce dernier point correspondra, entre autres, à la mise en place d'une phraséologie élargie.
Nous nous proposons d'aborder, dans la partie théorique, des notions que nous avons jugées fondamentales pour notre problématique. Notre étude a pour vocation première, nous le rappelons, d'être didactique et la notion centrale sur laquelle nous allons nous appuyer est celle de représentation. Elle permet en effet d'établir une articulation entre, d'une part, des considérations sémantiques et d'autre part, une prise en compte d'éléments sémiotiques.
La démarche que nous avons adoptée dans notre étude repose sur plusieurs points qu'il nous semble important de préciser. Nous avons ainsi concentré nos efforts sur les points suivants :

- éclairer les points, les notions ou concepts que nous avons jugés fondamentaux par des approches multiples, par des perspectives différentes ;
- utiliser au mieux les modèles théoriques qui nous ont semblé les plus adéquats à rendre compte des phénomènes étudiés ;
- ne pas perdre de vue que l'objet de la thèse est d'interpréter les résultats de nos analyses et investigations dans une perspective didactique ;
- articuler au maximum les notions convoquées provenant de théories différentes ;
- recourir à l'explicitation et à l'exemplification, à chaque fois que nous l'avons jugé nécessaire, dans une perspective de clarification.

La thèse se divise en deux parties : une Partie Théorique et une Partie Expérimentale.

– Contenus de la Partie Théorique

La partie théorique débute, au chapitre 1, par un examen plus précis de la problématique et par la mise en place des cadres théoriques. La première problématisation laisse déjà entrevoir la nécessité de développer des éléments théoriques particuliers. Les notions de milieux seront présentées dans ce chapitre avec une prise en compte de la spécificité CLIL et dans une perspective d'intégration. La Théorie des Situations Didactiques, initiée par Guy Brousseau, n'a pas pour vocation initiale de traiter des phénomènes didactiques en contexte bilingue. Notre préoccupation consistera à éclairer différemment les concepts théoriques de la TSD. Nous les avons donc examinés de manière à permettre la prise en compte et l'analyse des phénomènes didactiques en jeu dans l'enseignement bilingue. Les concepts propres à cette théorie ont donc été soit étendus, soit appréhendés différemment de manière à éclairer la notion-même d'intégration, notion qui est au cœur du concept d'enseignement de type CLIL.

Le chapitre 2 est centré sur la notion de représentation. Nous y développons la question des rapports entre sens, sensation et idéalisation. En ce qui concerne le concept de représentation, celui-ci a nécessité un examen minutieux afin de pouvoir être utilisé avec suffisamment de clarté comme pivot dans toute notre étude. Il a été envisagé, examiné sous de multiples facettes (didactique, cognitive, mentale, sociale, schématique) en relation avec des

considérations sémiotiques, dans le but notamment de délimiter le plus finement possible les représentations des élèves à travers une interprétation indicielle des signes produits lors des activités, que ces signes soient formels, linguistiques ou même multimodaux.
Les efforts pour parvenir à articuler de manière satisfaisante les concepts de signes et de représentations ont fait apparaître des problèmes de récursivité définitoire, problèmes ou réalités conceptuelles que nous n'avons pas éludés, bien au contraire, et que nous avons également soulevés lorsque nous avons abordé les questions portant sur la nature des objets et des concepts mathématiques ainsi que les traitements discursifs qui leur sont relatifs.

Le chapitre 3 porte sur les questions liées à la didactique des langues, en examinant notamment l'une des questions essentielles, à savoir celle portant sur la phraséologie. La notion de représentation revêtira ici deux facettes, puisque nous examinerons les questions liées à la langue d'un point de vue lexical mais aussi cognitif.

Le chapitre 4 propose un exemple d'exploitation de ressources lexicales dans le but d'élaborer un lexique phraséologique didactique. Après avoir abordé dans un premier temps la question des rapports entre sèmes et sens, selon un mode d'appréhension dynamique, on y effectue également une analyse sémique du mot-concept *pattern* et on l'examine relativement aux questions de phraséologie associées. Nous avons choisi ce mot-concept (expression issue de la linguistique) car son emploi est récurrent chez les anglo-saxons dans la pratique mathématique (voir à ce sujet Artigue, 2012). Il permet de donner un exemple de terme n'ayant pas en français, du point de vue du recouvrement sémantique, d'équivalent aussi « puissant ».

– Contenus de la Partie Expérimentale

Le chapitre 5 est celui où nous étudions les preuves visuelles et le concept de gnomon. Ce dernier sera envisagé, entre autres, dans sa dimension médiative. Il permet une actualisation de ce que nous avons appelé principe d'extension schématique. La notion de *pattern* est ici envisagée en rapport à *l'expérience de la nécessité*, au sens de Sackur et al. (2005).

Au chapitre 6, nous analysons la première séquence expérimentale. Elle porte sur les nombres figurés et en particulier sur les nombres triangulaires. Elle est l'occasion de mettre en pratique les considérations théoriques présentées au chapitre 1, et approfondies dans les suivants. Le modèle de structuration des milieux au sens de la TSD (Margolinas, 1998, Bloch, 2002), le modèle d'analyse des raisonnements (Bloch et Gibel, 2011) apparaîtront comme des outils d'analyse efficaces. Les notions de répertoires, les raisonnements produits, sans oublier la place cruciale des phases adidactiques et des phases d'institutionnalisation, seront des zones de focalisation pour nos analyses.

Nous procéderons de manière similaire, aux chapitres 7 et 8, lorsque nous analyserons les deux autres situations expérimentales, à savoir celles intitulées *somme des carrés* et *somme des cubes*.

Le chapitre 8 contient également des prolongements, du point de vue sémantique et/ou phraséologique mais aussi en termes de considérations sur le parallèle entre preuves visuelles et preuves algébriques par induction. Le rapport à la L2 reste central.
La conclusion de la partie expérimentale sera l'occasion d'examiner si les hypothèses théoriques sont, ou non, confortées.

– Autres considérations générales

Lorsque nous avons traité la question des rapports du bilinguisme et de l'enseignement des mathématiques, nous nous sommes presque systématiquement placé dans le cadre aujourd'hui bien établi de l'enseignement de type CLIL. Le cadre des expérimentations a été limité à de telles classes (de la Seconde à la Terminale). Nos investigations et nos références concerneront donc essentiellement la langue anglaise même si parfois nous sommes allé voir du côté de l'allemand et de l'espagnol. Nous rappelons à cet effet que nos recherches n'ont pas pour objectif explicite une étude contrastive des langues en contexte CLIL ni une étude de type sociologique (nous renvoyons le lecteur à la lecture de la thèse de Borel (2010) pour un exemple de ce type d'approche), ni une étude comparative des systèmes anglo-saxons et français (voir la thèse de Cabassut (2005) pour le cas de l'allemand et du français et relativement à la démonstration et l'argumentation). Par ailleurs, nous tenons également à préciser que nous nous sommes efforcé de porter un nouveau regard sur le thème commun à chacune des situations mathématiques que nous avons élaborées pour notre étude expérimentale, à savoir celui des preuves visuelles (et multimodales). Ce thème, même s'il existe déjà en tant que tel dans la littérature, a été systématiquement revisité avec le souci d'intégrer des éléments issus de la partie théorique.
Notre travail a pour objectif l'élaboration d'activités qui permettent l'acquisition de concepts mathématiques et d'une phraséologie qu'il conviendra de délimiter. Le modèle de la TSD sera donc enrichi de manière à approfondir la notion de répertoire de formulation (Gibel, 2004) puisque les acquisitions langagières apparaissent essentielles. Nous examinerons donc de manière très fine l'articulation entre formulation et utilisation fonctionnelle des objets mathématiques, étant donné qu'elle constitue l'un des objectifs des séances expérimentales.
Par ailleurs, les élèves vont certes devoir effectuer des raisonnements mais avec l'objectif que les arguments qui sous-tendent ces raisonnements soient explicités au travers d'une formulation adéquate en L2. Ce point fera donc également l'objet d'un examen précis.
En ce qui concerne l'analyse des raisonnements dans les situations, nous nous sommes appuyé sur les travaux d'Isabelle Bloch et de Patrick Gibel (Bloch et Gibel, 2011 ; Gibel, 2015). La structuration des milieux sous-didactiques et l'oscillation du sens et de la signification des symboles produits entre une composante sémantique pure, (notion de signifié abstrait), une composante liée à la référence et une autre attachée à la sémantique syntaxique formelle (en étroite relation avec la syntaxe, avec les règles d'utilisation des symboles) sont des éléments théoriques qui nous ont grandement aidé lors de nos analyses expérimentales, que celles-ci aient été envisagées postérieurement aux séances ou de manière anticipatrice. Les notions de répertoires de formulation, de représentation, et plus généralement de répertoire didactique, notions que nous avons empruntées à P. Gibel (2004, 2015), ont été conceptuellement réaménagées de manière à coller étroitement à notre problématique au centre de laquelle se trouve l'idée d'intégration.

En ce qui concerne l'état des lieux de l'enseignement CLIL, nous en avons dressé une description relativement réduite, à la fois parce que le lecteur pourra trouver assez facilement dans la littérature une description détaillée de ce type d'enseignement (voir Marsh et al., 2001 et Moate, 2010, par exemple) mais aussi parce que la plupart des approches témoignent de positions linguistiques majoritairement orientées dans le sens de la perspective actionnelle et que celle-ci a été largement explorée ne serait-ce que dans le cadre d'un enseignement classique, non intégré, de L2. Comme nous le montrerons dans notre étude, et sans vouloir minimiser en aucune façon l'apport des linguistes au niveau pragmatique, c'est-à-dire dans une perspective plus pédagogique, nous considérons que la spécificité des disciplines scientifiques, et en l'occurrence des mathématiques, n'est pas suffisamment prise en considération dans ces études. L'approche que nous avons adoptée dans nos travaux nous est cependant apparue en accord avec la perspective actionnelle (notion relative à la didactique des langues vivantes, cf. par exemple les travaux de C. Puren, 2006, 2007, 2009). Cette dernière est ainsi, de manière générale, tout à fait conciliable avec la théorie des situations didactiques en mathématiques, et nous semble l'être en tout cas de manière effective au niveau de notre propre approche. Nous avons en effet privilégié des situations comportant une phase de recherche et des actions effectives dans les divers milieux, et notamment les milieux sous-didactiques, comme nous le verrons dans la partie expérimentale.

Nous envisagerons la langue sous ses aspects discursifs et interactionnels en mettant l'accent sur l'énonciation et la phraséologie afin, non seulement d'articuler certains points délicats de notre étude théorique mais aussi pour ouvrir des perspectives en matière d'enseignement CLIL[2]. A cet égard, notre propre positionnement pourra être envisagé en accord avec l'approche de la langue par Chini. Nous avons lu Chini (2004), pour constater que l'approche y est résolument conceptualisante et basée, elle aussi, sur la notion de représentation.

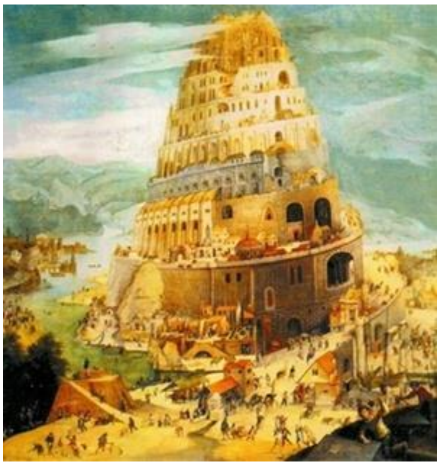
Les questions soulevées par nos recherches nous ont donc inévitablement amené sur le terrain des sciences cognitives. Parler de sémiotique, de linguistique cognitive n'a de sens que si l'on étudie de près les phénomènes à l'œuvre dans les processus de pensée. L'existence d'une pensée non-sémio-linguistique, c'est à dire sans verbalisation intérieure et étroitement associée à la notion de perception active, d'une part et le concept de *cognition par les sens* (sensuous cognition and multimodality of discourse), en accord avec l'approche de Radford en termes de théorie socioculturelle de l'apprentissage (voir Radford, 2002 ; 2004 ; 2009 ; 2010 ou encore Radford et al., 2007 ; 2009), sont autant des questions que nous avons abordées et traitées en rapport étroit avec le concept d'*évocation* et celui de *lecture porteuse* dans un rapport d'immédiateté à la production de sens dans le processus de pensée en acte. Nous avons tenu compte du caractère spatial de nombreuses métaphores et nous avons examiné en détail la phraséologie utilisée pour parler des notions abstraites en général ou des objets mathématiques en particulier, phraséologie qui entretient souvent un lien métaphorique étroit avec le concret.

Les thèmes mathématiques que nous avons privilégiés dans la partie expérimentale sont ceux portant sur les nombres figurés et la notion de preuve visuelle. Nous signalons au passage que certains points théoriques ont dû être développés spécifiquement pour la réalisation de nos séances expérimentales. Ils sont illustrés dans la partie théorique par certains éléments, ou

[2]Nous signalons à cet égard qu'il n'y a très rarement à ce jour, au niveau des ESPE, de formation proposée aux futurs enseignants-CLIL. La seule formation qui soit éventuellement accessible se réduit à des stages linguistiques classiques dans le cadre de la formation continue, si l'on excepte l'existence du Master DIDEM proposé à Nice.

figures, extraits de la partie expérimentale elle-même. C'est lors de l'analyse a priori que nous détaillerons les choix effectués et exposerons les raisons qui nous y ont conduit.
Nous avons mis l'accent sur la phraséologie en tentant d'intégrer les tous derniers résultats en provenance des recherches linguistiques portant sur l'apprentissage lexical et phraséologique. A cet égard, les questions de recouvrement conceptuel partiel ou d'équivalence (congruence) envisagées dans la partie théorique, lorsque nous avons traité des points spécifiques au lexique mental, ont été exemplifiées au travers de l'examen de termes notionnels tels que celui de *pattern*.
Quelques remarques également, en ce qui concerne notre positionnement général face aux questions soulevées par nos recherches : nous avons privilégié le concept de représentation par rapport à celui de signe. Le signe n'en demeure pas moins une notion essentielle mais il ne sera souvent retenu qu'en tant qu'il conditionne les processus d'objectivation ou comme élément représentationnel. Néanmoins, la dimension sémiotique jouera un rôle important lorsque nous envisagerons l'accès direct au sens de l'objet, qu'il soit de nature mathématique ou de nature linguistique.
La notion de représentation, lorsqu'on l'envisage sous toutes ses facettes, apparaît donc première puisque la cognition, relativement aux phénomènes d'apprentissage, et surtout en tant que processus, est au cœur de notre étude. Nous examinerons en détail et illustrerons le cas des représentations autour de concepts mathématiques.
Le mathématicien, à force de reconnaître des « patterns », sait qu'il recourt beaucoup à la visualisation. Le musicien connaît bien les patterns musicaux et il les conceptualise à sa manière mais il est clair que dans son cas, il n'y a pas que du visuel. Dans une classe, des mots sont lus, échangés, des signes sont produits, interprétés, des interactions ont lieu entre participants ou avec le milieu. Où se situe le sens à chaque fois et quels sens sont impliqués ?
Notre travail nous a conduit à aller voir en périphérie et à nous appuyer sur des concepts théoriques bien implantés dans ces domaines. Ces domaines sont ceux de la linguistique cognitive et de la sémantique lexicale.
L'acquisition de connaissances se fait selon plusieurs modalités. Nous distinguons ce qui est acquis naturellement, par la fréquentation régulière avec les signes et les contenus mais il y a aussi ce qui se construit, qui va donner lieu à un savoir autour du concept. Ce concept, il va falloir le cerner au plus près. Tantôt on l'examinera en tenant compte des éléments qu'il partage ou des liens qu'il a avec d'autres, tantôt on prendra en compte la manière dont on y accède directement par la pensée, sans intermédiaires.
Nous terminons en insistant sur des points essentiels : nous montrerons ce que les situations mathématiques intégrées apportent de plus par rapport aux mêmes situations en L1, c'est-à-dire en considérant celles-ci comme rapportées au même thème mathématique mais aussi comme devant être réalisées exclusivement en L1. Nous ferons remarquer, en ce qui concerne les situations intégrées, et à l'occasion des analyses des situations expérimentales, que l'enseignant est contraint à plus de précision lorsqu'il parle des objets mathématiques, que ce soit lors des phases interactives pour émettre des conjectures, par exemple, ou lors des phases d'institutionnalisation relativement aux connaissances nouvelles et aux objets nouveaux. Cette exigence de précision se double d'ailleurs aussi, indirectement, d'un accroissement de la qualité des productions d'élèves, notamment dans la formulation (en L2) qu'ils adoptent mais aussi au travers de leurs productions schématiques. Celles-ci, comme on pourra le constater, constitueront des indices que leurs représentations sont conformes à ce qu'attendait l'enseignant, que les raisonnements produits sont adéquats à l'objectif qui était d'établir un

type de preuve nouveau pour eux. Le thème des preuves visuelles a été retenu pour nos séances expérimentales car il permet aux élèves d'agir et de raisonner, selon des spécificités qui caractérisent les divers niveaux de milieu. Nous examinerons à quels moments les élèves débattent et comment ils sont amenés à valider, toujours en référence au modèle de structuration des milieux mais avec une prise en compte effective et parfois poussée des processus raisonnés, interprétatifs, analytiques, synthétiques ou autres. Une autre raison non moins importante consiste dans le fait que les élèves auront ainsi un rapport enrichi à la démonstration. Nous questionnerons le statut de preuve des preuves dites visuelles dans la Partie Théorique.
Ces preuves reposent sur une généralisation et celle-ci est examinée en rapport aux possibilités offertes par la L2. Des connaissances vont émerger quant au rapport entre preuves visuelles arithmétiques et preuves par induction, rapport auquel d'ailleurs les élèves seront une première fois simplement sensibilisés puis qui deviendra ensuite objet d'étude à part entière (chapitre 8). Les analyses a posteriori confirmeront ces points en examinant quels sont les moments importants et quels sont les signes qui sont alors produits et qui attestent d'un raisonnement conforme.



The Tower of Babel
Origin of Language Diversion (Genesis 11)



Nous estimons bien entendu que l'existence d'un grand nombre de langues est source de richesse pour l'humanité car elles permettent d'éclairer différemment les phénomènes de conceptualisation.
Nous nous focaliserons sur le cas de l'anglais, afin de ne pas trop nous disperser, mais certainement pas par crainte de sombrer dans la confusion des langues…

PARTIE THEORIQUE

CHAPITRE 1. PROBLÉMATIQUE ET ÉLÉMENTS THÉORIQUES

I. Contexte général de l'étude

I.1. Enseignement CLIL, classes européennes : aspects institutionnels

Cette étude a pour objectif de tenter de mettre en lumière les conditions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques en langue seconde en examinant au plus près l'articulation des savoirs mathématiques et des savoirs linguistiques. Notre intention est de traiter le cas spécifique de l'enseignement des mathématiques en anglais dans un contexte CLIL. Les séances expérimentales auront lieu dans un contexte encore plus particulier puisque nous enseignons en classe européenne selon des modalités que nous détaillerons ultérieurement. Nous pouvons néanmoins ajouter dès-à-présent que c'est nous-même qui avons été l'enseignant impliqué dans ces séances.

Nous allons préciser toutes les notions mais dans un premier temps nous souhaitons présenter le contexte général de cette étude.

L'acronyme CLIL signifie « Content and Language Integrated Learning », c'est-à-dire *apprentissage intégré d'un contenu disciplinaire et d'une langue vivante*.

Tout d'abord, il nous semble essentiel de rappeler que l'enseignement de type CLIL est, depuis plusieurs années maintenant, l'objet d'étude pour divers acteurs, qu'il s'agisse d'enseignants directement impliqués par ce type d'enseignement, de pédagogues ou de chercheurs plus confirmés, souvent spécialiste en didactique des langues (voir par exemple Baetens Beardsmore, 1999 ; Banegas, 2011, 2012, 2013 ; Coyle, 1999, 2010 ; Lyster R. & Ballinger, 2010, etc…). A l'origine, le besoin de mettre à disposition des enseignants CLIL des ressources pratiques a conduit ces acteurs à proposer une panoplie d'activités très intéressantes du point de vue pédagogique mais néanmoins avec un angle d'approche exclusivement, ou par trop, linguistique[3]. Ces acteurs incitent à une focalisation sur la langue lors des séances, en distinguant dans la langue 2 (désormais la L2) les termes spécifiques (en l'occurrence mathématiques) et les termes de la vie de tous les jours. Ils proposent des exercices ou des méthodes pour l'acquisition du vocabulaire, en bref, préconisent toutes une série d'activités que l'on pourrait retrouver dans un cours de langue classique à ceci près que les objets étudiés et les thèmes rencontrés sont de nature scientifique. C'est la communication qui prime et si la tâche est également centrale, pour donner du sens à l'apprentissage, elle n'intègre pas, ou vraiment très peu, la spécificité non seulement des pratiques mais surtout des objets (abstraits) impliqués lorsqu'il est question des mathématiques ou de la physique par exemple.

Pour résumer, il s'agit d'activités où les objets mathématiques, leur complexité, les relations qu'ils entretiennent entre eux sur le plan mathématique, ne sont pas, ou pas suffisamment, pris en considération. Contrastant avec ces approches focalisées sur la communication en L2, notre recherche vise à comprendre et mettre en œuvre les façons d'articuler de façon rigoureuse, en classe bilingue, les savoirs linguistiques et les savoirs mathématiques.

---

[3] Voir à cet effet l'ouvrage de Dale L. et Tanner R (Dale L. et Tanner R, 2012) ou encore le « CLIL Tool Kit » proposé par l'université de Cambridge (lien mentionné dans la bibliographie).

Dans cette perspective, un premier regard sur l'enseignement de type CLIL, sur la question d'une éventuelle formation des enseignants à ce type d'enseignement ou sur les prescriptions officielles, semble dès à présent nécessaire. Il sera complété au chapitre 3.
Assez récemment, l'enseignement CLIL a commencé à être envisagé sous l'angle de projets de formation d'enseignants CLIL, projets pensés en amont.
Ainsi, Benegas (2012) fait le point sur la formation des enseignants CLIL en examinant les défis que ce type d'enseignement sous-entend et les expériences auxquelles il peut conduire.
Il déclare ainsi (Benegas, 2012, p 47) :

> In order for administrators to implement CLIL programmes responsibly, serious needs analysis (Butler, 2005, p. 233-236; Ruiz-Garrido and Fortanet-Gómez, 2009) must be carried out before any actions actually begin. This lack of awareness or knowledge among administrators is intimately linked to those who are in charge of implementing CLIL: teachers.
>
> Teachers sometimes do not know what it is expected from them, especially when CLIL means putting content and foreign language teachers working together. For instance, Mehisto (2008) found out that those CLIL classes which were only taught by content teachers featured second language support mostly through unnecessary translation. This also led to the discovery that teachers saw themselves as either content teachers or language teachers, a view which affected team teaching or a full integration of components. This reticence was found even in teachers' unwillingness to incorporate materials coming from content or language classes. Overall, the author suggests that team teaching is one of the major drawbacks in CLIL (also Cammarata, 2009, p. 569-574; Coonan, 2007; Coyle, 2007; Coyle, Hood, & Marsh, 2010, p. 44; Feryok, 2008; Mehisto, Marsh, &Frigols, 2008; Yassin et al., 2010).

Nous avons, en ce qui nous concerne, confronté régulièrement nos activités avec celles des enseignants de langues vivantes de notre établissement afin, par exemple, de régler des questions telles que celles portant sur l'évaluation. A ce propos, Benagas (2012) précise :

> Another cause of disjuncture among teachers is the issue of examinations (Serragiotto, 2007). While CLIL looks at, in theory, language and content holistically, national exams (other than language exams) are solely focused on content, creating a fracture in the system.

Cette focalisation excessive, au niveau des consignes officielles, sur le contenu disciplinaire (en l'occurrence, le contenu mathématique) est précisément une des raisons qui ont motivé nos travaux de recherche. Il est à noter que cet aspect est paradoxal : les recherches en provenance de la linguistique se focalisent davantage sur des techniques propres aux langues vivantes tandis que les évaluations durant les examens nationaux prennent en compte le contenu disciplinaire de manière excessive. Néanmoins, depuis fin 2014, les responsables de l'enseignement en classes européennes de notre académie[4] ont insisté sur la nécessité de faire évoluer les pratiques vers une prise en compte accrue de la composante langagière, en s'appuyant sur un document officiel du ministère de l'Education Nationale, document Eduscol publié en 2012 et portant sur les DNL[5]. La banque de sujets pour l'épreuve de DNL mathématiques (toutes langues confondues) est en cours de renouvellement. Un nouveau type de sujets a, dès cette année (pour les épreuves anticipées du baccalauréat 2015), été élaboré afin de remplacer partiellement les sujets plus traditionnels, sujets à notre sens par trop attachés au seul contenu mathématique, et donc négligeant le travail sur la langue.

[4] Académie de Bordeaux.
[5] Ce document est consultable à l'adresse suivante :
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/84/4/doc_ress_DNL_math_v4_relu_Sd_212844.pdf

Dans le document Eduscol mentionné ci-dessus figurent des précisions apportées par leurs auteurs. Elles donnent certes un éclairage intéressant aux lecteurs non spécialistes des questions de langue mais surtout font apparaître ce que nous avions anticipé dès le début de nos recherches, à savoir l'importance qu'il faudrait accorder aux questions de reformulation (voir chapitre 3 VI). Ce point n'était pas un objet de focalisation de l'enseignement en classe européenne lorsque nous avons entamé nos travaux. A ce sujet, les auteurs du document précisent :

> Les candidats sont examinés par deux examinateurs : un professeur de la DNL et un professeur de langue. Les deux co-examinateurs interrogent ensemble le candidat en alternant et coordonnant leurs interventions. Ces interventions sont des questions posées au candidat ou des affirmations sur lesquelles on demande au candidat de réagir.
>
> Le professeur de langue peut notamment jouer le rôle d'un non spécialiste, ce qui le met dans une authentique situation de déficit d'information, face au candidat qui doit expliquer, reformuler, clarifier sa pensée afin de faire comprendre les concepts qu'il utilise et de convaincre de la pertinence de ses hypothèses. Le professeur de DNL garantit l'exactitude des affirmations du candidat et veille à ce que le questionnement ne dépasse pas le degré d'approfondissement attendu (document Eduscol, p6).

Il faut noter pourtant que toute la difficulté va consister à conserver un véritable enjeu mathématique tandis que l'on ira vers une prise en compte de plus en plus importante de la composante langagière. Nous considérons en tout cas que le contenu de l'enseignement peut malgré tout, pendant l'année, être conséquent du point de vue mathématique même si l'examen final reste limité dans ses exigences :

> Pour tous les candidats on peut considérer comme devant être acquis en langue étrangère le vocabulaire et les techniques de base correspondant aux acquis du collège et de la classe de seconde (consignes, géométrie, calcul algébrique). Les exigences par rapport au vocabulaire mathématique devront néanmoins rester raisonnables, le candidat est évalué sur son aisance à argumenter en langue étrangère. (Document Eduscol, p8)

Notre cadre d'expérimentation est limité aux classes européennes, de la Première à la Terminale. L'enseignement en classe européenne n'est pas l'enseignement en section internationale. Dans notre lycée, par exemple, l'enseignement des mathématiques en anglais est limité à une heure hebdomadaire en plus de l'horaire traditionnel de mathématiques, en Première et en Terminale. En Seconde, il est intégré à l'horaire normal. Compte tenu de l'importance des contenus du programme de mathématiques, le nombre de séances ou d'activités qui sont effectivement menées en anglais en classe de Seconde reste assez limité. Par ailleurs, nous sommes nous-même enseignant en mathématiques en anglais et les séances expérimentales concerneront uniquement des élèves de Première ou de Terminale européenne. Ces élèves ont, avec nous, une heure hebdomadaire de mathématiques en anglais (enseignement dit *européen*) mais ont un autre professeur pour le cours de mathématiques traditionnel (en français) et ils ont donc déjà étudié les notions.

Pour ce qui relève de la contrainte liée aux consignes officielles, le contenu de l'enseignement européen doit rester proche du contenu du programme (en français). Il est donc clair qu'il reste peu de marge de manœuvre pour consacrer une part importante de l'horaire aux activités à focalisation linguistique.

I.2. Les questions à l'étude

Notre travail va consister à déterminer des conditions permettant de rendre l'enseignement intégré plus efficace, notamment en recourant aux concepts – issus des théories didactiques – qui sont susceptibles d'être mis en œuvre. Pour cela, nous allons devoir élaborer des ingénieries et des situations pour permettre que les formulations, les conjectures, les validations, les raisonnements puissent être produits en L2 et que le répertoire phraséologique soit enrichi. Nous définirons ces situations comme des situations *fortement intégrées* (voir paragraphe III pour la définition précise de *situation intégrée* que nous proposons ; ainsi qu'un examen approfondi de ce nouveau concept, à la fois point de focalisation primordial et pivot pour toute notre étude). Nous rappelons très brièvement que la phraséologie concerne les expressions figées, les collocations, qui sont des combinaisons de mots rencontrées très fréquemment. On peut citer quelques exemples comme : *tenir compte de*, *prendre garde*, *se lever du bon pied*, etc... La phraséologie occupe, depuis quelque temps, une place importante dans l'enseignement d'une L2.

Dans la partie théorique, pour situer notre travail dans une perspective globale, nous examinerons plus en détail l'enseignement de type CLIL, après avoir dressé un état des lieux de la didactique des langues-cultures.

La distinction langue naturelle (langue de tous les jours) et langue spécifique sera examinée avec précision.

Les ingénieries que nous allons élaborer vont être attachées à un cadre théorique. Pour délimiter ce cadre général, il convient dans un premier temps d'examiner un peu plus précisément ce que notre problématique soulève comme questions.

Lors d'une activité mathématique ou d'une séance de langue vivante, des signes sont produits : signes linguistiques et signes symboliques. Notre travail aura donc aussi une dimension sémiotique.

Lorsque nous examinons un mot isolé, nous tentons de cerner son sens. La place du sens, du point de vue de la signification de l'objet-mathématique ou du point de vue de celle associée au signe linguistique sera donc examinée en profondeur. Nous revisiterons à cet effet la question de la dénotation dans le cas très particulier d'objets abstraits. Il y aura ainsi également une focalisation sur la dimension sémantique des objets mathématiques impliqués, en prenant en compte l'implication du signifié au niveau du, ou des, référents (actualisés ou potentiels), comme c'est d'ailleurs déjà le cas pour les mots abstraits du langage courant.

La décomposition du signifié en signifiés élémentaires est un point essentiel pour toute question d'ordre sémantique. Les linguistes nomment *sèmes* les traits abstraits minimaux (ou les "particules de sens") d'un signifié. La prise de conscience des sèmes attachés à un mot, une fois ceux-ci explicités, permet un meilleur accès au signifié abstrait.

Au chapitre 4, nous revenons sur les sèmes, en effectuant notamment une analyse sémique du mot *pattern*, lequel a une grande importance dans notre expérimentation. Le mot "pattern" est central dans nos analyses et il intervient de façon importante dans les expérimentations que ce soit dans leur conception ou dans leur mise en œuvre, y compris pour les élèves. Donc, afin de faciliter la lecture, nous précisons dès à présent les éléments de signification (obtenus à partir d'une analyse de type sémique, au chapitre 4) de ce mot-concept.

Un pattern est :

- *un objet ou phénomène*
  concret ou abstrait
- *repéré et identifié*
  par des traits caractéristiques particuliers
  et/ou des relations internes
- *susceptible d'être reproduit physiquement ou abstraitement*
  (en tant que règle ou motif)
  ou encore d'être répété dans le temps, d'être récurrent

Au premier abord, il s'agit d'un néologisme. Notre travail est en quelque sorte également un plaidoyer pour une réappropriation du terme dont l'étymon (*patron*) se trouve être d'origine française ; nous utiliserons ce terme sans traduction, pour des raisons qui seront précisées au chapitre 4.

A titre d'illustration également, et en prenant un exemple original, le mot-concept *moins* a plusieurs signifiés (linguistiques) dont uniquement certains sont de nature spécifiquement mathématique. Il y a bien sûr le sens comparatif lorsqu'on le rapporte à l'évaluation de quantités : *moins de choses*, *moins d'objets*, *j'en ai moins que toi* ; ou dans l'évaluation subjective : *c'est moins bien*, etc...
Sans chercher à redescendre au niveau des sèmes, pour le mot *moins* mais en définissant des signifiés élémentaires parfaitement discrétisés et délimités en mathématiques lorsqu'ils s'appliquent au mot dans son sens de symbole (le symbole *moins*) et dans son utilisation entre deux nombres, on distinguera le signifié de *soustraction*, celui de *négativité* et celui d'*opposition*. Sans entrer dans le détail, nous parlerons parfois de *constituants élémentaires de signification* plutôt que de signifiés, lorsque le symbole sera envisagé *sans rapport direct* à la langue. Nous reviendrons plus loin sur la nécessité de distinguer le signifié d'un mot-concept mathématique lorsqu'il est attaché au pôle langagier, verbal, de la pensée ou lorsqu'il est vu comme rapporté au pôle *fonctionnel* d'une pensée apparaissant comme *algorithmique* et *formelle*, (mobilisant des "patterns" à caractère fonctionnel). C'est dans ce dernier cas qu'il sera décrit de préférence comme *constituant de signification*.
En revanche, nous estimons que l'explicitation des sèmes pour les mots de la langue naturelle est un moyen de ne pas laisser à la charge de l'élève le soin de les déceler par lui-même, suite à une forte exposition à la langue par exemple. L'explicitation à destination des élèves ne sera pas faite en termes de sèmes mais se traduira par une *beaucoup* plus grande précision sémantique dans la description des signifiés. Nous examinerons quelques cas emblématiques : le mot-concept *pattern*, la notion de *gnomon*, le concept para-mathématique de *preuve*.
Par ailleurs, le mot apparaît aussi comme un élément autour duquel se trouve attachée une représentation (au sens cognitif) plus vaste, c'est à dire en connexion avec d'autres éléments mémorisés. Les connaissances mathématiques, résultats de véritables processus de construction, mais aussi les connaissances formées naturellement, donneront lieu à une étude spécifique. Nous serons amené, pour des raisons que nous détaillerons le moment venu, à centrer notre approche sur les notions de représentation et d'évocation.
Lors des interactions en classe, ce n'est plus le signe mais le discours, ou encore les processus d'énonciation, qui priment. Nous examinerons, à cet effet, les modalités du discours mathématiques en contexte CLIL.

Le sujet de notre recherche porte sur des objets complexes puisqu'issus de deux problématiques a priori éloignées, et pour lesquelles nous devons trouver une façon satisfaisante d'articuler les contraintes et les attendus. Ceci nécessite d'introduire des concepts que nous devrons détailler par la suite. Comme première problématisation, nous pouvons déjà affirmer que cela va nécessiter de définir ce que représente une situation qualifiée d'*intégrée* (nous considérons qu'il en existe de deux types). Cela soulève aussi la question de garantir que le travail fait en classe sur un thème mathématique, lorsqu'il est effectué dans une autre langue, est adéquat avec le savoir (mathématique) visé. Cela ne peut se faire, sur un plan théorique, sans définir les fondamentaux du savoir en jeu, question épistémologique qui trouvera certainement des réponses différentes dans les deux cultures (attachées soit à la L1, soit à la L2). Sur le plan des expérimentations, une réponse à la problématique passe par l'élaboration effective de situations *intégrées*, c'est-à-dire permettant un double apprentissage, à la fois mathématique et linguistique. Nous montrerons comment ces situations permettent l'apprentissage de nouvelles connaissances mathématiques dès les phases adidactiques. Par ailleurs, ces situations visent, et prennent effectivement en charge, un enrichissement de la phraséologie à travers son utilisation dans un contexte *authentique quant à son enjeu et à sa réalisation*. Nous éprouverons les connaissances de L2 mobilisées dans des situations mathématiques construites avec un réel souci épistémologique.
Nous estimons pouvoir montrer, par des analyses a posteriori très fines, que ces situations *permettent une meilleure conceptualisation des objets mathématiques*, tout en garantissant un enrichissement lexical et phraséologique (en L2) conséquent. Nous espérons de la sorte atteindre le deuxième objectif majeur de nos travaux, celui lié à l'expérimentation et consistant en la mise en place d'ingénieries permettant d'illustrer nos considérations théoriques tout en apportant des réponses aux questions soulevées et liées à notre problématique.
Compte tenu de notre problématique et des éléments que nous venons d'évoquer, il apparaît clairement que les savoirs visés par un enseignement de type CLIL vont être de deux types : savoirs mathématiques et connaissances de nature langagière. Il est impératif de déterminer avec précision leur nature. Ceci sera fait plus loin dans la présentation de nos travaux mais nous nous devons d'inscrire ceux-ci dès à présent dans des cadres théoriques.
L'axe principal de notre étude est celui de la didactique des mathématiques. Les questions portant sur l'enseignement de type CLIL sont appréhendées essentiellement en rapport étroit avec les mathématiques.
Les cadres que nous allons choisir doivent pouvoir être légitimés. C'est essentiellement au travers de leur dimension pragmatique que ceci pourra être véritablement effectué. L'efficacité des modèles théoriques pourra certes être légitimée au travers des outils d'analyse qui leur sont attachés, en ce qui concerne par exemple les analyses a priori des séances expérimentales, sous réserve d'être, le moment venu, mise en lumière de manière claire et précise ; mais surtout, c'est en montrant en quoi les modèles retenus ou complétés favorisent la mise en place d'autres ingénieries que nous donnerons une véritable portée à notre étude.
Le contexte général qui a été retenu, et qui se trouve être celui d'un enseignement de type CLIL, repose sur l'idée d'intégration. Nous disons « idée » car il a fallu dresser un état des lieux pour cerner de près ce que ce type d'enseignement recouvre dans la pratique et ce qui peut apparaître comme implicite ou idéal lorsque l'on se réfère à la notion d'intégration. Nous avons reporté au chapitre 3 l'état des lieux sur ce type d'enseignement. Pourtant, il est d'ores et déjà impératif de préciser la manière dont nous avons, dès le début de notre recherche,

appréhendé cette notion puisque c’est en effet ce dernier point qui nous a orienté rapidement vers des cadres théoriques bien précis.
La discipline *dite* non linguistique, la DdNL, pour reprendre ponctuellement la terminologie retenue par Gajo (2006), n’est autre que les mathématiques. Compte tenu de l'importance des phases de recherche non seulement dans la pratique mathématique en général mais surtout pour nos situations expérimentales, notamment du fait de la mise en place de larges phases adidactiques au niveau des ingénieries, il est clair que nous accorderons une place essentielle aux raisonnements, aux débats, à l’argumentation et à la validation. Ce sont en effet autant de facteurs liés aux échanges discursifs, le but étant que ces derniers soient réalisés en L2 de la manière la plus adéquate ou efficace possible. Les divers types de formulations, d'actions, qui peuvent avoir lieu dans un milieu didactique ou adidactique seront regroupés dans des répertoires. Les concepts de milieu, de répertoire, entre autres, sont autant d’éléments théoriques que la Théorie des Situations Didactiques met à notre disposition. Le rôle qu’elle attribue aux phases de recherche (qui auront lieu ici en L1 et L2) et la manière dont elle aborde la question de l’institutionnalisation[6], le découpage en diverses phases pour une activité donnée nous ont donc également orienté vers la TSD.
D’autres questions quant à ce que peut recouvrir la notion de situation intégrée se posent d’ores et déjà : le répertoire didactique aura-t-il pris en compte la phraséologie nécessaire au bon fonctionnement des interactions orales, est-ce que les élèves auront été à même de reformuler à leur façon des consignes, autant de questions dont les réponses, si elles sont positives, feront de la situation envisagée une véritable situation intégrée.
Le cadre théorique principal est donc celui de la TSD. Les concepts théoriques qui lui sont liés vont faire l’objet d’un examen spécifique dans la suite du chapitre.
Le second cadre, en ce qui concerne la composante linguistique de nos travaux, sera celui de la phraséodidactique. Il a été retenu comme un moyen de faire référence à une discipline émergente tout en nous permettant de mettre l’accent sur l’importance de la phraséologie dans l’apprentissage d’une langue vivante, qu’il s’agisse de la L1 ou de la L2. Insister sur la phraséologie apparaît comme une nécessité dès lors que nous prenons conscience que nous nous exprimons en utilisant des segments préconstruits. Les notions de collocations, d’expressions figées, d’idiomes seront des notions centrales et elles seront examinées dans le chapitre 3, relativement à notre problématique.
Des cadres annexes ont également été retenus. La perspective actionnelle se révèle adéquate du fait-même que l’accent y est mis sur les situations et les tâches. Elle permet ainsi de rejoindre des préoccupations similaires en didactique des mathématiques.
La sémantique lexicale, quant à elle, traite des phénomènes de conceptualisation en fournissant un modèle sur plusieurs niveaux (niveau sémantique et niveau conceptuel) et en mettant en relief la notion centrale de sème (plus petite unité de signification). Elle nous permettra d’éclairer fortement certains aspects des processus cognitifs à l’œuvre lors des apprentissages, que ceux-ci soient non seulement de nature langagière mais aussi mathématique. Les théories de l’énonciation seront en arrière-plan dès qu’il sera question d’énonciation. La dimension énonciative des interactions en classe permet de prendre en compte les questions de positionnement de l'énonciateur et de référence dans les discours produits.

[6] Pour une définition précise de l’institutionnalisation, voir le glossaire de Guy Brousseau, téléchargeable à l’adresse suivante : http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Les propositions ou recommandations pédagogiques de type CLIL apparaissent comme une ressource efficace lorsqu'on considère une séance d'enseignement européen comme pouvant s'appuyer sur des techniques de type « cours de langue seconde ». Les techniques regroupées sous la dénomination de « warming-up, consolidating, scaffolding, chunking » ont été utilisées en amont et pendant nos séances expérimentales. Il conviendra de préciser ce qu'elles recouvrent puisqu'elles ont contribué au bon déroulement de celles-ci. Néanmoins, il est important de préciser qu'elles ne suffisent pas à garantir une véritable intégration au sens où nous l'entendons (ce que nous définirons plus loin avec précision).
Nous tenons enfin à préciser que la notion de signe, même si elle ne peut être totalement écartée, a cédé la primauté à celle de représentation pour des raisons d'articulation théorique avec les divers concepts convoqués dans notre étude, ce qui apparaîtra plus clairement par la suite. Nous pouvons néanmoins déjà dire que ce sont à la fois la sémiotique de Vygotski (1997), et celle de Peirce, qui permettent d'éclairer certains aspects liés à notre problématique (voir Everaert-Desmedt, 1990 ; Deledalle, 1990 ; Bloch, 2005 ; Fisette, 1993 ; Hoffmann, 2001 ; 2003 ; 2004 ; Otte, 2005 ; Peirce, 1978 ; Tiercelin, 1993 ; Marty, 1992). Ces aspects sont les suivants : traitement indiciel des signes produits par les élèves (sémiotique de Peirce), notion de co-construction des concepts lors des apprentissages (sémiotique de Vygotski).
Ce travail nous conduit à effectuer une analyse conjointe des spécificités des savoirs en ce qui concerne, d'une part, les mathématiques (en français et en langue seconde) et d'autre part, les spécificités de la langue seconde en rapport avec les mathématiques. Cette analyse nous permet d'observer et d'étudier la pertinence des interactions mathématiques /linguistiques dans les classes. A cet effet, nous avons interrogé le rôle et la place du formalisme dans les séances en langue française ou seconde.
Enfin, il reste à mentionner un point délicat pour nos travaux. Après avoir défini le concept de situation intégrée (voir III ci-après), il nous faudra mettre en place un moyen efficace et légitime d'affirmer qu'une situation est bien intégrée. Ce critère nous sera indispensable lors des analyses de nos séances expérimentales. Il reposera sur un ensemble de caractéristiques que nous attacherons au concept lui-même.

I.3. Des travaux antérieurs pertinents pour notre étude

Dans ce paragraphe, nous examinons quelques travaux. Ils portent sur l'enseignement des mathématiques dans une seconde langue ou alors sont susceptibles d'éclairer certains points directement liés à notre problématique mais sans pour autant traiter de questions de nature linguistique (considération théoriques relatives à nos propres cadres, processus de généralisation des patterns, conceptualisation, argumentation relativement à l'expérience, etc…).

I.3.a. La thèse de Heidi Strømskag Måsøval

Son intérêt pour nous réside dans le fait que Måsøval (2011) choisit de traiter des questions liées à la généralisation de patterns en se plaçant dans le cadre de la TSD et en adoptant une approche socio-constructiviste. Ceci relève d'une démarche générale convergente avec nos travaux et nos propres cadres théoriques.
Måsøval donne un exemple de modélisation dans le cadre de la TSD d'une tâche consistant à généraliser algébriquement une relation arithmétique liée à une configuration plane d'objets circulaires (Måsøval, 2011, p58 et suivantes). Nous avons là une illustration des concepts-clés

de la TSD (milieux, situations, adidacticité, etc…) sur un exemple lié au thème que nous avons-nous-même retenu pour nos séances expérimentales.
Fait très intéressant pour nos travaux, Måsøval examine les difficultés d'un enseignant à faire percevoir aux étudiants la notion de *relation structurale* associée à un pattern dans les questions de généralisation. Ce point était traité dans une tâche nécessitant une attitude de preuve. Or il se trouve que nous avons précisément choisi de traiter le thème de la preuve multimodale sur des propriétés similaires (arithmétiques). Nos séances quant à nous vont porter sur l'établissement de la preuve multimodale par recours à une notion que nous développerons dans notre étude, à savoir celle d'explicitation schématique.

I.3.b. La thèse de Richard Cabassut

La thèse de Cabassut (2005) porte sur la démonstration, les raisonnements et la validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne. Sa problématique diffère de la nôtre car il s'agit d'une étude comparative entre deux systèmes. Dès lors, la question des langues ne pouvait y être traitée sans préciser au préalable la signification et la traduction de mots tels que *preuve*, *argumentation*, *raisonnement* (ibid. p114 et suiv.). A cette occasion, Cabassut fait apparaître (sans utiliser la terminologie propre à la sémantique lexicale) des phénomènes de non-recouvrement sémantique entre les termes des deux langues.
Par ailleurs, la preuve, les raisonnements et la validation y sont traités de manière approfondie, notamment en s'appuyant sur la typologie des preuves de Balacheff. Or ce sont des points essentiels pour ce qui concerne le thème que nous avons retenu pour nos propres séances expérimentales. Nous serons donc amené à faire référence à ces travaux.

I.3.c. La thèse de Nadia Douek

La thèse de Douek (2003) concerne les rapports entre l'argumentation et la conceptualisation dans les domaines d'expérience. La démarche de Douek procède d'une conciliation entre la théorie des champs conceptuels de Vergnaud et la sémiotique de Vygotski. Elle insiste sur le fait que la dévolution est favorisée lorsque les situations didactiques ont une composante culturelle partagée par les élèves (Douek, 2002-2003, p33). Ainsi la dialectique vygotskienne Concept Scientifique- Concept Quotidien y joue un rôle essentiel et Douek explique la nécessité de s'appuyer sur une représentation déjà amorcée de la situation pour pouvoir être appréhendée (ibid. p32) :

> Les représentations externes structurées et leur maîtrise consciente caractérisent le développement de la conceptualisation dans le sens de la scientificité mais elle doit s'appuyer sur une certaine conceptualisation existante.

Douek analyse finement les processus de conceptualisation en se rapportant, entre autres, aux notions de schèmes et de concepts (Vergnaud, 1990) en y intégrant *explicitement* la dialectique Concept Scientifique- Concept Quotidien.
Etant donnée la place que nous accorderons nous-même à la conceptualisation, à la notion de représentation et à l'expérience, cette thèse est d'un grand intérêt pour nous.

I.3.d. La thèse de Thomas Barrier

Cette thèse a pour objectif d'étudier les situations de validation au sens de la Théorie des Situations (TSD). Barrier adopte une perspective sémantique et dialogique sur les processus de validation en mathématiques.

> Cette approche consiste à analyser les relations entre les assertions et les objets dénotés au sein des jeux de langage à travers les liens stratégiques de validation qui les relient. La méthodologie générale de la recherche s'appuie à la fois sur des ressources philosophiques et didactiques, l'hypothèse de travail est celle de la complémentarité des méthodes analytique et expérimentale en didactique des mathématiques. Au niveau du travail analytique, la référence principale est la sémantique selon la théorie des jeux de Hintikka et sa correction par Vernant. (Barrier, 2009, p2)

Dans ses travaux, Barrier insiste sur plusieurs points qui sont d'un grand intérêt pour notre approche. Sa problématique le conduit à traiter les problèmes de quantification[7]. Le rôle crucial joué par les objets mathématiques et la distinction centrale entre jeux d'intérieur et jeux d'extérieur empruntée à Hintikka (2007) sont des éléments essentiels et Barrier s'intéresse de près aux processus de preuve (voir aussi Barrier, Durand-Guerrier et Blossier, 2009).

Notons également que Barrier se démarque de Hintikka sur un point important :

> […] il me faut signaler ici que mon identification des jeux d'extérieur avec les pratiques mathématiques qui font intervenir les sens à travers l'utilisation d'objets dans les processus de preuve est sans aucun doute en contradiction avec les convictions de Hintikka. (Barrier, 2009, p34).

Notre étude accorde une place importante aux sens et à la signification. Cette question donnera lieu à un examen particulier du rapport entre sens et objets mathématiques au niveau théorique et aura des conséquences directes dans le choix de nos situations expérimentales et la mise en place des ingénieries correspondantes.

I.4. Modèles et théories en didactique des mathématiques

– Le modèle de Toulmin (1958, 1993)

Il permet d'examiner la composante argumentative sous l'angle des raisonnements, en faisant apparaître clairement la nécessité de distinguer les affirmations, les données et les garanties légitimant les inférences (voir par exemple Durand-Guerrier, 2005, Mathé, 2006, Tanguay, 2005, Pedemonte, 2007, 2008 et Barrier 2009).

> In Toulmin's model an argument consists of three elements (Toulmin, 1993):
> C (claim): the statement of the speaker.
> D (data): data justifying claim C.
> W (warrant): the inference rule, which allows data to be connected to the claim.
> In any argument the first step is expressed by a standpoint (an assertion, an opinion). In Toulmin's terminology the standpoint is called the claim. The second step consists of the production of data supporting the claim. The warrant provides the justification for using the data conceived as a support for the data-claim relationships. The warrant, which can be expressed as a principle, or a rule, acts as a bridge between the data and the claim. (Pedemonte, 2008, in Barrier, Mathé et Durand-Guerrier, 2009).

[7] Barrier en donne la définition suivante : le terme de «quantification» exprime la manière dont sont manipulés les variables et les objets dans la pratique mathématique ou logique (Barrier, 2009, p18).

Compte tenu du rapport aux langues, notre étude aurait pu s'appuyer sur ce modèle. Le recours à ce modèle, dans le cas de la problématique de la thèse de Cabassut qui portait, elle aussi, sur les langues vivantes (voir ci-dessus, I.3), était à cette occasion dûment légitimé car il a permis à Cabassut d'examiner les raisonnements et les argumentations intervenant dans un ensemble large de types de problèmes. Or, ce ne sera pas le cas pour nous, puisque nos situations expérimentales ne traitent que du rapport entre identités algébriques et preuves visuelles en tant que thème des situations expérimentales. Cela dit, il a également été utilisé par Pedemonte et Buchbinder (2011), dans l'étude d'une situation relative, elle aussi, à une identité algébrique (voir aussi la thèse de Pedemonte, 2002). Ce choix est d'ailleurs également tout à fait pertinent dans leur cas, puisque la situation y semble totalement dévolue et laisse donc apparaître des arguments et des légitimations de natures différentes pour un même problème. En ce qui nous concerne, les situations sont en revanche dévolues avec contrainte et orientent implicitement les actions et les raisonnements vers la construction de figures tenant lieu de preuves visuelles. Notre démarche est donc sensiblement différente. Nous avons, pour les raisons qui précèdent, entre autres, décidé de ne pas recourir à ce modèle.

– Le modèle cK¢

Ce modèle a été développé par Balacheff (1995).

Dans ce modèle, une conception C est décrite par un quadruplet (P, R, L, Σ) dans lequel :

P est un ensemble de problèmes ;

R est un ensemble d'opérateurs ;

L est un système de représentation ;

Σ est une structure de contrôle.

La notion de conception y est centrale :

> On peut donc résumer en proposant qu'une conception est une instance de la connaissance de l'apprenant, qui se distingue par la représentation et les traitements qu'elle mobilise, mais dont la portée est locale, attestée sur un domaine de validité et d'efficacité particulier (éventuellement scolaire). Balacheff & Margolinas (2005, p. 79) cité dans (Lima, 2006, p 31, 32)

Notre étude étant relativement centrée sur la notion de représentation (voir chapitre 2), il a semblé intéressant d'examiner les potentialités de ce modèle. Nous y avons fait d'ailleurs implicitement référence, localement, lorsque nous avons examiné l'évolution d'une conception locale (voir chapitre 7, II.3.e).

Par ailleurs, dans le modèle cK¢, l'ensemble des problèmes (P) est défini de la manière suivante :

> Un problème est le résultat d'une perturbation de l'équilibre du système [sujet<>milieu] (Balacheff, 1995, p. 227). Dans ce modèle, l'ensemble P d'une conception C'est l'ensemble de problèmes pour lesquels la conception C participe à leur résolution. Nous parlerons ainsi de sphère de pratique ou de domaine de validité de la conception C. La sphère de pratique d'une conception est liée à la connaissance du sujet qui la mobilise, et non au savoir de référence. (Lima, 2006)

Comme cela est dit clairement, les problèmes ont ici une portée assez large, sont envisagés comme classe de problèmes. A ce propos, Gaudin relève d'ailleurs la difficulté de trouver ou d'identifier un ou plusieurs représentants d'une telle classe (Lima, 2006, p 33 et Gaudin, 2005, p 37).

Nous avons donc décidé de ne faire qu'un recours ponctuel à ce modèle. Le sens que nous donnerons alors au mot conception sera localement précisé mais aussi éclairé grâce au contexte (voir chapitre 6, II.3.e, *évolution d'une conception*).

– La notion de schème chez Vergnaud

Nous empruntons à Vergnaud la notion de schème, car elle s'articule très bien avec la notion de représentation. Elle est un pont entre connaissances, savoir-faire du côté de la représentation cognitive d'un individu et les actions exercées sur le milieu extérieur, dans la réalité physique, d'autre part. Représentation et schème seront chez nous étroitement associés. Le schème est une organisation invariante de la conduite pour une classe donnée de situations.

> […] Un schème est formé de plusieurs catégories d'éléments, tous indispensables : des buts et anticipations, des règles d'action, des possibilités d'inférence en situation et des invariants opératoires. (Vergnaud, 1998, p. 283 et 285)

Par ailleurs, le concept de schème est compatible avec celui de situation (voir II pour la place essentielle des situations, dans le cadre de la TSD) :

> Le couple conceptuel « schème/situation » est la clef de voûte de la psychologie cognitive et de la théorie de l'activité : pour cette raison simple que, la connaissance étant adaptation, ce sont les schèmes qui s'adaptent et ils s'adaptent à des situations (Vergnaud, 2002, p. 110).

Le rapport entre sens et concept sera abordé dans notre étude sans référence explicite ultérieure à Vergnaud. Les questions étudiées et notre angle d'approche vont être différents (voir chapitre 2, IV.1, pour un positionnement différent quant aux liens existant entre représentation et réel, par exemple).

Néanmoins, le lien entre concept et schème tel que décrit dans Vergnaud (1990) apparaît clairement dans la citation suivante :

> C'est à travers des situations et des problèmes qu'un concept acquiert du sens pour un enfant. Si l'on veut prendre la mesure de la fonction adaptative de la connaissance, on doit accorder une place centrale aux formes qu'elle prend dans l'activité du sujet. La connaissance opératoire du sujet est opératoire ou n'est pas. (…) Appelons « schème » l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données. C'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances en actes du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire » (Vergnaud, 1990, p. 135-136, cité dans Gaudin, 2005, p14).

Il en va de même pour le fait que le schème (au sens de Vergnaud) permet de décrire le côté automatique des conduites vis-à-vis de décisions conscientes spécifiques d'une situation :

> Le fonctionnement cognitif de l'élève comporte des opérations qui s'automatisent progressivement (changer de signe quand on change de membre, isoler x d'un côté du signe d'égalité) et des décisions conscientes qui permettent de tenir compte des valeurs particulières des variables de situation. La fiabilité du schème pour le sujet repose en dernier ressort sur la connaissance qu'il a, explicite ou implicite, des relations entre l'algorithme et les caractéristiques du problème à résoudre » (Vergnaud, 1990, p. 141).

Nous précisons que notre approche prend en compte le niveau sémantique au sens de la sémantique lexicale, et vise à établir un lien entre représentation cognitive et signification d'un mot-concept.

II. Didactique des mathématiques

II.1. Théorie des situations didactiques et milieux didactiques

II.1.a. Introduction et concepts emblématiques

Nous nous proposons de rappeler dans ce paragraphe quelques concepts emblématiques de la TSD. Ils jouent un rôle important dans notre étude.

Historiquement, la Théorie des Situations Didactiques a été conçue à l'origine à destination du primaire, avec l'objectif de centrer l'enseignement sur des *situations* dites *fondamentales*[8]. Lors de cette création, des concepts-clés ont été introduits et développés, concepts sur lesquels nous allons revenir. Par la suite, et au prix de quelques aménagements[9], elle a trouvé un champ d'application dans le Secondaire et le Supérieur, à travers l'élaboration et l'étude de situations *à fort potentiel d'adidacticité*, qualifiées de *singulières* sans être nécessairement des situations fondamentales. De telles situations sont élaborées pour permettre aux élèves de découvrir les mathématiques de manière plus autonome. Une situation sera qualifiée d'adidactique si son objectif didactique n'apparaît pas explicitement pour le sujet, alors qu'elle vise un savoir bien spécifique, et surtout si la situation comporte un *milieu* susceptible de fournir des rétroactions aux actions de l'élève chercheur, nommé *l'actant* dans la TSD.

> Les situations hypothétiques considérées appartiennent à deux catégories : les situations *didactiques* où un actant, un professeur, par exemple, organise un dispositif qui manifeste son intention de modifier ou de faire naître les connaissances d'un autre actant, un élève par exemple et lui permet de s'exprimer en actions, et les situations *non didactiques* où l'évolution de l'actant n'est soumise à aucune intervention didactique directe. Rq : la dénomination n'est pas heureuse car une telle situation peut servir dans un projet didactique et à ce titre être dite *didactique* : qui sert à enseigner, suivant l'usage commun). La modélisation des enseignements effectifs conduit à combiner les deux : certaines situations didactiques ménagent au sujet de l'apprentissage des situations partiellement libérées d'interventions directes : les situations a-didactiques (glossaire de Guy Brousseau)[10].

La théorie propose une *modélisation des situations* en termes de *niveaux de milieux* ; les évolutions de la TSD ont conduit à intégrer des éléments d'ordre sémiotique de manière à proposer une méthodologie efficace pour élaborer de telles situations. Ce modèle de structuration de milieu sera développé infra. On peut d'ores et déjà rappeler que le milieu, dans le cas d'une situation adidactique, joue un rôle antagoniste. Le sujet interagit avec lui, ce qui doit entraîner l'émergence de connaissances locales fonctionnant dans la situation. Les connaissances générées à cette occasion et associées à ce savoir sont d'un nouveau type : soit elles fonctionnent comme des modèles implicites d'action, soit elles interviennent dans le choix de l'action ou la prise de décision.

La partie adidactique de la situation (désignée sous le nom de situation adidactique) est la partie que le professeur délègue (dévolue) à l'élève. Ce dernier peut alors interagir avec un milieu où il peut et doit ignorer les intentions didactiques du professeur.

---

[8] La définition proposée par Guy Brousseau, est accessible sur le site : http://guy-brousseau.com

[9] Redéfinition du rôle du professeur dans les situations à dimension adidactiques (Margolinas 2002, Bloch 1999) et réinterprétation du schéma action-formulation-validation.

[10] Consultable en ligne à l'adresse suivante : http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

II.1.b. Le concept de milieu didactique

Le milieu didactique est un espace d'actions et d'interactions, que le didacticien est conduit à conceptualiser en le centrant sur la notion de connaissance, dans le but de modéliser une situation mathématique.

> Le milieu est le système antagoniste de l'actant. Dans une situation d'action, on appelle "milieu" tout ce qui agit sur l'élève ou / et ce sur quoi l'élève agit. L'actant est « ce » qui dans le modèle agit sur le milieu de façon rationnelle et économique dans le cadre des règles de la situation. En tant que modèle d'un élève ou plus généralement d'un sujet, il agit en fonction de son répertoire de connaissances. (glossaire de Guy Brousseau[11]).

Brousseau précise (ibid. ; définition de situation didactique) :

> Le milieu est constitué des objets (physiques, culturels, sociaux, humains) avec lesquels le sujet interagit dans une situation. Le sujet détermine une certaine évolution parmi des états possibles et autorisés de ce milieu, vers un état terminal qu'il juge conforme à son projet.

La pratique mathématique scolaire a lieu dans une classe. Lorsque les élèves s'y trouvent, ce lieu est perçu par eux comme un environnement matériel. On peut y trouver les outils personnels habituels : compas, règle, papier, crayon, etc... La salle peut également contenir un tableau classique, un tableau numérique, un ou plusieurs ordinateurs, etc... Lorsque l'élève entre dans la classe, il s'attend à effectuer des actions qui sont, soit dirigées vers le milieu matériel, soit imaginées, idéalisées, soit, le plus souvent, les deux à la fois. L'ensemble des actions possibles et leur conceptualisation par des représentations mentales est implicitement et étroitement associé à cette idée de milieu didactique. Le milieu va être le lieu de raisonnements qu'il conviendra d'analyser ; les raisonnements conduits et les signes produits dans les situations vont permettre de repérer les divers niveaux de milieux en phase adidactique (Bloch et Gibel, 2011). En quelque sorte, milieux et raisonnements se co-déterminent ou tout au moins, sont interdépendants. Ce sont néanmoins les signes produits qui permettront de situer les élèves dans un milieu plutôt qu'un autre. Le modèle de Bloch et Gibel (ibid.) donne à voir en effet la formation d'un type particulier de signes pour chacun des niveaux de milieux. Il a donc une dimension anticipatrice lors de son fonctionnement dans le cadre d'une analyse a priori.

La TSD, à partir de l'observation de phénomènes didactiques récurrents, propose un découpage du milieu. Les conditions d'émergence du sens et des objets mathématiques, chez l'élève, ont toujours été au centre des préoccupations des didacticiens. Le découpage et la structuration du milieu en divers niveaux, par la TSD, en lien avec les ingénieries élaborées, résultent d'une modélisation à des fins opératoires, c'est-à-dire avant tout pragmatiques. La condensation des phénomènes didactiques récurrents en une schématisation par un tableau est désormais classique (Margolinas 1998; Bloch 2002). Le lecteur trouvera dans la littérature (voir par exemple Bloch, 1999 ou encore Måsøval, 2011), de nombreuses informations complémentaires permettant de cerner, à travers l'exemple d'analyses méthodologiques, ce que recouvre chacun des concepts de cette théorie, tels celui de milieu, mais aussi ceux de situation et leur subdivision en milieux, ou situations, de référence, objectifs, etc...(voir Bloch, 1999).

La situation et le milieu sont deux concepts étroitement associés (voir Brousseau, 1990). La situation est le terme employé pour objectiver l'ensemble des actions et de leurs résultats.

[11] Consultable en ligne à l'adresse suivante :
http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Elle est conçue comme produit ou processus, de façon provisoirement figée dans le discours, tout en renvoyant à du dynamique, de l'interactionnel etc... Elle évoque l'activité et ses productions, dans tous les sens du terme.
Le milieu, en tant qu'il évoque ce que nous avons déjà mentionné, résulte d'une conceptualisation de l'environnement et renvoie immanquablement à la perception active des participants, élèves ou enseignant. Mais la perception active est déjà, en soi, une action. C'est toujours par elle que commence la conceptualisation de toute activité dès qu'on s'y engage. Parfois, l'imagination prend la place de la perception en proposant des substituts aux objets perçus mais le plus souvent, les deux processus cognitifs ont lieu simultanément ou alternativement. Lorsque l'élève regarde une formule écrite au tableau, il perçoit les symboles et leur attache du sens sans prendre en considération le fait que cette écriture soit physiquement présente au tableau. Si les symboles ont un ou plusieurs référents, l'élève dirigera son attention vers l'environnement immédiat. Lorsqu'il raisonne, que son raisonnement soit inductif, logico-déductif ou abductif, lors d'une succession d'étapes liées à une « démonstration », l'élève peut quitter cette perception active dirigée vers le tableau pour prolonger le phénomène de compréhension par une phase d'imagination active, de recours à des parcours sémantiques individuels et intériorisés, avec ses propres images mentales, en réactivant le sens attaché à des expériences antérieures qu'il a déjà conceptualisées et mémorisées et en mobilisant les connaissances dont ils dispose. L'élève cherche ainsi à établir des ponts, des analogies, des liens sémantiques entre ses connaissances et les différents éléments représentationnels liés à la nature de la tâche en cours.
Dans notre usage de la TSD, nous essaierons systématiquement de distinguer, dans les connaissances manifestées aux différents niveaux de milieux, ce qui est extériorisé, ce qui est vu comme matériel ou physique, de ce qui est idéalisé (voir chapitre 2 pour une distinction des divers niveaux d'idéalisation, en un sens que nous détaillerons).
Nous reprenons ci-dessous le tableau présentant la structuration des milieux pour préciser le cadre de notre recherche.

<table>
<tr><td>M3
Milieu de construction</td><td></td><td>P3 :
P-noosphérien</td><td>S3 :
situation noosphérienne</td><td rowspan="3">sur-didactique</td></tr>
<tr><td>M2
Milieu de projet</td><td></td><td>P2 :
P-constructeur</td><td>S2 :
situation de construction</td></tr>
<tr><td>M1
Milieu didactique</td><td>E1 :
E-réflexif</td><td>P1 :
P-projecteur</td><td>S1 :
situation de projet</td></tr>
<tr><td>M0 Milieu d'apprentissage : institutionnalisation</td><td>E0 :
Elève</td><td>P0 :
Professeur enseignant</td><td>S0 :
situation didactique</td><td></td></tr>
<tr><td>M-1 Milieu de référence : formulation & validation</td><td>E-1 :
E-apprenant</td><td>P-1 :
P régulateur</td><td>S-1 :
situation d'apprentissage</td><td rowspan="3">a-didactique</td></tr>
<tr><td>M-2
Milieu objectif :action</td><td>E-2 :
E-agissant</td><td>P-2 : P dévolueur observateur</td><td>S-2 :
situation de référence</td></tr>
<tr><td>M-3
Milieu matériel</td><td>E-3 :
E-objectivant</td><td></td><td>S-3 :
situation objective</td></tr>
</table>

Tableau 1.1. : milieux didactiques

Il s’agit du modèle de Margolinas, complété par Bloch (2002). Lorsque nous serons amené (voir infra) à parler de milieu intégré, nous reviendrons en détail sur la partie supérieure du tableau, concernant les niveaux sur-didactiques.

II.1.c. Première délimitation des divers milieux et notion de convaincance

Lorsque nous aurons examiné de manière plus précise les questions liées au sens et à la signification, du point de vue sémiotique, en tenant compte à la fois des signifiants, signifiés et référents, nous reviendrons sur la question des milieux pour l’envisager relativement aux processus cognitifs à l’œuvre[12]. Nous distinguerons plusieurs modes de perception active puisque celle-ci est tournée, soit vers la réalité sensible, soit vers des pseudo-signes (éléments de notre pensée verbalisée, images mentales) ou soit vers des signes physiques et/ou symboliques (vus comme extérieurs). Nous illustrerons plus loin, à travers des exemples issus de nos séances expérimentales, les caractéristiques des milieux sous-didactiques en lien avec la problématique générale de nos travaux, mais aussi avec les éléments théoriques que nous avons déjà évoqués. Nous établirons un lien étroit avec les niveaux et les types de raisonnements à l’œuvre dans les phases adidactiques.
A cet égard, Bloch et Gibel (2011) précisent que le milieu heuristique est un milieu antagoniste auquel l’élève se confronte pour élaborer des raisonnements, le milieu de référence a pour fonction « d’établir la **généricité des méthodes** et le **caractère de nécessité**[13] des propriétés trouvées » (ibid., p 13) et le milieu didactique « met en évidence la fonction des différents énoncés apodictiques[14], soit de preuve, soit de décision, et organise l’institutionnalisation ».
Selon Bloch et Gibel (ibid.), les fonctions de raisonnement elles-mêmes manifestent les niveaux de milieux et « peuvent servir au **repérage** de la position des élèves dans chacun de ces niveaux » (Bloch et Gibel, 2011). Il est clair que, **réciproquement**, les niveaux eux-mêmes sont ainsi définis. La délimitation conceptuelle dont nous avons parlée repose donc sur un consensus d’interprétation d’un type particulier de comportement, d’action (au sens large), de raisonnement de la part de l’élève (voir tableau 1.2 ci-après).

La montée vers des niveaux supérieurs s’accompagne, ou est concomitante, d’une formulation plus élaborée mais aussi d’une *convaincance* croissante lorsqu’il s’agit d’établir une preuve, par exemple. Nous avons décidé d’introduire comme néologisme le terme de ***convaincance***. Ce substantif signifie "caractère convaincant"et s'applique à une preuve. La convaincance est donc attachée à la preuve elle-même et repose sur plusieurs caractéristiques de cette dernière. Une preuve est convaincante lorsque la propriété sous-jacente apparaît comme étant clairement établie. Plusieurs formes de signifiance peuvent être impliquées qui participent de l'explicitation des caractéristiques de convaincance. La signifiance lexicale est mobilisée lors de la description des symboles utilisés lors d'une preuve algébrique. La convaincance est alors descriptible en recourant à un lexique plutôt fonctionnel (telle propriété a été convenablement *appliquée*; l'expression a été *factorisée*, etc…). La signifiance représentationnelle peut aussi être mobilisée, notamment dans le cas d'une preuve visuelle, mais aussi en rapport avec une figure tenant lieu de support à la preuve. La signifiance expérientielle interne, reposant sur des

[12] Voir chapitre 2.
[13] Nous consacrerons un paragraphe complet à ces notions.
[14] Le CNRTL donne la définition suivante de l’adjectif apodictique : « Qui a le caractère convaincant, évident d'une proposition démontrée. *Un argument, un principe, un raisonnement apodictique.* Synon. *démonstratif.* »

aspects spécifiques de la multimodalité, tels que le recours aux gestes ou encore la prise de conscience du rapport entre son propre corps, les énoncés discursifs concomitants et des référents extra-linguistiques impliqués, peut participer de manière importante à la convaincance (voir partie expérimentale, situation sur la somme des cubes). La convaincance repose en général sur une bonne concordance des diverses formes de signifiance, souvent du fait de la mise en relation adéquate au plan mental d'éléments sémiotiques tels que signifiants, signifiés et référents. La convaincance, souvent liée à la perception de la généricité dans un processus de généralisation, se doit d'être confortée par une validation au sein du groupe, puis devant la classe, puis par l'enseignant lui-même avec la formulation plus codifiée propre aux mathématiques institutionnalisées. En derniers recours, les mots eux-mêmes doivent permettre l'articulation des formes de signifiance sur lesquelles repose la convaincance. La convaincance engage donc les capacités de perception sémantique d'un individu et bénéficie de la richesse des expériences signifiantes antérieures.

	Milieu M-2	**Milieu M-1**	**Milieu M0**
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM - Intuition sur un dessin - Décision de calcul - Moyen heuristique - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet math.	R1.3 SYNT - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise (avec aide du P éventuellement)
Niveaux d'utilisation des symboles	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions…)	R2.2 SYNT/SEM Arguments 'locaux' ou plus génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques : ici symboles de l'Analyse
Niveau d'actualisation du répertoire	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement au niveau argumentaire : - des énoncés - du système organisateur	R3.3 SYNT - Formalisation des preuves - Introduction d'ostensifs organisés - Intégration des éléments théoriques du domaine math.

Tableau 1.2 – Le modèle milieux/répertoire/symboles selon Bloch et Gibel (2011)

Le milieu M_{-3}, c'est-à-dire le milieu matériel, peut parfois comporter des éléments très particuliers, fortement liés à la nature, à la spécificité de la situation. Dans l'une de nos séances expérimentales, nous avons mis des cubes-unités (matériels) à disposition des élèves, ce qui n'est pas toujours courant au niveau du lycée. Les consignes figurant dans un document, et relatives au problème à résoudre, incitent l'élève à une vision active de son environnement matériel.

Si les schèmes d'action nécessaires font partie du répertoire d'action de l'élève, si la situation est bien contrainte, l'élève, dès qu'il examine activement l'ensemble des données, objective cette situation et passe, ou se retrouve, très vite au niveau supérieur.

Le niveau M_{-2} apparaît comme celui où l'élève a des intuitions, exhibe des exemples, des contre-exemples, s'appuie sur ses connaissances anciennes et donc établit des analogies avec la tâche en cours, le problème à résoudre, formule des conjectures.

Le niveau M_{-1} est celui où l'élève effectue des calculs génériques, c'est-à-dire en étant conscient ou en prenant conscience de leur caractère générique. Il étaye les conjectures, les reformule et les appréhende quant au moyen à mettre en place afin de les justifier plus rigoureusement, plus conformément à la pratique mathématique officielle, c'est-à-dire dans une perspective de généralisation et de démonstration. Les arguments utilisés apparaissent « locaux », génériques, ils sont encore indiciels d'une propriété générale. Les calculs s'enrichissent pour prendre un caractère algorithmique (détection et application de règles de calcul spécifiques), les formulations se rapprochent d'une certaine conformité attendue.

Le niveau M_{-1} est aussi celui où la vérité apparaît de manière évidente. Il ne lui manque qu'une validation « officielle ». Nous verrons qu'en termes de convaincance, lorsque celle-ci est suffisamment forte, les preuves dites visuelles ne nécessitent pas forcément de preuve supplémentaire conventionnelle. Néanmoins, et nous le montrerons dans le cadre de nos séances expérimentales, le parallèle entre la preuve visuelle (avec sa généralisation schématique), et une preuve par induction classique[15] par exemple, ne peut être établi qu'au niveau M_0.

Le niveau M_0 est celui de l'institutionnalisation par l'enseignant (en règle générale), celui où les preuves vont être établies formellement et où la connaissance nouvelle sera rattachée au répertoire didactique de la classe avec la formulation recevable, c'est-à-dire conforme à la communauté de pratiques des mathématiciens.

Nos considérations à venir sur la cognition par les sens viendront s'ajouter aux divers moments d'une séance, moments que les considérations en termes de milieux découpent globalement car il y a des va-et-vient entre les niveaux de milieux, sur l'axe temporel de la phase ou de la situation adidactique.

En ce qui concerne la composante linguistique de notre problématique et relativement aux milieux sous-didactiques dont nous venons de parler, nous tenons à signaler que nous n'avons pas cherché à imposer un travail dans la L2 à tous les niveaux.

Chose essentielle : c'est, de manière générale, plutôt au niveau M_{-1} que les élèves préparent, anticipent leur formulation en L2 pour leur compte-rendu, l'exposé des résultats obtenus suite au travail en groupe, au cas où ils auraient établi et décrit leurs premières conjectures en L1. Certains élèves s'engagent plus vite que d'autres dans la L2, c'est-à-dire dès qu'ils perçoivent la généricité des résultats ; comme on le verra plus loin, les schémas initiaux également sont commentés, annotés en L2.

Lors de la séance sur la somme des cubes, nous aurions pu tenter de mettre en place un dispositif particulier pour contraindre les élèves à ne recourir qu'à la L2 (durant le travail en groupes) mais cela n'est pas si facile et aurait pu être contre-productif du point de vue de la situation mathématique (nous avons demandé l'avis de collègues de langue et ils nous ont

[15] Preuve algébrique *classique* en ce qui concerne nos séances expérimentales ; à prendre ici au sens de démonstration par récurrence.

confirmé le fait que ce point est très délicat)[16]. De toute manière, notre priorité était la production d'un schéma commenté en L2 mais surtout une description orale en L2 du passage à la généralisation[17], et cela après que le travail en groupes ait été effectué.

II.1.d. Action, formulation et validation

Au paragraphe II.3, nous examinerons en détail les notions de répertoires (répertoires d'action, de formulation, système organisateur). Néanmoins, nous souhaitons dès à présent insister sur la place essentielle qu'occupent action, formulation et validation dans les situations didactiques de manière générale mais surtout relativement à nos situations expérimentales. A cet égard, nous ne pouvons manquer de faire allusion au schéma de validation explicite au sens de la TSD.

Brousseau déclare ainsi (Brousseau, 1998) :

> Les relations d'un élève avec le milieu peuvent être classées en au moins trois grandes catégories :
>
> - les échanges de jugement [3],
> - les échanges d'informations codées dans un langage [2],
> - les échanges d'informations non codées ou sans langage : les actions et les décisions qui agissent directement sur l'autre protagoniste [1].
>
> [Brousseau] précise en note que « ces numéros renvoient tous au même type d'hypothèse : [1] Action, [2] Formulation, [3] Validation.

En ce qui concerne nos séances expérimentales, les actions vont être soit effectuées directement (et effectivement) dans la réalité sensible, soit idéalisées (recours éventuel à des images mentales), c'est-à-dire seulement évoquées ou imaginées mais elles sous-tendront également les manipulations syntaxiques (en l'occurrence algébriques) et les formulations descriptives associées.

Le rôle essentiel joué par la perception active va conditionner également les formulations destinées *à mettre en relation* des éléments significatifs attachés à des objets ou des actions originellement situés dans la réalité sensible avec ceux qui portent sur les objets idéalisés (ou imaginés) et les symboles algébriques sans oublier les éléments schématiques et les actions associées (extension effective, ou évoquée, au niveau schématique). Plusieurs formes de signifiance seront ainsi mobilisées : signifiance lexicale, signifiance représentationnelle (registres schématique, algébrique), signifiance expérientielle liée à la multimodalité.

Nos situations expérimentales ont des phases à caractère fortement adidactique. Comme nous l'avons déjà mentionné au paragraphe précédent, la validation orale en L2 dans ces phases n'a pas constitué un objectif. Ceci ne signifie pas que la dimension orale ait été reléguée au second plan, bien au contraire. La L2 a été utilisée oralement de manière effective lors de l'établissement des conjectures en phase interactive, lors de la présentation multimodale relative à la séance intitulée *somme des cubes* ainsi que lors de toutes les phases d'institutionnalisation. Au niveau de l'écrit, la L2 intervient systématiquement dans tous les documents, que ceux-ci aient été distribués aux élèves ou qu'ils aient fait l'objet d'une production effective par ces derniers (annotations, commentaires accompagnant les schémas de preuves visuelles).

[16] Nous reviendrons sur ce point lors des analyses des séquences expérimentales.
[17] Preuve multimodale, impliquant gestuelle et argumentation, en présence des cubes matériels.

La question de l'adéquation de la formulation avec les actions produites et les intentions de validation a été au cœur de nos préoccupations. Le thème des preuves visuelles et le défi d'en faire réaliser une par nos élèves ont donc donné lieu à des formulations très particulières. Elles s'inscrivent dans un rapport particulier à la réalité et ne peuvent être envisagées sans un examen des questions de sens, notamment du point de vue de la liaison syntaxique-sémantique et de la notion d'abstraction.
Nous mentionnons à cet égard un extrait de Dias (2009) :

> Dans ce cadre de recherche, recourir à la dimension expérimentale c'est permettre et surtout multiplier les allers et retours entre les objets (réels et formels, sensibles et théoriques) par des confrontations (adéquation, non adéquation), des vérifications (confirmer ou infirmer une hypothèse), des argumentations (prouver un raisonnement, convaincre dans un débat). Les va-et-vient se font entre les modèles (puisque l'on travaille avec des objets qui ne sont pas donnés mais construits dans le but de représenter) et des axiomes, afin d'articuler forme et contenu dans la perspective ouverte par Tarski d'une définition qui soit matériellement adéquate et formellement correcte. Nous précisons ici que la notion de « réalité » ou « d'adéquation matérielle » ne se limite pas aux objets matériels, mais comprend les objets mathématiques suffisamment familiers pour le sujet pour que les rétroactions du milieu, consécutives à ses actions, lui fournisse des informations fiables sur lesquelles s'appuyer pour émettre des conjectures et/ou s'engager dans un processus de preuve. (Dias, 2009, p.44)

Durand-Guerrier rappelle, en faisant référence dans ses propos à la description donnée par Brousseau du jeu de la preuve (Durand-Guerrier, 2005) que :

> Dans le schéma de la validation explicite (ou schéma de la preuve), l'émetteur devient un proposant et le récepteur devient un opposant ; on est en présence d'un enjeu de vérité et il s'agit de rattacher de façon sûre une connaissance à un champ de savoirs déjà établis. (Brousseau, Conférence de Montréal, p.8 ; in Durand-Guerrier, 2005, p 5)

Le concept de Gnomon, concept issu des mathématiques dans la Grèce Antique et sur lequel nous reviendrons plus loin (voir chapitre 6), va être un élément-charnière dans l'analyse puis l'élaboration des preuves visuelles. Sa détection et son emploi sont des éléments essentiels dans les processus de preuve qui ont été engagés par nos élèves. La validation en phase interactive n'a pas fait intervenir un caractère suffisamment antagoniste du milieu pour qu'il y ait eu par exemple nécessité de recourir à des contre-exemples, à mettre en place des stratégies innovantes. C'est essentiellement le rapport direct aux objets concrets, aux manipulations sur ceux-ci et aux rencontres précédentes avec le concept de Gnomon qui ont permis aux situations adidactiques d'amener les élèves à effectuer des raisonnements originaux et cohérents. Ce dernier point est important car il montre – nous reprenons les termes-mêmes de Brousseau (citation précédente) – qu'on ne peut se dispenser malgré tout de la nécessité *de rattacher de façon sûre une connaissance à un champ de savoirs déjà établis*.
La validation, en ce qui nous concerne, porte sur l'accord entre les participants de chacun des groupes à propos de la perception du caractère générique des schémas élaborés suite aux manipulations, mais aussi sur l'anticipation des formulations nécessitées pour décrire verbalement le passage à la généralisation (lors de la séance *somme des cubes*). Les élèves ont ainsi été conduits, lors de la dernière phase de l'activité, à discuter entre eux de la manière dont ils allaient pouvoir décrire ce passage à la généralisation.
Ainsi donc, c'est le fait de décrire de manière partagée ce que l'on voit et ce que l'on fait qui va garantir le succès du processus de validation. Pour nos séances, il s'agira en particulier de permettre aux élèves de s'entendre sur la formulation des conjectures en L2, sur l'adéquation

entre leurs actions sur le milieu matériel et la description verbale de ces actions. La délimitation d'une phraséologie adéquate, finement délimitée et formellement correcte, va donc faire l'objet d'un examen très particulier lors des analyses a priori de nos séances. Cette phraséologie (en L2) nécessitera de prendre en compte la manière dont on parle des objets concrets, de leur agencement mais aussi des objets schématiques et des manipulations syntaxiques. Les questions de référence, de postures énonciatives apparaissent comme essentielles lorsqu'on les rapporte aux processus de validation impliqués par nos séances. Il va de soi que nous allons devoir, dans un premier temps, les examiner de manière théorique (voir chapitres 2 et 3).

II.1.e. Milieux didactiques et processus interprétatifs

Nous distinguons dans ce paragraphe deux types de rapports aux milieux didactiques. D'un côté les milieux sont vus comme lieux d'actions effectives situées majoritairement dans la réalité sensible (extérieure au sujet), actions qui aboutissent à des productions sémiotiques langagières, formelles ou mixtes, d'un autre côté, nous envisageons les processus cognitifs à l'œuvre, ce qui nous conduira à dire qu'il y a parfois, sur le plan cognitif, perception et articulation de pseudo-signes garantissant une sorte d'expérience de la nécessité purement mentale, avec un caractère d'anticipation des productions sémiotiques attendues. L'élève saisit, comprend mais n'a pas encore véritablement répondu à la consigne, ou n'a pas encore réalisé la tâche concernée.
Nous nous proposons d'examiner maintenant les milieux du point de vue cognitif.

- Milieu M-3

Le milieu matériel n'est pas considéré comme inerte. Nous l'envisageons ici au niveau des premiers rapports que l'élève peut avoir avec lui et qui, déjà, se traduisent par l'élaboration de représentations initiales (niveau R1.1 du tableau de Bloch & Gibel, cf. Tableau 1.2) et de premiers questionnements, du fait même d'une interprétation initiale de la consigne.
La pensée est au niveau des percepts. Il y a mobilisation des capacités de perception : capacités à distinguer les objets entre eux, à percevoir des caractéristiques comme étant communes, à comparer ces objets selon des modalités perceptives (les objets sont comparés du point de vue de la taille, selon l'étendue, d'un point de vue physique et/ou temporel, etc…).
Du point de vue de ce qui se dessine, suite à une interprétation de la consigne et des mots ou signes qu'elle contient et à la pré-activation d'éléments représentationnels qu'elle induit, il y a sans doute déjà anticipation d'actions possibles.
Parfois, il revient à l'élève de nommer, en langage naturel ou à l'aide d'un symbole, un objet donné ou accessible par son signifié abstrait. Tant qu'il ne nomme pas l'objet et ne perçoit pas la nécessité de le nommer, l'élève est au niveau M-3.
Il y a émergence de questions formulées intérieurement ou de pistes d'investigation :

- si « n » est un nombre, qu'est-ce que je sais à son sujet ?
- si « n » correspond à un symbole algébrique, que puis-je en faire ? Des opérations syntaxiques (formelles) peuvent être simplement pressenties. Elles ne sont que potentielles.
- si « n » a un référent matériel ou idéalisé, quelles manipulations concrètes ou idéalisées puis-je effectuer au niveau des référents ?

Notons que l'on peut percevoir qu'un nombre est entier sans mobiliser aucune connaissance sur les entiers. On est encore dans le niveau M-3.

▪ milieu M-2

Les questions soulevées mentalement ou pressenties donnent lieu à une première série de réponses. Les premières actions qui se dessinaient mentalement s'actualisent.

L'élève met en correspondance des relations portant sur des percepts avec des signifiés abstraits, des sèmes (liés aux mots-concepts) ou des éléments sémantiques liés aux symboles mathématiques. Des notions abstraites mathématiques entrent alors dans le champ de la conscience. Les connaissances mathématiques attachées aux objets interviennent avec une première composante opératoire.

L'élève tente de se faire, ou commence à, élaborer une représentation globale des actions qu'il vient d'effectuer, de mettre en relation ses premiers résultats, de les réinterpréter au vue de la consigne initiale.

Le schéma global portant sur l'ensemble des actions que l'élève vient de réaliser ne s'articule pas encore parfaitement, ou pas encore conformément à la consigne.

▪ milieu M-1

Si l'élève parvient à percevoir (mentalement) que les choses vont pouvoir s'agencer complètement au niveau formel et/ou langagier, que les pseudo-signes (éléments de pensée tels que mots intériorisés, images mentales) s'articulent déjà, mais n'a pas encore actualisé ce processus cognitif par des signes conventionnels, nous considérons qu'il se trouve au niveau M-1. Lorsque c'est le cas, la généricité est perçue et elle est même totalement convaincante sur le plan cognitif. L'élève n'est plus dans l'incertitude et a en général déjà réalisé une objectivation des éléments perceptuels et de leurs relations. L'élève a sans doute perçu localement la légitimité de certaines inférences au niveau de la réalité sensible (perception de relations causales du point de vue matériel, physique ou temporel) ou en rapport avec les pseudo-signes mais n'a pas encore produit d'actualisation conventionnelle de son raisonnement (vu dans sa globalité).

▪ milieu M0

A ce niveau, toutes les inférences sont légitimées par un recours à la logique, la logique étant vue comme un principe résultant d'une détemporalisation des relations causales perçues dans la réalité sensible, à travers la répétition systématique de certains faits bien identifiés, principe qui est accompagné d'une convaincance indubitable et partagée. Ce recours à la logique permet de garantir une fiabilité du jugement porté sur l'ensemble des arguments et leur agencement. Le regard global porté sur les éléments de la preuve (s'il s'agit d'une preuve), est tel que tous ces éléments apparaissent comme bien articulés. Les inférences, dont la légitimité a été validée en M-1 isolément pour chacune d'entre elles, ont lieu à des endroits précis de la preuve en réponse à la problématique initiale.

▪ milieu M1

Grâce au retour réflexif initié par l'enseignant, des éléments de nature métacognitive sont susceptibles de faire monter l'élève dans des niveaux supérieurs. Ces retours sur la situation concernent par exemple :

– la prise de conscience des éléments qui sont perceptuels, la convaincance forte des éléments visuels,
– la légitimité des inférences et leur nature (sur quoi les élèves et/ou l'enseignant se sont appuyés et à quel moment),
– les moyens de contrôle du sens des actions avec recours à la logique mais aussi avec implication du sens référentiel (et donc des percepts également),

- les moments où les choses sont apparues clairement au niveau de la pensée et pour quelles raisons (en identifiant les moments où les élèves font l'expérience de la nécessité),
- les obstacles rencontrés (et anticipés par l'enseignant) et comment les élèves peuvent améliorer leur stratégies (cognitives) par la suite,
- les mises en correspondance au plan cognitif entre des relations portant sur des objets de la réalité sensible ou des objets idéalisés et des éléments objectivés,
- la mobilisation des connaissances attachées aux notions et l'articulation de certaines d'entre elles lorsqu'on les a rapportées à plusieurs reprises à la consigne générale, cette dernière fonctionnant à la fois comme déclencheur d'éléments représentationnels (à partir des mots-concepts qu'elle contient), comme ligne de mire (à travers son objectif explicite et les premières tâches qu'elle induit) et comme moyen de contrôle par son signifié global,
- la prise de conscience que l'on a effectué une narration syntaxique (formelle, langagière ou mixte) avec ses codes d'écriture et une certaine détemporalisation,
- la mise en relation avec des objets ou des raisonnements de même nature rencontrés auparavant.

II.1.f. Milieux didactiques et types de raisonnements

Ce que nous allons faire un peu plus loin, à savoir, décrire les types de raisonnements selon la catégorisation *induction*, *abduction*, *hypothético-déduction*, n'est pas la seule manière d'envisager les raisonnements en mathématiques.
Les raisonnements interviennent dans la démarche de résolution de situations-problèmes et impliquent des processus cognitifs spécifiques. Ainsi, on peut délimiter plusieurs moments :

1. Extraction d'informations à partir de l'énoncé et sur la base des connaissances disponibles ;
2. Réalisation d'inférences, production de nouvelles informations, de résultats, actions dans les divers milieux didactiques ;
3. Agencement de l'ensemble des résultats obtenus, depuis les hypothèses induites par l'énoncé jusqu'au résultat final. Cet agencement a déjà lieu sur le plan cognitif, lors des expériences de la nécessité relatives aux résultats établis localement, puis relativement à l'ensemble de tous les résultats en regard de l'objectif poursuivi. Mais l'agencement attendu concerne les codes syntaxiques : langagiers et formels. Il est mixte et doit donc être conforme à une communauté de pratiques[18].

Revenons maintenant à la classification *induction*, *abduction*, *déduction*.
Même s'ils concernent des moments essentiels de la plupart des activités mathématiques, ces types de raisonnements ne sont pas spécifiques de la pratique mathématique.
Nous distinguons ci-dessous chacun de ces types en les illustrant parfois par des exemples de la vie de tous les jours. Nous les considérerons ensuite relativement aux milieux.

1. Raisonnement abductif

Notons au passage que c'est Peirce lui-même qui, a le premier, mis en relief et explicité la nature spécifique et le rôle essentiel des raisonnements qualifiés d'abductifs.
Le principe est le suivant : on considère un fait que l'on cerne parfaitement. On souhaite l'établir à partir d'un autre fait avéré. Ce dernier apparaîtra comme la cause du premier.

[18] Notons que les formulations en L1 et en L2, envisagées du point de vue des pratiques respectives, pourront révéler, à cet endroit aussi, des différences d'ordre culturel.

Plus généralement, étant donné une proposition P1, on essaie de déterminer ce qui peut avoir conduit à cette proposition. On essaye donc de trouver une proposition P0 qui entraîne P1. La règle d'inférence permettant d'établir le passage de P0 à P1 devra être légitimée après coup. La démarche abductive réside donc dans la recherche d'une cause, et implicitement, dans la légitimation de la relation de cause à effet. Elle procède d'une tentative de réponse à la question : *à quoi est-ce dû ?*
Un exemple : une table située à l'extérieur d'une habitation est mouillée. C'est peut-être dû au fait qu'il a plu. Une autre cause serait que le voisin a arrosé la table en même temps que son jardin. Quelqu'un (ou le vent) a peut-être renversé un vase. Je vais regarder à proximité pour savoir si le sol est mouillé, s'il n'y a pas un vase renversé, etc…

2. Raisonnement inductif

L'induction consiste à partir de cas particuliers ou singuliers pour établir un fait général. On donne le nom de preuve par induction (proof by induction, en anglais), lorsque l'induction est du type démonstration par récurrence. L'induction, comme nous le verrons dans la partie expérimentale, peut être réalisée sur le seul plan cognitif, indépendamment d'une formalisation mathématique, et porter sur des pseudo-signes (éléments de pensée, images mentales) dans une situation contextualisée impliquant un rapport au phénoménologique. Elle consiste à se former des représentations générales mentales à partir de faits particuliers et ces faits peuvent concerner des schémas plutôt que des symboles algébriques.
On aura l'occasion de revenir sur ce type de raisonnement à propos des situations expérimentales dont le thème retenu est celui des preuves visuelles. Les raisonnements inductifs y tiendront une place essentielle, que ceux-ci portent sur des pseudo-signes produits lors des manipulations concrètes ou sur les schémas et leur conceptualisation ou encore sur des symboles algébriques associés à la preuve algébrique correspondante (démonstration par récurrence proprement dite).

3. Raisonnement déductif

La déduction est un raisonnement qui s'appuie sur des connaissances existantes vues comme générales et orienté de manière à produire des contenus, des résultats particuliers.
Des faits bien établis, reconnus comme tels, des règles générales permettent de prédire ce qui peut arriver et la vérification est souvent possible par l'observation prévisible des résultats.
La déduction a lieu lorsqu'on cherche à répondre à la question : *quelle en est la conséquence* ? Elle est associée implicitement à la question : *quelle est la règle qui me permet d'en tirer cette conséquence* ?
Notons enfin que la démarche hypothético-déductive alterne abductions (émettre des hypothèses, c'est-à-dire des conjectures) et déductions (telle règle me permet de dire que, sous cette hypothèse, entendue comme condition suffisante, j'ai le droit d'affirmer que…).

Dans le passage qui suit, nous examinons le lien qu'entretiennent, sur la base de ce qui est fréquemment observé, les divers types de raisonnements et les milieux didactiques.
Dans le milieu heuristique, les inductions et les abductions jouent un rôle prépondérant.
On extrait des informations, à partir des mots et symboles figurant dans la consigne (démarche plutôt déductive). On considère le résultat que l'on cherche à obtenir et on tente de lui trouver des éléments situés en amont, en formulant des conjectures, éléments qui puissent permettre d'établir un lien causal vers le résultat (abduction). C'est souvent ce que l'on fait lorsqu'on part d'un résultat à établir et que l'on n'entrevoit pas d'inférences directes allant des hypothèses à la conclusion.

La démarche abductive est d'ailleurs caractéristique de nombreuses phases de recherche.
Nombre de ces dernières, cependant, reposent à la fois sur des inductions et des abductions : inductions (souvent plusieurs, successivement) à partir de faits donnés ou appréhendés, dans le but d'établir un lien avec un autre fait, et abductions relativement à un fait vers lequel on veut aboutir par inférences (souvent successives).
Lorsqu'on formule, propose, des conjectures, il s'agit là aussi de raisonnements abductifs. Ceux-ci s'appuient sur les percepts et leurs contenus, sur les connaissances des objets mais sans qu'une règle d'inférence jugée valide n'apparaisse comme disponible au départ. Le passage à la généralisation apparaît comme possible, convaincant sur le plan cognitif. Il s'accompagne très vraisemblablement d'une expérience de la nécessité mais n'est pas encore légitimé.
Dans le milieu de référence et de validation, les règles d'inférence sont disponibles, les raisonnements sont majoritairement hypothético-déductifs et les propositions ou résultats commencent à s'enchaîner en formant des îlots déductifs[19].
Les réinterprétations successives conduisent ensuite à un agencement d'ensemble perçu comme total et conforme selon une appréhension synthétique. Cette conformité est relative à la logique lorsque les inférences reposent sur des connaissances antérieures et sont toutes légitimées. Elle s'appuie sur une nécessité davantage phénoménologique, en rapport avec les référents si la situation est contextualisée. Dans l'un et l'autre de ces deux cas, l'élève est presque dans le niveau M0. Il le sera véritablement si la narration qu'il propose est conforme aux codes de la pratique mathématique.
Sinon, on peut considérer qu'il se situe au niveau M-1.

II.2. Adaptation au contexte CLIL de l'outillage théorique de la TSD

II.2.a. La TSD en contexte CLIL : vers un modèle adapté

Très rapidement, il nous est apparu que la plupart des concepts issus de la TSD pouvaient se révéler tout aussi pertinents, tout aussi opératoires dans le cadre d'un enseignement des mathématiques de type CLIL. Il est évident que la prise en compte de la concomitance d'un travail focalisé sur la L2 et sur la pratique d'une discipline dite non linguistique (DdNL) ne pouvait que nous conduire à cerner aux mieux les concepts. Nous avons cherché à ne pas les dénaturer, à préserver en quelque sorte leur substance tout en décrivant leurs facettes lorsqu'on les éclaire différemment, c'est-à-dire à la lumière des questions de nature linguistique.
Si l'on se réfère aux tendances récentes en didactiques des langues cultures (Puren, 2009), ou en ce qui concerne plus spécifiquement l'enseignement de type CLIL, il ressort que la focalisation sur l'action (perspective actionnelle / task-based pedagogy) est tout à fait compatible avec le rôle central que la TSD attribue aux actions que les élèves doivent être amenés à réaliser lors de situation fortement adidactiques et que d'ailleurs l'enseignant doit chercher à anticiper par une analyse minutieuse des variables didactiques (voir aussi Narcy-Combes et Walski, 2004).
La valorisation du travail collaboratif dans le cadre de la TSD est, elle aussi, conforme à cette tendance.

[19] Expression que nous empruntons à Denis Tanguay.

Néanmoins ce sont les spécificités d'un enseignement de type CLIL qui vont nous amener à non pas redéfinir mais certainement préciser dans ce contexte certaines caractéristiques, lorsque ce sera nécessaire, des concepts-clés de la TSD. Nous veillerons, ce faisant, à leur conserver leur caractère opératoire à la fois du point de vue théorique mais aussi en les mettant à l'œuvre lors des expérimentations[20].

II.2.b. Quelques spécificités liées au contexte CLIL

Afin de nous permettre de délimiter convenablement, dans une perspective d'enseignement CLIL, les différents concepts-clés de la TSD, nous avons dû relever et prendre en charge certaines spécificités.
Les formulations en L1 et en L2, relatives à une tâche spécifiquement mathématique, ne sont pas toujours superposables, ne sont pas traduisibles mots à mots d'une langue à l'autre, ce qui ne manquera pas d'affecter la notion de répertoire de formulation.
Les pratiques mathématiques en France et dans les pays anglo-saxons diffèrent, les curricula eux-mêmes ne sont pas identiques. Un choix a dû être effectué en matière de notation symbolique, en accord avec l'institution et après discussion avec les autres enseignants en section européenne de l'académie.
Au niveau de la conduite d'une classe, les rapports existant entre les contenus et les activités mathématiques d'une part et le langage d'autre part, que ce soit en L1 ou en L2, passent obligatoirement aussi par une utilisation de *la langue de tous les jours* et pas simplement par une langue spécialisée propre à la discipline mathématique. Nous avons à cet égard décidé de prendre en compte le répertoire linguistique dans toutes ses dimensions, sans le restreindre aux formulations spécifiques aux mathématiques.
Par ailleurs, le lexique relatif au champ conceptuel, à l'abstraction, est, d'une manière générale, rarement maîtrisé dans la L2 et se révèle également insuffisant en L1. Le retour réflexif des élèves sur leur activité, dans le cadre d'une situation particulière, doit pouvoir s'effectuer dans la L2 et présuppose donc l'élaboration d'un répertoire de formulation particulier, intégrant des formulations relevant du champ lexical cognitif, voire métacognitif.
En ce qui concerne notre cadre d'expérimentation, à savoir celui de classes européennes en lycée, le volume horaire limité et les contraintes institutionnelles (modalités de l'examen final) nous ont conduit à donner une orientation particulière quant à la progression et aux contenus d'enseignement de ces classes. La latitude dont nous disposions pour nos expérimentations nous a conduit à mettre en place des situations singulières mais non fondamentales (au sens de Brousseau). Les élèves de sections européennes de notre établissement, dès la Première, sont regroupés uniquement lors des cours d'enseignement européen mais suivent les cours de mathématiques dans des classes distinctes. Le contenu d'enseignement européen ne pouvait donc pas inclure l'introduction de nouvelles notions puisque ceci est déjà prévu dans le cadre de leur enseignement non européen. Notre travail d'expérimentation a donc consisté à mettre l'accent sur des situations originales, si possible à fort potentiel d'adidacticité, permettant de faire émerger des connaissances nouvelles relativement à des savoirs déjà institutionnalisés, l'institutionnalisation ayant été effectuée le plus souvent par les autres enseignants de mathématiques du lycée. L'une des difficultés a été, entre autres, de concilier notre volonté de faire preuve d'originalité dans le choix des thèmes, et par suite relativement à la nature des nouvelles connaissances visées, avec les contraintes

[20] C'est-à-dire « par confrontation à la contingence» (Bloch 2005), d'après Brousseau.

linguistiques telles que la nécessité d'étendre le répertoire linguistique des élèves dans des registres peu familiers, voire très spécifiques (descriptions spatio-visuelles, par exemple). Nous avons également dû faire face à d'autres difficultés lorsque notre volonté de réactiver les tournures, les expressions rencontrées antérieurement, se heurtait aux limites du volume horaire imparti.

II.2.c. Situation didactique et première problématique d'intégration

Le but d'une situation didactique est de permettre à l'élève de construire de nouveaux savoirs. C'est par le biais d'une ingénierie particulière, reposant sur une analyse a priori minutieuse, que la situation va induire de nouvelles connaissances − connaissances dites locales − chez les élèves. L'ingénierie doit construire des situations permettant aux élèves de s'engager dans des démarches d'action et de validation.
Brousseau propose la définition suivante pour le concept de situation didactique :

> Les conditions d'une des utilisations particulières d'une connaissance mathématique sont considérées comme formant un système appelé « situation ».
>
> […] Une situation est caractérisée dans une institution par un ensemble de relations et de rôles réciproques d'un ou de plusieurs sujet (élève, professeur, etc.) avec un milieu, visant la transformation de ce milieu selon un projet.

L'analyse qui précède la réalisation effective de la situation doit, en contexte CLIL, anticiper les difficultés éventuelles d'ordre linguistique qui pourraient survenir et donc prévoir la mise en place d'un dispositif particulier prenant en compte cette spécificité.
Une situation didactique qui sera dite véritablement intégrée (voir III ci-après) n'est possible que si l'enseignant parvient à articuler l'apprentissage d'une phraséologie correcte avec l'acquisition d'un savoir mathématique ciblé.
L'institutionnalisation portera sur les savoirs mathématiques et sur leur formulation en L2.
Le choix des situations à forte potentialité adidactique permettra l'établissement d'un lien entre le vocabulaire courant, davantage pratique, rencontré à l'occasion des phases adidactiques et dès le milieu M_{-2}, au travers de formulations provisoires et/ou évolutives, et d'autre part le vocabulaire expert propres aux mathématiques.
Cependant, l'institutionnalisation ne se réduit pas à un moment final, à une synthèse mais se subdivise en autant de moments où l'enseignant peut déjà apporter des informations institutionnelles et en particulier introduire de nouveaux termes (cf. Brousseau, 1988).
Ainsi, le répertoire de formulation en L2 devra être finement délimité pour que la complexité cognitive, associée aux actions que la situation et l'activation de connaissances anciennes vont générer, ne soit pas alourdie par des facteurs d'ordre langagier (consignes en L2 pas assez claires, types d'actions qui n'auraient jamais auparavant été accompagnées d'une verbalisation en L2, termes et expressions du champ lexical du mot *conjecture* (pour ne prendre qu'un exemple) non maîtrisés …).
Du point de vue langagier, les formulations intermédiaires produites lors des diverses phases (phases d'action, heuristique ou de validation) devront, lors de la phase d'institutionnalisation des savoirs visés, être reformulées par l'enseignant dans une langue (la L2) dont on attend qu'elle soit authentique (du point de vue de la communauté de discours mathématique anglo-saxonne). Le répertoire de formulation en L2 peut – et doit souvent – être étendu, y compris à l'occasion de phases adidactiques (il suffit d'adjoindre aux consignes quelques définitions et expressions en L2 nécessaires au bon fonctionnement de la situation).

En ce qui concerne les phases adidactiques, la particularité du contexte nécessitera parfois une évaluation a priori précise du répertoire linguistique associé (on prévoira à cet effet, dans les séances en amont, des incursions dans le champ de la physique, de la biologie …) ; et la réalisation effective de la situation devra être précédée d'un travail linguistique sur le lexique spécifique de ces domaines (champ lexical des forces, de la génétique, etc...).
Nous reviendrons plus loin sur la place de la situation didactique *intégrée* dans le cadre du schéma plus général de structuration des milieux, ces derniers étant à prendre également au sens de milieux didactiques *intégrés*, sens qu'il nous faudra préciser.

II.2.d. Le répertoire didactique de la classe

Gibel en propose la définition suivante :

> L'ensemble des moyens que le professeur pense pouvoir attendre des élèves, par suite de son enseignement, constitue ce que nous appellerons le répertoire didactique de la classe. Par conséquent l'enseignant identifie un répertoire qu'il juge légitime d'utiliser dans la relation didactique compte tenu des institutionnalisations antérieures, afin de produire la solution ou la réponse attendue. (Gibel, 2004)

Le répertoire didactique résulte donc d'une estimation par le professeur de l'ensemble des ressources cognitives (c'est implicite dans la définition) dont les élèves disposent, suite à son enseignement ou en tant que connaissances antérieures préalablement diagnostiquées, et qu'ils devraient pouvoir mobiliser afin d'effectuer des tâches parfaitement identifiées et principalement associées à la résolution de problèmes. C'est donc dans la notion-même de répertoire didactique, et suite à la délimitation fine qu'elle présuppose, qu'une analyse a priori pourra, entre autres, être légitimée. Comme on le verra par la suite dans nos situations expérimentales et comme nous l'avons déjà mentionné à propos des niveaux de milieux (Bloch et Gibel, 2011), l'analyse a priori d'une situation prend en compte une anticipation des signes susceptibles d'être produits et des fonctions et types de raisonnements. C'est donc aussi au répertoire didactique qu'il conviendra de rapporter ces derniers.
Dans le cas d'une situation adidactique, le répertoire-L2 des élèves devra être soigneusement évalué afin que la dévolution puisse avoir lieu. Les contenus relatifs à des connaissances mathématiques, explicitables par des mots et/ou des symboles, reposent en effet sur des énoncés qui ne sont pas figés, si ce n'est pour leur partie formelle (c'est-à-dire symbolique). La possibilité de reformulation, condition indispensable pour une adaptation à des nouveaux contextes mais aussi moyen de cerner le sens ou d'apporter des précisions ou des éclairages, ne serait-ce qu'en matière de signification lexicale, nécessitera une élaboration suffisamment riche du répertoire de formulation (voir II.3.d.) ; sur la base d'une phraséologie adéquate : proposition de mots et expressions synonymes ; description des nuances, insistance sur la prise en considération des connotations, en situation de traduction par exemple, etc…
En contexte CLIL, le professeur devra tenir compte également des travaux focalisés sur la langue L2. Afin de garantir le bon fonctionnement d'une nouvelle situation, il ne devra pas oublier les micro-tâches linguistiques spécifiques qu'il aura fait effectuer et dont le contenu se révèlerait susceptible de devoir être réactivé.
Dans la perspective d'élaboration d'une situation ou d'une séquence comprenant plusieurs situations ou phases adidactiques, la détermination de conditions optimales nécessitera une évaluation précise du sous-répertoire didactique relatif à la situation (et des sous-répertoires associés : répertoires d'action, de formulation et cognitif).

Ainsi, par exemple, si la situation envisagée en contexte CLIL-Mathématiques, par ses spécificités d'ordre linguistique, requiert l'appropriation par les élèves d'un *nouveau* micro-lexique, celui-ci ne pourra être que limité, voire très limité. Les informations fournies en début de séance (et ce type de lexique distribué ponctuellement en fait partie) ne doivent pas diriger les élèves vers autre chose que la tâche à accomplir. Inversement, l'utilisation d'un nouveau vocabulaire à l'occasion d'une situation « orientée-tâche », sous réserve qu'il soit limité et en rapport direct avec les actions à accomplir, ou avec les contenus mathématiques mobilisés, pourra favoriser une appropriation ultérieure effective par l'élève de ces éléments linguistiques et culturels. Notons que les phases d'institutionnalisation, les retours réflexifs que l'enseignant peut par la suite induire quant à l'expérience situationnelle vécue par les élèves, les narrations de recherches, sont des occasions de réinvestissement de ces mêmes notions linguistiques et culturelles. L'élaboration d'une carte mentale (ou notionnelle) apparaît aussi comme l'opportunité d'une nouvelle rencontre avec ces éléments. Il nous semble que ce moment (une fois que les savoirs mathématiques nouveaux ont été institutionnalisés) est le plus propice à intégrer des éléments langagiers et culturels (en L2) de la vie de tous les jours (everyday life language) se rapportant à ceux déjà rencontrés. Ainsi, par exemple, une expression, une tournure, incluant un terme ayant un sens mathématique donné, pourra être contrastée avec des utilisations de ce même terme se rapportant à un autre champ que celui des mathématiques.

II.2.e. Répertoire d'action

Le répertoire d'action (Gibel, 2004) fait référence aux actions diverses que les élèves sont censées pouvoir effectuer lors d'une phase adidactique d'une situation, compte tenu des expériences et institutionnalisations antérieures. Il peut aussi se rapporter à la situation en cours et on sous-entendra alors répertoire d'actions effectivement réalisées lors de la situation.
Les actions sont envisagées d'un point de vue didactique. Elles peuvent consister en des actions directes sur le milieu objectif (utilisation de matériel spécifique à la situation, de ressources TICE, écriture au tableau...), elles peuvent être de nature procédurale et concerner un calcul numérique ou algébrique par exemple. L'élaboration et la mise en œuvre de micro-stratégies relèvent également de ce répertoire.
Voici quelques exemples d'actions significatives que l'on peut relever : utilisation d'un algorithme usuel, traitement graphique ou algébrique d'un problème, actions destinées à éprouver la validité des méthodes choisies, présentation des résultats obtenus par telle ou telle méthode, etc...
Par ailleurs, toute action est susceptible d'être accompagnée d'une formulation descriptive, d'une verbalisation. Les répertoires d'action et de formulation ne sont donc pas dissociés. En contexte CLIL, la capacité à décrire dans la L2 une action en cours ou une action envisagée est essentielle.
Ainsi, lors d'une narration de recherche et à l'occasion d'un travail collaboratif, les élèves sont amenés à décrire dans la L2, les étapes qui ont jalonné leur recherche pendant la situation. L'enseignant doit donc veiller à permettre aux élèves d'identifier, en les nommant, les types d'actions qu'il juge pertinent d'associer au répertoire de formulation de la classe.
En amont d'une situation, l'établissement d'un répertoire de formulation (en L2) spécifique aux actions susceptibles d'être réalisées au cours de celle-ci est nécessaire. Il doit donc être anticipé par l'enseignant suffisamment à l'avance, pour en permettre une consolidation et

éviter ainsi de trop nombreux recours à la L1 (alternance codique) qui ne manqueraient pas de se produire. La maîtrise de ce répertoire en L2 garantira la bonne réalisation d'un retour réflexif des élèves sur l'expérience vécue au travers de la situation sans avoir à passer nécessairement par la L1.

II.2.f. Le répertoire de formulation et le répertoire linguistique

Le répertoire de formulation contient un registre de formules (au sens d'énoncés) et un système organisateur de ces dernières (voir Gibel, 2004). Les formules répertoriées peuvent être formelles, et nécessitent que les élèves s'approprient les règles d'énonciation en L2 (x^2 se lit « x squared » en anglais, « x im Quadrat » en allemand, etc...).
Dans la pratique mathématique, les formules reposant sur des écritures formelles sont presque toujours accompagnées de phrases d'introduction, de phrases descriptives, de mise en relation verbalisée dans la langue naturelle.
C'est le cas dans l'énoncé : « *l'identité remarquable* $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ *est appelée différence de deux carrés, en référence au membre de gauche de l'égalité proprement dite »*. Elles sont alors reliées à un énoncé non formel qui en spécifie le contenu en passant par la langue naturelle (énoncé du théorème de Pythagore par exemple), mais avec l'utilisation d'un registre spécifique (terminologie mathématique).
Dans la pratique mathématique, très souvent, les formules, surtout lorsqu'elles sont oralisées, sont *mixtes* et contiennent à la fois des expressions formelles et des expressions de la langue naturelle, que ce soit en L2 ou en L1. Néanmoins, il faut garder à l'esprit que l'élève dispose en général d'un registre de formules déjà établies en L1 et qu'il ne coïncide pas avec celui de la L2. Dans une perspective d'apprentissage de la L2, le registre de formules en L2 doit être contrasté avec celui qui lui correspond en L1, par la juxtaposition d'une traduction lorsque cela s'avère nécessaire. Cela peut parfois être l'occasion de révéler des particularités linguistiques ou d'éléments culturels. Ainsi, dans le cas de l'énoncé en anglais du théorème de Pythagore, on peut, lorsque ce dernier a été relié à une preuve visuelle par exemple, ou associé à une illustration géométrique, faire observer par les élèves la présence, dans les textes de la littérature mathématique, d'expressions telles que « the square *on* the side » (la préposition [*on*] renvoyant à l'idée de carré construit *sur* le côté[21]).
Le répertoire de formulation est à considérer de manière conceptuelle comme l'ensemble de toutes les formules disponibles à un moment donné, qu'elles soient formelles, mixtes ou exprimées en langue naturelle (L1 et/ou L2) et dans une perspective didactique spécifique, à savoir celle de la TSD. Autrement dit, on l'appréhende dans ce cas conjointement avec les modalités d'action, de validation ou d'institutionnalisation.
Dans la pratique, au niveau des activités ou des séances de mathématiques en secondaire, les élèves s'expriment très souvent de manière approximative, lorsqu'ils abordent une nouvelle notion par exemple, ou lorsque la charge cognitive de l'activité est trop lourde. Ils passent donc par des formulations qui sont certes intermédiaires *mais qui sont recevables* par l'enseignant lorsque leur contenu est « cognitivement cohérent » relativement au traitement mathématique du problème.
D'un point de vue didactique, relativement à la TSD et essentiellement à des fins d'analyse, ces formules « intermédiaires » pourront être considérées comme faisant partie du répertoire de formulation mais dans ce cas, il ne s'agira pas de formulations institutionnalisées et on

[21] Ce qui est à mettre en relation avec les illustrations classiques accompagnant la démonstration du théorème.

parlera alors plutôt de *répertoire des formules utilisées* dans le cas d'une analyse à posteriori. Ce sont donc des formules utilisées lors de la séance ou de l'activité, éventuellement approximatives (relativement à leur objet) cohérentes ou non (au sens cognitif) et correctes ou non (syntaxiquement). On pourra parler aussi, dans le cas d'une analyse a priori, dans un esprit d'anticipation des interactions, de *répertoire de formules disponibles* (en y incluant des formules approximatives, relativement à leur objet, mais cohérentes du point de vue du sens et syntaxiquement correctes). A ce propos, nous insistons sur le fait que l'enseignant fait en sorte que ces élèves puissent progressivement entrer dans une communauté de discours mathématique *institutionnel*, *de référence*, c'est-à-dire reconnu comme valide par la communauté des mathématiciens ou en tout cas par l'ensemble (ou la majorité) des enseignants de mathématiques. Cette communauté de discours renvoie à la représentation *idéale* que chacun peut se faire d'un tel discours. Nous discutons ailleurs de la notion de communauté de discours. Au niveau d'une classe de secondaire, l'élève fait encore partie d'une communauté de discours scolaire, communauté pour laquelle des formulations *imparfaites*, ou *non authentiques* dans le cas d'un enseignement en L2, sont, tout au moins à un certain stade de la progression adoptée par l'enseignant, tout à fait *acceptables*, *recevables* même si ce dernier souhaite qu'elles ne restent que *provisoires*.
Très souvent, lorsque l'élève est amené à produire une argumentation de complexité cognitive relativement élevée, le niveau de langue de son discours régresse provisoirement. Le niveau d'*interlangue* (global) d'un élève subit des fluctuations compte tenu des tâches à accomplir.
Dans le cadre usuel d'application de la TSD, la focalisation s'effectue sur les savoirs mathématiques visés, les raisonnements à l'œuvre ainsi que sur les milieux à élaborer pour recontextualiser ces savoirs et les faire opérer de telle manière qu'ils permettent certes l'émergence de nouvelles connaissances, mais toujours de nature essentiellement mathématique.
Dans une perspective CLIL, il nous semble essentiel de conserver la notion de répertoire linguistique avec le sens que les linguistes lui attribuent. Il s'agit alors d'un double répertoire, car il se subdivise en un répertoire relatif à la L2 et un autre répertoire, relatif à la L1. Ce dernier étant généralement plus vaste, en tout cas non symétrique lorsqu'on se réfère à un individu particulier ou même à une classe.
Côté enseignant, la représentation qu'il se fait de ces répertoires est subjective ; côté élève, ces répertoires idéaux différeront de toute façon selon les individus. On pourra légitimement dire par exemple qu'une expression donnée « est censée » faire partie (ou « peut être considérée comme faisant partie ») du répertoire de formulation de la classe (ou plus spécifiquement du répertoire linguistique si l'expression est considérée d'un point de vue strictement linguistique et non pas relativement à une problématique particulière liée à la didactique des mathématiques).
D'un point de vue linguistique, la légitimité toute relative d'une telle affirmation sera fonction de la façon dont l'expression[22] a été introduite ou du contexte dans lequel elle a été rencontrée mais surtout des réactivations ultérieures dans de nouveaux contextes.
Relativement à la TSD, et surtout dans le cas des expressions formelles (ou semi-formelles), l'affirmation selon laquelle une telle expression fait partie du répertoire de formulation de la classe pourra apparaître légitime si cette dernière a été utilisée lors d'une phase d'institutionnalisation et relativement à un savoir spécifique.

[22] Usuelle, figée, idiomatique… (à prendre en un sens très étendu en tout cas).

Néanmoins, le répertoire de formulation peut prendre davantage de consistance, s'appréhender de manière plus objective lorsqu'il se manifeste (partiellement) au travers d'un lexique phraséologique (incluant expressions formelles ou semi-formelles). Il peut très bien s'agir là d'un lexique limité et élaboré spécifiquement pour la classe. Il s'agit alors de répertorier par exemple l'ensemble des tournures rencontrées (jugées utiles) et relevées par l'enseignant au cours des séances antérieures et qu'il peut éventuellement compléter lorsqu'il le juge nécessaire. Il nous semble pertinent, à cet égard, de prendre en considération, c'est-à-dire d'intégrer au répertoire actualisé de formulation, les collocations, les expressions figées de la L2 (que celles-ci soient spécifiques de la pratique mathématique ou relèvent plutôt de la langue de tous les jours). Leur maîtrise doit être un objectif car elle garantit auprès des apprenants une plus grande fluidité dans la L2 et rend leur discours plus conforme (aux normes), plus authentique.
A ce stade de notre analyse, nous n'avons toujours rien mentionné quant à l'organisation d'un répertoire de formulation (au sens de formulation officielle, institutionnalisée, recevable par la communauté de discours correspondante) qui prendrait en compte de manière effective, c'est-à-dire en s'actualisant partiellement à travers un lexique par exemple[23], les formules qui relèvent plutôt des mathématiques ainsi que celles qui seraient essentiellement de nature linguistique (et donc non formelles). Ce point fait l'objet d'un prolongement au chapitre 8 (III).
Dans le paragraphe suivant, nous nous proposons de définir un *système organisateur* inspiré de la notion introduite par Gibel dans le cadre de la TSD, qui aurait pour fonction d'intégrer et organiser les formulations relevant spécifiquement du domaine de l'activité mathématique mais aussi celles (non formelles) appréhendées d'un point de vue purement linguistique et réutilisables hors du domaine mathématique, voire hors du champ d'application des mathématiques. Celles-ci sont utilisées en physique, en économie… Mentionnons à cet égard que les instructions officielles concernant l'enseignement des mathématiques en Secondaire préconisent aujourd'hui la mise en place d'activités portant sur la résolution de problèmes issus d'autres champs disciplinaires.

II.2.g. Système organisateur du répertoire de formulation

Pour une définition déjà aboutie du concept de système organisateur dans la TSD, nous renvoyons le lecteur à l'article de Gibel (2004). Pour notre part, nous nous autorisons à conserver cette appellation pour un concept adapté afin d'intégrer la composante linguistique. Lors d'une phase d'institutionnalisation (phase décontextualisée), un savoir qui était jusque-là visé dans une situation – problème (contextualisée) devient institutionnalisé, il entre dans le répertoire didactique de la classe. Dans une nouvelle situation, différemment contextualisée, le savoir va fonctionner de manière à induire, générer de nouvelles connaissances étroitement associées au nouveau contexte. A titre d'exemple, nous partons de la notion de dérivée et du savoir particulier (que nous considérerons comme institué) consistant à calculer une dérivée pour déterminer le sens de variation d'une fonction ainsi que ses extrema éventuels. Lors d'une situation-problème, l'élève peut avoir à résoudre une question d'optimisation et à travers cela, prendre conscience du traitement de ce type de problèmes à l'aide de la notion de dérivée. Le savoir qui consiste (se limite) à voir dans la dérivée un moyen d'étudier les variations d'une fonction (de manière générale), peut, par le biais d'une situation didactique

[23] Mais ce n'est pas la seule possibilité, comme nous le verrons ci-après.

contextualisée et avec un retour réflexif sur la situation, induire une nouvelle connaissance, à savoir que la dérivation est un outil essentiel dans la résolution de problèmes d'optimisation. Le système organisateur prend en charge la génération de nouvelles connaissances et la réorganisation nécessaire du répertoire de formules ou tout au moins du répertoire didactique.
Un énoncé est à la fois dans un registre et activable par un système organisateur ; par conséquent l'enseignant peut considérer qu'il lui est légitime de s'appuyer sur ce dernier pour la suite.
Nous revenons un instant sur les autres concepts. Selon Bloch (2000), le professeur a plusieurs rôles dans le milieu objectif (d'une situation adidactique) :

> – engager la dévolution ;
> – observer le fonctionnement convenable de la situation de référence, les procédures des élèves, ses erreurs, le fonctionnement de la classe (échanges dans les groupes et entre groupes, formulations, oppositions...) ;
> – reconnaître les connaissances des élèves, et en tout premier lieu s'assurer que ceux-ci ont bien à leur disposition les connaissances nécessaires pour s'engager dans le jeu proposé ;
> – préparer l'étape suivante de la situation, de façon à ce que le jeu des élèves s'avère possible dans la phase de formulation et de validation. (Bloch, 2000, p. 163).

Les tâches du professeur dans le milieu de référence sont celles que Margolinas (1997) a définies :

> – choisir les éléments du milieu à mettre en évidence, voire fournir des compléments au milieu, si nécessaire : sous forme de questions, d'exemples... ;
> – anticiper les conséquences des actions des élèves, des questions qu'ils proposent au débat, des compléments fournis ;
> – décider de poursuivre ou d'abréger les recherches des élèves, les débats, les formulations sur tel ou tel point... (Margolinas 1997, in Voisin 2013).

Une connaissance est parfois un type de connaissance et son objet d'application un type d'objet. Nous considérons qu'il est nécessaire de montrer que l'ajustement peut venir de la nécessité de faire évoluer la connaissance vers un autre type d'objet mais peut aussi venir de l'extension de la connaissance à un champ plus vaste *suite à des considérations sémantiques et analytiques sur l'objet propre*, considéré au sein de la situation spécifique et nouvelle.
Toute la question est de savoir comment on évalue les connaissances :

- soit à la fois en termes situationnels, au travers des interactions, des décisions, des conjectures ; et en effectuant une analyse épistémologique ; mais qui placera l'analyse des connaissances sur un plan avantage orienté vers le savoir savant ;
- ou d'un point de vue cette-fois sémantique, en prenant en compte les processus interprétatifs individuels des élèves, les processus raisonnés, les questions de signification lexicale ; en tenant compte de la distance entre les conceptions des élèves et celle de l'enseignant quant au contenu épistémologique de la situation et quant à la nature des objets mathématiques convoqués.

Une connaissance n'est reconnue comme telle, c'est-à-dire véritablement et indubitablement attribuée à un élève que lorsqu'elle est mobilisée en situation d'apprentissage. Sinon elle n'est que potentielle voire simplement attribuable. Une analyse a priori doit expliciter ce que le milieu va permettre comme rétroactions en tant qu'il fournit l'occasion d'une série de *réinterprétations* des actions et des résultats ou conséquences des raisonnements antérieurs au fur et à mesure de l'avancée dans la situation et suivant la mobilisation de telles ou telles connaissances *que les processus interprétatifs ou analytiques* font émerger chez l'élève. L'analyse épistémologique prévue dans l'analyse a priori (au sens de la TSD) contribue à l'analyse et à la catégorisation de tous les processus raisonnés susceptibles de se produire dans les moments cruciaux (changement de milieux en termes situationnels), et permet l'analyse de l'évolution d'une conception d'un objet à travers ses modifications *explicites* le long de la situation.

La *gestion anticipée des questions de signification*, ne serait-ce que lorsqu'elles sont simplement liées à la formulation, et y compris à la reformulation (qui peut très bien ne pas être efficace ou atteindre l'effet escompté), sera pour nous essentielle tandis que l'analyse des structures ou des formes de raisonnement, qu'ils soient individuels ou collectifs, sera susceptible de contribuer aussi au bon fonctionnement des situations.

Dans leur modèle d'analyse des raisonnements, Bloch et Gibel déclarent ainsi :

> Par ailleurs, l'analyse de la situation donne bien à voir le système organisateur qui percole d'ailleurs dans les groupes : en effet, les élèves utilisent manifestement des connaissances antérieures (formules de la somme de n termes d'une suite géométrique, conception des décimaux et de la suite des décimales, idée de ce que peut être une fonction de variable n, transposition des raisonnements établis pour (P_n) afin d'étudier (A_n)) et sont capables de les organiser et de les utiliser à des fins de décision et de déduction, intégrant ainsi la dimension de généralisation signalée dans la partie théorique. Les connaissances mobilisées dans la situation sont elles-mêmes remises en jeu dans le système organisateur. (Bloch et Gibel, 2011, p34)

Comme il est dit clairement en parlant de leurs connaissances, les élèves *sont capables de les organiser et de les utiliser à des fins de décision et de déduction* et c'est donc *également de ce fait* que l'on peut inférer le caractère organisateur du système, c'est-à-dire au plan des concepts de la TSD. Une évaluation systématique des connaissances à l'entrée de la phase adidactique d'une situation, dépendante de l'analyse épistémologique, est un élément essentiel contribuant au caractère organisateur du système.

Un peu avant dans le texte (ibid., p33), les auteurs déclarent :

> Dans ces étapes nous pouvons reconnaître le fonctionnement du système organisateur. La structure ainsi mise en évidence peut se déduire du tableau du 2.5 ; elle peut aussi se schématiser de la façon suivante :
>
> 1. M-2 : Calculs et moyens heuristiques (icônes ou indices)
> 2. M-1 : Enrichissement des énoncés, arguments génériques (indices), conjectures, passage au syntaxique
> 3. Décisions étayées, ostensifs organisés, arguments symboliques.

La question du statut des signes sera examinée en détails au paragraphe suivant (II.4.). Pour l'instant, on peut déjà dire qu'il ne semble pas du tout surprenant que la montée vers le niveau didactique (M_0) s'effectue concomitamment avec la complexité des signes.

Le système organisateur, du côté de l'élève, apparaît donc comme un processus cognitif de réarrangement de ses connaissances mathématiques, mais sous l'influence du système collectif, et rien n'empêcherait de lui attribuer une fonction supplémentaire consistant à gérer également les connaissances d'ordre linguistique. La question serait de savoir comment faciliter l'ancrage et la réorganisation en mémoire que le système organisateur induit lorsqu'on appréhende en quelque sorte son pendant cognitif.

Le système organisateur (sur le long terme et non pendant le processus de dévolution) s'actualise à travers une trace écrite proposée par le professeur. La production d'un tel

document se traduit alors par *un choix d'organisation ou de réorganisation de* l'ensemble, ou d'une partie, des connaissances mathématiques et linguistiques, pour un document dont la fonction première est d'être un support pour les apprentissages. Ces formules ou ces énoncés peuvent certes être accompagnés de commentaires ; et il semble nécessaire d'examiner en quoi ils contribuent à une meilleure compréhension, une meilleure mémorisation, des connaissances sous-jacentes (voir chapitre 8). Il va sans dire que ceci devrait influer de façon certaine sur la structuration cognitive des connaissances de l'élève pour autant que le document mette en lumière des questions de nature sémantique et cognitive (voir chapitre 8 également) et qu'il ne se borne donc pas à une simple liste de mots ou de propriétés.
Le lexique phraséologique et formel qui va devoir être élaboré par l'enseignant peut alors être vu comme un élément susceptible d'influencer le système organisateur des élèves lorsqu'il se retrouvera en autonomie face aux questions de *signification*.
Tel que décrit dans les modèles, le caractère organisateur du système organisateur va nécessiter pour nos propos une étude approfondie des points suivants :

1) les questions de signification des mots ou des symboles dans leur fonctionnement à l'intérieur des énoncés ou des propositions formelles, pour un processus de pensée en acte, sont supposées être réglées ou pouvoir être plus ou moins facilement réglées; elles doivent donc donner lieu à un examen anticipé et discriminé ;
2) l'*autonomie* des élèves, visée dans l'élaboration des phases adidactiques, est présupposée possible ; mais ceci n'a de sens que si les processus interprétatifs des élèves en ce qui concerne la *réinterprétation* des actions, leur mise en rapport au *sens* de la consigne initiale, le contrôle *sémantique* que les divers milieux permettent du point de vue du rapport aux registres sémiotiques concernés, *ne sont pas censés achopper sur des obstacles cognitifs* ; ceux-ci doivent être dans l'idéal anticipés et une remédiation doit être alors envisagée, sur la base d'une analyse fine du lexique phraséologique mental;

Un énoncé décrivant une action dans un milieu donne lieu à une interprétation par l'élève, qu'il en soit l'auteur ou qu'il en soit le récepteur ; ce qui nous amène à distinguer les deux cas :

1) Si l'élève est récepteur du message, le processus interprétatif peut être réalisé dans une interprétation naturelle sans obstacle sémantique[24] pour l'interprète (et dans ce cas l'interprète accède au *fait* auquel renvoie l'action). Le processus interprétatif nécessite aussi parfois de traiter des questions de signification interne à l'énoncé (décalage interprétatif entre le signifié d'un mot visé par l'émetteur et le signifié chez l'interprète) ; ou encore ce processus interprétatif nécessite de prendre en compte des éléments extralinguistiques, dans l'environnement ou du fait du contexte, et de mobiliser des éléments représentationnels dans un rapport direct à l'expérience sensitive et interne.
2) Si l'élève produit l'énoncé, il se peut que son appréhension synthétique soit conforme, mais que la phraséologie qu'il utilise ne permette pas de mettre en lumière ce qui relève d'un traitement sémantique conforme. Ce fait peut résulter, entre autre, d'un manque de maîtrise syntaxique en L1 ou en L2, d'une insuffisance dans le lexique mental ou d'un niveau de complexité – mathématique ou linguistique – excessif pour une production

[24] Ce point est à rapprocher de ce que nous définissons par *lecture porteuse* ainsi qu'au concept d'*évocation ;* ce ne sont pas des facilités d'écriture mais des caractéristiques des processus interprétatifs lorsqu'ils sont effectués dans une tentative d'accès aux signifiés, en l'absence de conflit sémantique sur le plan mental. L'évocation (sémantique) est une production de sens dépendant des rapports internes de signification des énoncés ; rapports examinables de manière externe au processus interprétatif en acte.

énonciative qui se voudrait trop succincte ou trop concise (voir exemple significatif, en Partie Expérimentale, chapitre 7, III.2.c. pour un cas d'interférence sémantique en pré-énonciation).

Ces considérations nous conduiront à intégrer les questions de signification et d'interprétation dans les analyses a priori *dès les séances en amont* ; puisqu'elles participent *de manière essentielle* à la construction du sens et à la formation de représentations cognitives conformes (conceptions) et parce qu'elles légitiment ainsi la possibilité d'une autonomie efficace dans le fonctionnement et l'organisation anticipatrice des phases adidactiques. Nos *analyses a priori porteront donc aussi sur ces phases* et non pas simplement pour la situation adidactique seule.

La TSD fournit, à travers la notion même de situation et grâce aux outils qu'elle a développés, de *très bonnes garanties* pour précisément *construire* et *analyser* les situations. Celles-ci sont des lieux propices à des raisonnements particuliers pour ce qui relève des phases adidactiques.

Les situations, *dans leur ensemble* et non seulement leurs phases adidactiques, sont donc pour nous également de *très bonnes opportunités* pour à la fois permettre d'analyser des raisonnements, certes envisagés selon une organisation fonctionnelle et donc *relativement* prévisible grâce à la méthodologie préconisée par la TSD (en termes d'ingénieries à mettre en place, d'analyse a priori, etc…), mais aussi d'examiner des questions de signification, questions cruciales pour ce qui relève du rapport des mathématiques à la L2. Les *obstacles cognitifs* éventuels seront mis en lumière grâce à une prise en compte de la gestion du sens, *en amont*, du point de vue de la signification d'énoncés hors énonciation, et en acte, ou encore « *en situation* » (c'est-à-dire en temps réel ; mais analysés a posteriori), avec un rapport direct à la complexité et aux représentations mentales.

La constitution de cartes mentales peut aussi jouer un rôle important : elle peut être proposée par l'enseignant après une phase d'institutionnalisation ou relever d'une activité visant à réactiver tout un ensemble de connaissances (mathématiques et linguistiques).

Nous étudierons plus loin en détail les questions relatives aux notions de lexique phraséologique de mathématiques et de cartes mentales.

Par ailleurs, compte tenu de la modélisation des situations d'expérimentation par le biais de la TSD, et du rôle essentiel joué par le schéma d'action-formulation-validation-institutionnalisation, il nous paraît essentiel de chercher à délimiter, tout au moins à mieux cerner les *champs lexicaux* (en L1 et en L2) associés à ces notions relativement au cadre de la TSD. Il va de soi que ce repérage lexical ne peut être qu'approximatif et que les champs lexicaux mentionnés seraient sans doute à rapprocher de l'idée de discours argumentatif, et de discours authentique en situation didactique au sens de la TSD en contexte CLIL-mathématiques. Néanmoins, cette tentative de repérage a un intérêt indéniable dans la mesure où elle devrait permettre de faire fonctionner de manière plus efficace les situations didactiques au niveau des expérimentations proprement dites et au cours des séances préparatoires également.

Par ailleurs, le problème se pose aussi de la possibilité de délimiter ou non un type de formulation « intermédiaire » du point de vue de la langue spécifique mathématique, qui soit néanmoins correct, voire authentique du point de vue de la L2. Ces points seront abordés, indirectement, aux chapitres 2 et 3.

Nous ferons parfois une incursion dans le champ psychologique dans la mesure où nous essaierons de décrypter ce qui relève de certaines expériences mentales mises en jeu par les élèves. Il s'agira notamment des expériences généralisantes dans le cas de preuves donnant lieu à un processus de généralisation (voir II.4. ci-après et Partie Expérimentale, analyses a posteriori).

Il.3. La preuve, exemple de concept para-mathématique

II.3.a. La preuve, une notion centrale en mathématiques

La notion de preuve est centrale en mathématiques et en caractérise fortement la pratique. D'un point de vue sémantique, le mot-concept preuve est étroitement attaché à plusieurs autres mots-concepts, tels ceux de vérité, de raisonnement, de légitimation, de démonstration (qui n'est pas un synonyme en didactique), de certitude, de convaincance, etc... Le fait que ces mots apparaissent comme étroitement associés autour du mot preuve résulte d'une focalisation sur le mot preuve ; celui-ci apparaît alors métaphoriquement comme central au milieu d'autres mots ; ces mots sont donc sémantiquement interdépendants et un bon niveau de conceptualisation permet de les articuler au sein d'une phraséologie apparaissant comme recevable du point de vue de la communauté de discours mathématique (entre autres). Indépendamment du fait que ceci donnera lieu au chapitre 8 à une transposition de ces considérations sémantiques et représentationnelles à une situation didactique à focalisation linguistique, nous considérons ici la notion de preuve d'un point de vue théorique.
Les didacticiens qui se sont penchés sur la notion centrale de preuve sont nombreux (voir Balacheff, 1987), pour une typologie des preuves; Tanguay (2000), pour le cas des preuves et des raisonnements en géométrie, Toulmin (1958), pour la composante argumentative et la proposition d'un modèle, Cabassut (2005), pour une étude comparative de la preuve dans les systèmes éducatifs allemand et français ; mais aussi Duval (1995), Barbin (1988), Brousseau (1998), Hanna (1995, 2000) ; Rouche (1989), etc…). A cet égard, Cabassut propose une articulation des concepts de preuve, de raisonnement et de vérité selon un point de vue didactique et avec prise en compte d'un rapport à 2 langues vivantes (voir Cabassut, 2005). Il examine le statut des raisonnements particuliers qui sont produits lors d'une preuve, attribuant une place prépondérante aux raisonnements basés sur des inférences (voir Cabassut, 2005, p 24 et figure ci-dessous).

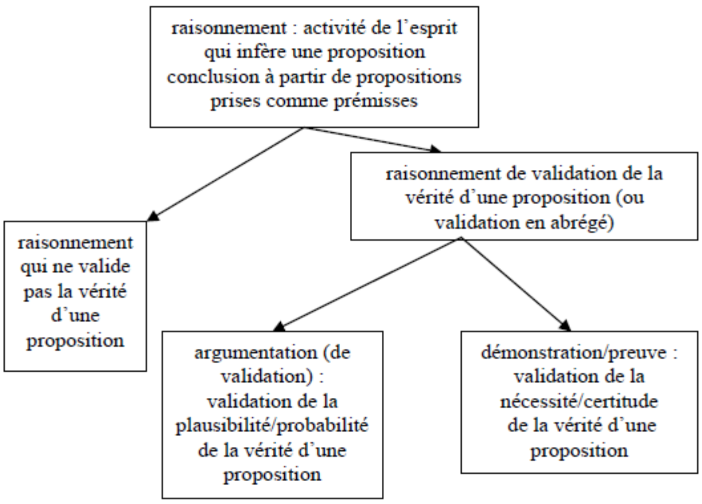


Figure 1.1 : les types de raisonnements (Cabassut, 2005, p24)

Cabassut distingue les raisonnements de nécessité des raisonnements de plausibilité (ibid., p40, 41), et confère un rôle central à la validation. Son approche s'appuie sur la Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard car son travail porte sur la comparaison de deux systèmes éducatifs. La validation, par exemple, y est analysée en tant que genre de tâches. Il utilise également le modèle de Toulmin pour la composante liée à l'argumentation et ce, afin de décomposer un raisonnement de validation en arguments[25]. Signalons que du point de vue du rapport aux langues, Cabassut est confronté à des obstacles liés à la variabilité des traductions (ibid., 119, par exemple). Ainsi, *Beweis* pourra être traduit par *démonstration* ou *preuve*, la traduction nécessitant une interprétation du contexte. L'approche de Cabassut n'est pas sémantique et il s'exprime par conséquent en termes de possibilités de traduction, en examinant des termes centraux (*preuve* mais aussi *conception*, *intuition*, etc…). En ce qui nous concerne, compte tenu de la dimension sémantique et cognitive de nos travaux, nous préférerons parler de phénomène de *non-recouvrement sémantique*, en examinant les phénomènes de décalage d'une langue à l'autre et en prenant en compte les mots-concepts sémantiquement proches.
Balacheff propose une typologie des preuves, en opposant *preuves pragmatiques* et *preuves intellectuelles* et en subdivisant les preuves pragmatiques : *empirisme naïf*, *expérience cruciale* et *expérience mentale* ; le terme de démonstration étant réservé à une preuve recevable par la communauté de pratiques mathématiques (voir Balacheff, 1987, p148).
Cabassut propose une extension, pertinente pour notre problématique, de la typologie de Balacheff aux validations (Cabassut, 2005). Le tableau qu'il propose contient d'ailleurs une remarque intéressante et que nous citons car elle porte sur la place de l'expérience mentale relativement à la catégorisation choisie :

> Nous avons de la difficulté à caractériser ce type de preuve dans notre catégorisation. On peut considérer que la catégorie « expérience mentale » caractérise une technique de preuve plutôt qu'une preuve. Ici la preuve continue à se fonder sur un argument pragmatique, même si l'action est intériorisée. C'est plutôt au niveau des registres de la technique utilisée que se situe le changement : on passe d'une technique de nature matérielle ou gestuelle, qui caractérise l'action à une technique écrite ou orale qui caractérise l'intériorisation et le détachement de l'action. (Cabassut, 2005, p147, 148)

Nous rappelons que pour Balacheff :

> [L'expérience mentale] invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier […] C'est là, quelque part entre l'exemple générique et l'expérience mentale que s'opère le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles. (Balacheff, 1988)

L'obstacle signalé par Cabassut vient certainement du fait que la catégorisation retenue, tout comme l'ensemble de son étude, découle d'une vision d'ensemble, d'un rapport aux systèmes éducatifs, d'une problématique qui se place davantage à un haut niveau de généralité. Nous revenons plus loin sur cette question, en apportant un éclairage complémentaire à travers l'examen d'un type particulier de preuve, à savoir celui des preuves visuelles.

II.3.b. Fonctions des preuves et généralisation

Dans ce paragraphe, nous souhaitons examiner la généralisation dans une perspective théorique et dans son rapport à la preuve. La démonstration formelle correspondant à une

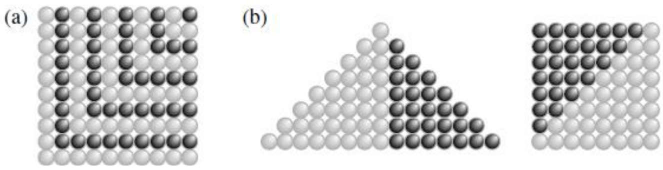
[25] Toulmin subdivise les arguments en deux types : arguments nécessaires et arguments probables

démonstration par récurrence (*proof by induction* en anglais) soulève des obstacles que Fabert et Grenier ont mis en relief (Fabert et Grenier, 2011).
Ce type de preuve fait partie de la culture de tout membre de la communauté mathématique et permet de manière rigoureuse d'établir la généralisation d'une propriété indexée sur un entier *n*. Elle s'inscrit dans la catégorie *démonstration* relativement à la typologie de Balacheff, elle en est d'ailleurs un bon représentant. Or, les fonctions qu'une preuve est susceptible de remplir sont les suivantes (De Villiers, 1990) : vérifier, expliquer, convaincre, systématiser, découvrir, communiquer.
Ainsi, lorsqu'on la rapporte aux fonctions que les preuves peuvent remplir, dans une perspective didactique, elles sont alors très limitées, indépendamment de toute la rigueur qu'elles nécessitent quant à leur rédaction. En effet, si l'on prend en compte que l'attitude de preuve doit être un point qui doit être développé chez les élèves, la démonstration par récurrence n'apparaît plus que comme une méthode certes pratique, efficace mais trop mécanique et qui, seule, ne favorise pas la recherche de stratégies, l'établissement de conjectures. Elle repose donc sur une propriété donnée a priori et ne favorise pas l'expérience de la nécessité quant à cette dernière.
Or, de nombreuses propriétés permettent un rapport au sensible et donc à la visualisation (voir Presmeg 2006, par exemple). Les identités algébriques indexées sur les entiers en font partie.
Pour établir ces formules, le processus de dévolution peut être un moyen de laisser à la charge des élèves le mode d'établissement de la généralisation sur la base de conjectures de la propriété. Ce qui sera retenu comme preuve valide par l'enseignant dépend néanmoins fortement de la culture de ce dernier relativement au curriculum et aux contenus de programmes de son pays.
En France, seule la démonstration par récurrence a, dans ce cas (et à partir de la Terminale), valeur de démonstration, c'est-à-dire de preuve entièrement satisfaisante du point de vue de la forme et compte tenu de la valeur axiomatique du principe de récurrence qui la soutient. Ce principe fait partie de la culture de chacun et par suite, le type démonstration qui consiste à s'appuyer sur ce principe et à suivre le schéma de preuve associé de manière très codifiée apparaît souvent comme seul garant d'une rigueur véritable ; manière de pensée sans doute héritée de l'époque structuraliste, de l'introduction des mathématiques dites modernes et/ou dépendante du fait que c'est une technique de démonstration qui sera réinvestie dans le Supérieur.
Dans d'autres pays, le recours à la visualisation pour favoriser l'émergence d'arguments valides, l'établissement de la généralisation en reprenant le caractère générique pour le traduire sur le plan général (en recourant par exemple aux points de suspension dans les écritures **mais** néanmoins sans utiliser de présentation formelle de l'hérédité et parfois même sans s'appuyer véritablement sur le principe de récurrence), semble être un mode d'établissement considéré comme recevable (voir ci-après).

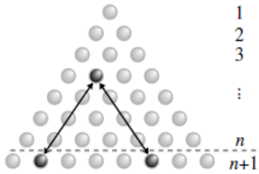
II.3.c. Preuves visuelles

De nombreuses preuves visuelles portent sur la généralisation d'une propriété sur la base d'une figure à caractère générique. Dans l'introduction de la Partie Expérimentale, nous proposerons un moyen de relier preuves visuelles et preuves par induction sans rester au niveau générique des figures (chapitre 5).

Pour qu'une preuve dite visuelle puisse véritablement être une preuve, il est implicite mais nécessaire que la figure qui la condense présuppose un processus interprétatif relativement à une propriété qui est, soit donnée extérieurement, soit à inférer à partir de la figure elle-même (ce qui n'est pas toujours évident)[26].
A titre d'exemple, voici deux preuves visuelles concernant la propriété portant sur la somme des nombres entiers impairs et consécutifs :



ainsi qu'une autre portant sur le nombre de parties à 2 éléments parmi n+1 :



> "There exists a one-to-one correspondence between a set of *tn* objects and the set of two-element subsets of a set with n+1 objects" (extrait de Alsina et al., 2010)

On notera que dans la phrase précédente, *tn* représente le nième nombre triangulaire.

Pour Balacheff, une preuve est :

> […] une explication acceptée par une communauté à un moment donné. Cette décision peut être l'objet d'un débat dont la signification est l'exigence de déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs (Balacheff, 1987, p148)

Ainsi, du point de vue de son statut, une preuve qualifiée de visuelle nécessite de regarder, d'un point de vue théorique, si elle remplit ces conditions pour pouvoir entrer dans la catégorie des preuves au sens de Balacheff. Par ailleurs, indépendamment de son statut sur le plan théorique, les points intervenant dans la définition de Balacheff sont intéressants du point de vue de nos expérimentations. Nous avons en effet choisi ce thème, entre autres raisons, pour la dimension explicative intrinsèque et argumentative du point de vue de la légitimité de ce type de preuve relativement aux autres types. Ceci sera repris dans la Partie Expérimentale lorsque nous examinerons les phases d'institutionnalisation portant sur la convaincance de ce type de preuve et les débats, réflexions ou même tâches particulières, auxquels elles donnent lieu.
Pour Cabassut :

> Lorsque dans une validation, la vérité de la conclusion est nécessaire/certaine, nous appellerons le raisonnement de validation une **preuve** ou une **démonstration** (Cabassut, 2005, p46)

La validation, dans le cas d'une preuve visuelle et lorsque celle-ci repose uniquement sur une figure donnée, résulte d'une analyse de la figure.

[26] Nous renvoyons le lecteur à la Partie Expérimentale pour de nombreux exemples, exemples qui seront analysés dans le cadre de notre étude. Voir par exemple la Preuve visuelle 3D portant sur la somme des cubes.

Il s'agira donc d'une validation pour soi ou d'une validation entre pairs. Dans le premier cas, la validation résulte d'un processus interprétatif de la figure relativement à la propriété sous-jacente. Ce processus repose soit sur une pensée discursive, soit sur une pensée sans verbalisation mais impliquant la perception active. La validation est intimement liée à une expérience de nature mentale (au sens premier et non pas au sens de Balacheff) et on parlera de convaincance de la preuve visuelle. Le statut de preuve, pour l'instant, est discutable du seul fait de la subjectivité du processus interprétatif.
Dans le deuxième cas, c'est-à-dire lorsque la validation a lieu entre pairs, elle consistera alors à trouver un moyen discursif (et oralisé) pour expliciter ce qui relève du processus interprétatif de chacun des membres du groupe. Même si tous se mettaient d'accord pour y voir une preuve, le caractère générique (premier) de la preuve et l'expérience de nature mentale associée, (celle qui déboucherait sur un sentiment de nécessité du caractère de vérité de la propriété sous-jacente) ne suffiraient pas, selon nous, pour, en quelque sorte, s'approcher d'une « démonstration » au sens de Balacheff. En effet, il n'y a pas, pour une preuve visuelle, de système de validation standard dans la communauté de pratiques mathématiques. D'ailleurs, ceci n'a de sens que pour une construction de preuve, ou encore pour un examen des éléments chronologiques (les pas de raisonnements) lorsqu'il s'agit du texte de la preuve ; or il se trouve qu'une preuve visuelle est habituellement interprétée comme produit fini, en référence ou non à un autre type d'élaboration plus conventionnel, mais surtout sans chronologie immédiate. Autrement dit, il revient implicitement à celui qui interprète la figure de procéder à un raisonnement articulé sur le sensible du type expérience mentale généralisante. A ce stade de notre réflexion, la preuve visuelle est donc un objet à caractère générique qui présuppose une expérience de nature mentale ; elle ne s'envisage alors que du point de vue de sa convaincance, c'est-à-dire que le statut de vérité de la propriété dépend fortement du processus interprétatif ; le niveau de complexité de la généralisation étant lui-même lié à la nature et aux éléments de la figure. Nous revenons sur ce point au paragraphe II.3.e. en examinant de plus près la question des expériences mentales.
Nos séances expérimentales sont réalisées en première S ou en terminale S. Nous signalons que, même si les élèves impliqués ne sont pas concernés directement par les obstacles relevés par Coulange et Grugeon (2008), ils vont, par le biais du thème des preuves visuelles, s'éloigner de certaines routines propres à l'enseignement de l'algèbre. Nous précisons que les obstacles relevés par Coulange et Grugeon portent sur *les difficultés d'élèves en algèbre* et leurs recherches ont pour but d'*outiller les enseignants de situations d'apprentissage adaptées aux difficultés repérées* (ibid.). Ainsi, nos situations expérimentales vont s'appuyer sur des schémas dont certains seront élaborés par les élèves eux-mêmes lors des phases adidactiques et qui ont pour but de faciliter la mémorisation de formules algébriques. Elles peuvent elles-aussi s'inscrire dans des situations permettant, soit d'élargir le sens, soit de redonner du sens à des formules algébriques qui, sans cela, risqueraient d'être restreintes à des énoncés perçus comme seulement formels. Nos situations expérimentales devraient permettre aux élèves, lorsque le sens d'une formule n'est pas véritablement acquis, de faire l'*expérience de la nécessité* (Sackur et al, 2005).

Nous examinons maintenant la preuve visuelle du point de vue de sa construction.
Lorsque la preuve fait l'objet d'une élaboration par les élèves eux-mêmes (ce qui est l'objectif de la situation *Somme des Cubes :* voir chapitre 7), la validation reposera majoritairement sur des raisonnements empirico-inductifs et empirico-déductifs (pour contrôler le sens), bien

qu'on puisse y voir des raisonnements ponctuellement logico-déductifs, voire abductifs ; et elle consistera en une argumentation raisonnée qui s'articule sur le sensible. Les expressions formelles (algébriques) obtenues lors de la phase adidactique, comme on le montrera, seront établies dans un rapport direct au sensible, mais aussi, dans un deuxième temps, légitimées dans le registre algébrique lui-même, au sein-même des phases adidactiques (et pas seulement lors des phases d'institutionnalisation par l'enseignant).
Plusieurs chercheurs (voir Alsina et al (2010) ; Miller (2012) ; ou encore Rinvold et Lorange (2011), (2013)) ont étudié les rapports entre preuves visuelles (en particulier celles concernant des propriétés arithmétiques) d'une part et d'autre part, les notions de multimodalité, de concept et d'objet mathématiques. Ils ont été confrontés à la problématique de l'articulation entre ces preuves et les preuves par induction de type algébrique.
Dans la Partie Expérimentale, nous proposerons un moyen d'établir la généralisation tout en conservant un rapport étroit au principe de récurrence mais sans travailler exclusivement dans le registre formel. Ce moyen (actualisation schématique de l'hérédité) nous permettra d'établir un parallèle entre deux types de preuves. Au niveau pragmatique, ce sera aussi l'occasion, non seulement de contribuer à développer chez les élèves une attitude de preuve, mais aussi de faire évoluer leurs représentations autour d'une notion centrale.

II.3.d. Les bipolarisations au sens de Tanguay

Dans son mémoire (Tanguay, 2000), Tanguay envisage les preuves spécifiques de la géométrie et les rapporte à partir des schémas de bipolarisation suggérés par les travaux de Barbin, Hanna, Brousseau, Balacheff et Rouche, son objectif étant d'élaborer une grille d'analyse pour une collection du Secondaire. Dans la mesure où les preuves visuelles reposent fréquemment sur des objets à caractère géométrique et que la question des sources de validation jouera un rôle essentiel dans la partie expérimentale, il semble intéressant de nous focaliser, à l'instar de Tanguay (voir Tanguay, 2000, p84), sur la bipolarité suivante :

Source de validation le sensible	Source de validation le raisonnement logico-déductif

$\longleftrightarrow$

En ce qui concerne les sources de validation propres à nos séances expérimentales, nous verrons que l'argumentation générale reposera sur des arguments (de nature discursive) soit liés directement à des expériences mentales, soit formulés avec un rapport déictique aux référents sensibles (objets physiques, matériels, objets représentés en perspective cavalière, schémas 2D) mais aussi sur une articulation entre les deux types d'arguments précédents. Par ailleurs, nous examinerons, d'abord en tant qu'objectif en termes de sensibilisation puis en tant que savoir visé, le rapport entre deux types de preuves suivants : preuve visuelle et preuve par induction (démonstration par récurrence). Il est clair que les deux types se situent à l'opposé l'un de l'autre sur le plan de la bipolarité précédente. La démonstration par récurrence se réduit à des jeux d'intérieurs (au sens d'Hintikka) lorsqu'on la regarde isolément. Lorsqu'il est question d'établir la validité de l'hérédité, nous pouvons affirmer, en reprenant la formulation de Duval, que :

> les propositions n'interviennent pas directement en fonction de leur contenu mais en fonction de leur statut opératoire (Duval 1991, p235, in Barrier (2009), p65)

En effet, le raisonnement y est de nature déductive. Dans le cas de résultats formels (algébriques) intermédiaires lors des phases adidactiques (pour les preuves visuelles de nos situations) la validation conduira majoritairement à des jeux d'extérieurs, sur la base de l'interprétation des actions situées dans le sensible. Dans une perspective comparatiste, l'étude du parallèle entre preuve visuelle et démonstration par récurrence ne peut se décrire de la sorte puisque la validation est supposée avoir été réalisée, mais plutôt en termes de mise en correspondance d'éléments constitutifs des deux schémas de preuve, sur le plan sémantique et cognitif et dans une démarche globalisante et synthétique.
Par ailleurs, en ce qui concerne la bipolarisation éclairer/convaincre, les preuves visuelles revêtent les deux facettes puisqu'elles permettent de montrer *pourquoi c'est vrai* mais aussi *que c'est vrai,* occupant ainsi une place importante dans les moyens de permettre aux élèves d'effectuer des *expériences de la nécessité*.

II.3.e. Expériences mentales et statut d'une preuve visuelle

Une preuve visuelle se caractérise par une plus ou moins grande convaincance (voir II.1.c.). Le fait qu'elle repose sur une figure générique sous-entend donc qu'elle relève d'une expérience *de nature* mentale. De nombreuses preuves visuelles ont donc pour objet non pas d'établir véritablement mais plutôt de convaincre de la généralité d'un résultat. L'expérience de la nécessité, qui est concomitante de cette expérience, est fortement dépendante du degré de convaincance de la figure générique.
Une preuve visuelle *traditionnelle* laisse donc à la charge de celui qui la déchiffre le soin d'effectuer la « bonne » expérience mentale. Ceci rend indirectement son statut de preuve discutable si le déchiffrage est délicat.
La preuve visuelle traditionnelle repose donc sur un objet brut, un ostensif sur lequel le raisonnement qui va permettre la validation repose uniquement sur un traitement sémantique des éléments de la figure. La validation pour soi ou entre pairs consiste à analyser la figure pour trouver un moyen discursif pour expliciter ce qui relève de l'expérience mentale elle-même, chose pas toujours aisée.
Une telle preuve (preuve traditionnelle), lorsqu'elle porte sur une généralisation, a un statut générique. Nous considérons que son statut de preuve **présuppose** de l'interpréter sous forme d'expérience mentale au sens de Balacheff (invocation *d'une action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier* (voir Cabassut 2005, p147) et Balacheff 1987, p 163-165). En ce sens, ce type de preuve entre donc dans la catégorie des preuves intellectuelles.
Si la preuve dite visuelle en tant que telle fait l'objet d'une construction dévolue aux élèves[27], la preuve aura donc un caractère pragmatique, lié à l'élaboration elle-même dans des registres figuratifs (physique ou schématique) mais relèvera également d'une démarche conceptualisante, c'est-à-dire d'une expérience de nature mentale.
Dans le cas où les élèves élaborent un schéma générique et effectue la bonne expérience mentale, la preuve est donc **à la fois** pragmatique et intellectuelle, au sens de Balacheff.
D'une manière similaire, mais dans une autre dialectique, les schémas produits dans un passage à la généralisation d'une propriété sur la base de conjectures peuvent parfois, voire souvent, ressembler isolément à des preuves visuelles (voir la remarque ci-après sur un exemple de telle situation, situation analysée dans Pedemonte et Buchbinder, 2011). Ils

[27] Voir Partie Expérimentale pour des exemples.

apparaissent néanmoins dans ce cas comme un moyen de construire la preuve finale, comme des étapes dans la phase de recherche et d'élaboration. La preuve finale, recevable dans certaines communautés, n'est pas une démonstration par récurrence mais une explicitation du fonctionnement, de la procédure qui se dégage des schémas particuliers. Cette dialectique entre un niveau procédural et un niveau d'analyse pour des schémas qui vont participer à la généralisation correspond fortement au modèle DNR[28] (voir Harel, 2001). Pedemonte et Buchbinder ont d'ailleurs utilisé ce modèle ainsi que celui de Toulmin pour analyser les différentes utilisations de schémas par les élèves. L'analyse concernait la dévolution d'une situation portant, tout comme l'une de nos séances, sur l'identité algébrique

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

L'étude s'articule sur le concept d'*unité cognitive* (celle-ci s'actualise si les exemples utilisés pour construire ou justifier une conjecture peuvent être généralisés pour la construction de la preuve) et sur la distinction entre PPG et RPG (respectivement *process pattern generalisation* et *result pattern generalisation*). Il s'agit en fait de deux modes de généralisation schématiques[29] : le premier est à caractère procédural (PPG) et le deuxième à caractère plus formel (le produit final) ; cette distinction entre les deux modes est à rapprocher de la dualité *processus*/*produit*. Dans l'article, peu de renseignements sont donnés quant au répertoire didactique de la classe. Les élèves semblent découvrir seuls l'argument que Gauss avait lui-même utilisé pour conjecturer la formule liée à l'identité algébrique, ou encore, pensent à regrouper des nombres figurés triangulaires (ont-ils déjà fait quelque chose de similaire ?). Il n'y a en revanche pas de généralisation schématique où nous l'entendrons pour nos propres séances expérimentales (voir Partie Expérimentale, chapitre 5 et suivants). La généralisation schématique est ici, c'est-à-dire dans la situation étudiée par Pedemonte et Buchbinder, une généralisation à caractère argumentatif et figuratif, du point de vue de l'établissement des conjectures mais aussi pour la rédaction de la preuve, en tant que produit fini élaboré. Cet aspect est très intéressant mais, contrairement à notre approche (nous la présenterons en Partie Expérimentale afin d'éviter des redondances), la démarche ne repose pas sur une mise en relief (explicitation) schématique de l'hérédité. Nous précisons que l'hérédité signifie celle sur laquelle repose une preuve par induction de type démonstration par récurrence au sens où nous l'entendons en France. Dans la situation de Pedemonte et Buchbinder, les concepts convoqués de MI et de PI (respectivement, *mathematical induction* et *proof by induction*) ne signifient donc pas ici *récurrence* et *démonstration par récurrence* au sens où on l'entend dans l'enseignement des mathématiques en France.

Un dernier point, et il prendra son sens en Partie Expérimentale, l'actualisation de l'hérédité au niveau schématique permettra d'élever le statut de certaines preuves visuelles à celui de véritable démonstration au sens de *démonstration figurée*, le statut de démonstration étant jusqu'à présent, et en général, réservé aux seules preuves formelles.

[28] "The initials D, N, and R stand for three foundational instructional principles in the framework: duality, necessity, and repeated reasoning…" in Harel (2008)

[29] La généralisation schématique est, chez ces chercheurs, une généralisation basée sur les schémas et articulant procédures de constructions et interprétations des résultats formels. La généralisation schématique sera définie en un autre sens dans la Partie Expérimentale.

III. Vers une didactique intégrée comme première problématisation de la recherche

III.1. TSD et deuxième problématique d'intégration (CLIL)

Considérations générales

La TSD munie de ses concepts étendus devraient nous permettre de tendre vers une actualisation des objectifs d'*intégration* propres à un enseignement CLIL.
Rappelons que ces objectifs consistent à permettre une acquisition *simultanée* de la langue L2 et des savoirs relatifs à la DNL, en l'occurrence les savoirs mathématiques. Il nous faudra questionner les modalités selon lesquelles les enseignements et apprentissages visant à réaliser ces objectifs doivent ou peuvent, en l'état actuel des recherches dans ce domaine, être réalisés.
Dans le cadre d'un enseignement en section européenne en France, les connaissances linguistiques sont désignées en termes de compétences, en référence au CECRL. En ce qui concerne les mathématiques, la référence en termes de contenus de savoir est le programme officiel correspondant aux classes de Seconde, Première et Terminale publié au Bulletin Officiel.
Nous pensons que la *modélisation en termes de milieux* proposée par la TSD permet de réaliser une intégration effective des apprentissages relatifs à la L2 et aux mathématiques.
Nous nous proposons, dans un premier temps, de définir l'articulation entre les niveaux sur-didactiques du schéma emprunté à la TSD, milieux qui seront à prendre au sens de milieux de *situation intégrée*[30]. En ce qui concerne la caractéristique et l'objectif fondamental d'un enseignement de type CLIL, à savoir l'intégration, une analyse de la problématique que celle-ci induit au niveau de chaque niveau de milieu[31] s'impose (voir II.2. et tableau 1.2). Elle risque de faire apparaître la nécessité, pour l'élaboration des séances expérimentales et, à terme, dans une perspective de formation des enseignants, ou simplement d'amélioration de leur activité sur le terrain, d'anticiper les risques de conflits ou d'incohérences inhérents à ce type d'enseignement. Pour que les activités, les situations ayant un *véritable*[32] objectif linguistique, c'est-à-dire qui ne se réduisent pas à exposer les élèves à la L2 en plus du savoir visé mathématique, puissent fonctionner convenablement, il est impératif que l'articulation entre les milieux intégrés soit prise en considération. En l'absence de réflexion précise sur les objectifs linguistiques susceptibles d'être associés à l'élaboration de situations, le risque est grand que l'enseignant CLIL-mathématiques se confine à des activités trop proches du registre formel, ou à des activités où les règles du jeu soient trop prédéfinies (exercices répétitifs). Ces activités se trouvent ainsi enserrées dans un cadre rigide, où les opérations sémiotiques de conversion de registres mathématiques (graphiques, géométriques, arithmétiques) ne donnent pas lieu à une verbalisation en L2… en bref, aucun, ou très peu, d'espace n'est laissé à l'élève pour prendre des initiatives ou pour mobiliser une démarche critique (donc, encore une fois, verbalisée). Nous qualifierons ces activités d'*activités faiblement intégrées de type I.*

---

[30] Nous conviendrons, à ce sujet et de manière concise, d'utiliser l'expression de milieu intégré.
[31] Nous entendons ici milieu côté professeur. Signalons dès à présent que nous serons amenés à reprendre aussi le schéma de structuration des milieux du point de vue de l'élève, mais pour des niveaux inférieurs (voir infra, modélisation des situations expérimentales).
[32] Ce terme, à connotation très subjective et en un sens péjoratif ici, devra être précisé, ce que nous ferons ultérieurement

Inversement, des situations qui seraient entièrement focalisées sur la L2 (*activités de type II*), sans que l'enseignant ait pour objectif la co-construction ou la volonté de faire émerger une nouvelle connaissance mathématique – ne serait-ce qu'au sens de connaissance locale relative à un savoir mathématique en cours d'élaboration – seront qualifiées de *situations faiblement intégrées de type II*. Il va de soi que les situations précédentes, qu'elles soient de type I ou II, ne peuvent légitimement être qualifiée de *situations intégrées* au même titre que le serait une situation dont l'objectif consisterait précisément à réaliser une tâche mathématique significative du point de vue des savoirs mathématiques visés, et qui prendrait en considération l'apprentissage ou la consolidation d'un lexique ou d'une phraséologie spécifique à ce type de situations, en reposant sur une intention didactique de réinvestissement ultérieur[33]. On parlera dans ce cas de *situation fortement intégrée*.

III.2. Définition et caractéristiques d'une situation intégrée en contexte CLIL Mathématiques

Nous avons, dans les paragraphes qui précèdent (notamment au II.3. et au III.1.), commencé à présenter certaines caractéristiques attachées aux situations qualifiées d'intégrées.
Il est indispensable maintenant que nous en donnions une définition précise. Ceci est désormais possible car nous avons effectué une première approche des concepts emblématiques de la TSD (milieux, répertoires, institutionnalisation, dévolution, adidacticité) en les rapportant à la problématique et au contexte de nos travaux, à savoir l'enseignement de type CLIL pour la DNL Mathématiques. Néanmoins, une situation intégrée va, comme on peut s'en douter, devoir être définie en tenant compte des contraintes institutionnelles, à savoir les programmes et les recommandations officielles.

III.2.a. Situation intégrée : définition

La définition que nous proposons pour notre étude est la suivante :

> *Une situation intégrée est une situation qui comporte une ou plusieurs phases adidactiques et qui a deux objectifs en termes de savoirs visés. Premièrement, elle présente un véritable enjeu mathématique et doit permettre l'émergence effective de nouvelles connaissances mathématiques, qui seront ensuite institutionnalisées (en L2). Deuxièmement, elle participe de la consolidation du lexique antérieur (en L2) grâce à l'originalité du contexte situationnel mais vise également l'acquisition d'un nouveau lexique suite à un enrichissement, pendant et surtout suite à la phase d'institutionnalisation.*

La situation intégrée peut ainsi s'inscrire dans la catégorie des situations de recherche, viser la résolution d'un problème ouvert. Elle doit être compatible avec les programmes officiels et donc ne pas mobiliser un formalisme excessif. Elle doit reposer sur une situation d'action, assimilable à une situation de recherche qui elle-même doit pouvoir s'appuyer sur analyse a priori détaillée et donc sur l'explicitation de savoirs mathématiques bien définis.
L'acquisition langagière est censée porter à la fois sur la phraséologie, les suggestions de reformulations mais aussi doit présenter un élargissement à caractère transversal. L'enrichissement lexical repose alors sur des documents-ressources à la fois synthétiques mais qui peuvent également prolonger les contenus propres à la situation mathématique.

[33] On pourrait également ajouter la possibilité qu'une telle situation donne lieu à un retour réflexif sur les stratégies engagées et/ou à des considérations métalinguistiques, l'ensemble prenant la forme d'interactions ou d'échanges verbalisés dans la L2.

En termes d'acquisitions langagières en L2, la phraséologie susceptible d'être utilisée au niveau pratique, lors des interactions ou pour la description des tâches, ou encore celle qui apparaît comme un objectif pensé en amont et inscrit dans la progression, doivent donner lieu à une anticipation des interactions et des phases d'institutionnalisation.
Nous considérons qu'une situation intégrée ne se réduit pas à une simple exposition à la langue. La L2 est ici l'occasion d'éclairer différemment les procédures et surtout les objets mathématiques convoqués au travers des situations adidactiques mais aussi lors des phases d'institutionnalisation.
Les documents d'institutionnalisation proposent certes une phraséologie propre aux mathématiques mais intègrent également des éléments d'ordre culturel ou en provenance d'autres disciplines. Le répertoire didactique de la classe, au moment de l'analyse a priori, est délimité avec précision. Il doit permettre aux élèves d'effectuer des raisonnements, d'argumenter, débattre et valider. Les ressources lexicales proposées doivent pouvoir améliorer ces derniers points. Les répertoires de formulation, de validation doivent donc se trouver enrichis en fin de séance. L'utilisation de ressources en ligne peut aussi faire l'objet d'une séance ou d'une phase à focalisation sur la L2 mais les situations intégrées ont une dimension adidactique. Nous n'examinons pas l'intégration, par conséquent, au niveau des situations dites *ordinaires* (au sens de la TSD), même si nous prenons en considération implicitement ce type de séances que ce soit en amont ou en aval de nos situations, d'un point de vue séquentiel (séquence d'enseignement dans laquelle s'inscrit la situation adidactique proprement dite).
Le lexique associé à la séance incorpore des éléments mathématiques et des éléments extérieurs. Sa présentation doit pouvoir permettre un enracinement en mémoire plus important sous réserve que de nombreux éléments considérés comme connectés au mot-concept figurent sur le document. Ces éléments sont en partie issus du domaine des mathématiques et en partie extérieurs à ce champ.
Les situations à dimension de recherche, les situations adidactiques nécessitent un enrichissement du répertoire afin que les élèves puissent agir sur le milieu tout en étant capable de décrire leurs actions ou celles de leurs pairs ou encore décrire les rétroactions du milieu.
Même si l'évaluation finale ne vise pas l'évaluation des connaissances mathématiques à proprement parler, nous considérons que les situations intégrées, pendant l'année, doivent favoriser l'émergence de nouvelles connaissances mathématiques. Une situation intégrée de ce type repose sur un examen méticuleux des conditions d'émergence de ces connaissances et sur un recensement précis de ces connaissances. Les conditions des modifications du rapport à l'objet mathématique doivent également donner lieu à un examen précis. Par ailleurs, des faits de langue sont fréquemment susceptibles d'apporter un éclairage particulier sur l'objet mathématique. Ceux-ci doivent être anticipés.
Nous préconisons un examen minutieux des tâches et une description en L2 de celles-ci pour toute situation intégrée. Les actions dans les divers niveaux de milieu vont donner lieu à des interactions, des formulations, des décisions, des raisonnements. Ces derniers doivent être appréhendés et anticipés en rapport étroit avec la L2 et les milieux au sens de la TSD. C'est en ce sens que l'on parlera de milieux intégrés.

III.2.b. Situation intégrée et programme officiel

Une situation didactique, de manière générale, s'inscrit le plus souvent dans une séquence et la séquence dans une progression. Signalons que la question des objectifs des programmes officiels en matière d'enseignement CLIL et en particulier de celui des classes européennes est en pleine évolution. Dans notre académie, une certaine latitude est laissée à l'enseignant pour le choix des activités.

A titre indicatif, les thèmes retenus pour l'épreuve anticipée de 2014 sont les suivants :

- tous les acquis du collège et de seconde

(géométrie analytique, calcul algébrique, statistiques et information chiffrée … sauf algorithmique et échantillonnage)

- les fonctions

(dérivées, étude, exp et ln incluses ; pas d'intégrales, de continuité, de convexité, de trigonométrie)

- les suites
- les probabilités discrètes

(pas de probabilités continues, pas d'échantillonnage)

Par ailleurs, chaque professeur est libre d'étudier des thèmes supplémentaires :

- portant sur d'autres notions mathématiques du programme

(Lors de l'épreuve terminale, l'élève est libre d'utiliser toutes les notions au programme)

- définis par rapport à une problématique

(mathématiques et citoyenneté, mathématiques et économie, optimisation, mathématiques et sciences, mathématiques et histoire, mathématiques et démographie, mathématiques et jeux, mathématiques et technologies, mathématiques et professions, etc.)

D'une manière générale, il ressort des dernières recommandations officielles que :

- la priorité est donnée à l'expression orale,
- les questions ouvertes doivent être favorisées,
- certaines phases du traitement d'un problème de mathématiques (appréhension de l'énoncé et de son contexte, expérimentation, émission de conjectures, exploration de pistes de recherches, communication des résultats obtenus, retour critique sur ces résultats) facilitent les échanges et le débat,
- les questions doivent inviter à la reformulation, au débat,
- les problèmes traités ne sont pas nécessairement ceux de la Terminale,
- une utilisation pertinente des TICE favorise l'exposition à la L2,
- les documents mis en avant sont ceux qui ont une composante culturelle et qui permettent de mettre les élèves en activité,
- la part du formalisme doit être réduite.

Signalons enfin, en ce qui concerne l'évaluation finale, que, selon des recommandations internes à l'Académie :

- l'objectif n'est pas d'évaluer des connaissances mathématiques,
- il s'agit d'évaluer la qualité, l'aisance et la richesse de la langue, la capacité à s'exprimer et à réagir spontanément dans la langue-cible d'une part, l'aptitude au raisonnement dans la DNL, d'autre part.

III.2.c. L’intégration dans les milieux sur-didactiques

Rappelons que, selon la structuration du milieu dans la TSD, les milieux sur-didactiques concernent l'élaboration des situations et le rôle afférent du professeur ; on retrouve les spécificités de ces niveaux de milieu dans le tableau ci-dessous :

M3 : M-de construction		P3 : P-noosphérien	S3 : situation noosphérienne
M2 : M-de projet		P2 : P-constructeur	S2 : situation de construction
M1 : M-didactique	E1 : E-réflexif	P1 : P-projeteur	S1 : situation de projet
M0 : M- d'apprentissage : institutionnalisation	**E0 : Elève**	**P0 : Professeur enseignant**	**S0 : situation didactique**
M-1 : M-de référence : **formulation validation**	E-1 : E-apprenant	P-1 : P régulateur, gère le débat, fait confronter les procédures	S-1 : situation d'apprentissage

Figure 2.2 *niveaux 3 à -1 du tableau Bloch, 2005*

Dans les niveaux M_1 à M_3, le professeur CLIL-mathématiques, à partir des consignes officielles relatives à un enseignement bilingue (un enseignement en classe européenne par exemple), de ses propres conceptions et centres d’intérêt, de ses compétences linguistiques et mathématiques, élabore une progression pour laquelle il doit déterminer des thèmes d’étude mathématiques et intégrer des considérations linguistiques. Les questions qu’il se pose sont celles portant sur les objectifs linguistiques visés. Doit-il envisager les choses sous l’angle de la transversalité ? Dans quelle mesure peut-il aborder des thèmes mathématiques « originaux », nécessitant la mise en place d’une phraséologie spécifique, pour lesquels les processus raisonnés sollicités et les processus de conceptualisation jouent un rôle essentiel, et parallèlement préparer ses élèves à une épreuve encore très focalisée sur la composante mathématique et pour laquelle, donc, les calculs et les manipulations syntaxiques occupent encore une grande place ?

En ce qui concerne notre positionnement, il est clair que nous avons tenté de faire au mieux pour intégrer des séances expérimentales qui, nous l’espérons, sont originales. La contrainte de temps s’est avérée pesante mais cela a néanmoins été possible. Nous avons déjà évoqué certaines facettes de ces séances et nous les détaillerons bien sûr complètement dans la partie expérimentale.

Lorsque nous nous situons au niveau M_3, nous considérons que les aspects socio-culturels qui transparaissent dans la pratique mathématique en pays anglo-saxon doivent être soulignés. Ils permettent de faire apparaître parfois des différences dans les modes de conceptualisation des situations mathématiques du fait de l’existence de conventions différentes, de pratiques spécifiques (choses que nous avons déjà mentionnées par ailleurs). La prise de conscience de ces particularités culturelles est essentielle dans une perspective transversale et d’un point de vue cognitif. Les phénomènes didactiques peuvent être conceptualisés de manières différentes. Le retour réflexif prend une autre dimension. La place de la phraséologie et le caractère évocateur des tournures rencontrées, la possibilité de réinvestissement dans des situations différemment contextualisées (non mathématiques) mais présentant des analogies pour lesquelles on aura délimité les traits saillants (susceptibles d'être re-rencontrés), sont des éléments centraux présidant à l'élaboration de notre progression, lorsque nous descendons au niveau M_2 pour la construction effective.

Ces conceptions nous ont conduit à nous intéresser puis à nous documenter sur des termes linguistiques tels que *pattern, match, fit, number*, etc…, de manière à cerner au mieux les concepts (au sens linguistique), la phraséologie générale associée et celle utilisée plus spécifiquement en contexte mathématique. La place liée que nous voulions accorder à la multi-modalité nous a conduit à mettre l'accent sur le thème des nombres figurés et celui des preuves visuelles.

Après avoir cerné les thèmes, après avoir affiné notre propre culture en termes de repérage des divers emplois possibles des termes linguistiques centraux, en termes d'éléments historiques rattachables aux situations envisagées (notion de gnomon, allusions aux Pythagoriciens, etc...), nous sommes descendus au niveau M_1 pour l'élaboration effective de chaque séance expérimentale. Néanmoins, à ce niveau, l'anticipation par l'enseignant du comportement des élèves, des modes d'appréhension des tâches à effectuer, et de manière générale de la conceptualisation des phénomènes – en liaison avec les connaissances devant être sollicitées et les modifications représentationnelles qui les accompagneront, le conduit à une analyse a priori rigoureuse en se projetant aux niveaux inférieurs (c'est-à-dire sous-didactiques). Il doit aussi se défamiliariser vis-à-vis de son propre savoir, afin de se faire une représentation de la manière dont les élèves interpréteront les données, les résultats obtenus et de prévoir les types d'actions possibles ou même fortement susceptibles d'être effectuées.

III.2.d. Vers un lexique phraséologique de mathématiques

- Lexiques en contexte CLIL Mathématiques

Nous détaillerons au chapitre 3 les caractéristiques de la phraséologie et le rôle essentiel joué par celle-ci lors d'apprentissages linguistiques. Nous souhaitons en donner ici quelques éléments en abordant dès-à-présent le cas particulier d'un enseignement de type CLIL Mathématiques.

Dans un premier temps, nous commençons par mentionner quelques-unes des questions soulevées par Cavalla (Cavalla 2008), dans l'article dont la problématique concernait la constitution d'un lexique phraséologique transdisciplinaire (en français mais la problématique reste la même pour un enseignement en L2), à destination d'étudiants universitaires :

Nos interrogations immédiates peuvent être résumées ainsi : Existe-t-il un lexique transdisciplinaire en fonction du genre du texte ? En d'autres termes :

- Comment peut-on enseigner simultanément les savoirs linguistiques et les savoir-faire langagiers ? Car savoir utiliser les collocations et la phraséologie d'une langue étrangère de façon générale est de l'ordre d'un savoir-faire langagier trop peu considéré.
- Doit-on lister et analyser les collocations transdisciplinaires ou par disciplines ? Car il existe des collocations scientifiques – non terminologiques –davantage usitées dans certaines disciplines ; elles ne sont pas vraiment transdisciplinaires, mais très utiles dans ces disciplines.

- Doit-on constituer des corpus d'écrits par disciplines universitaires ? Au vu de la question précédente, nous pouvons penser que le découpage des corpus par disciplines peut-être également très intéressant ne serait-ce que pour des comparaisons linguistiques.

Nous voyons bien que se pose la question de classement des unités phraséologiques, dès que le lexique envisagé ne se ramène pas à un micro-lexique relatif à une séance ou une séquence d'enseignement mais surtout dès que celui-ci porte sur des éléments extérieurs à la discipline proprement dite (éléments si possibles transdisciplinaires mais non spécifiques à la d, dans le cas d'un enseignement CLIL). Le micro-lexique suffit pour la question de l'élaboration des répertoires (de formulation) minimaux de fonctionnement relativement à chaque séance expérimentale considérée isolément. En revanche, le problème de classement apparaît dès que l'on souhaite constituer un répertoire complet, ce que les enseignants en classe européennes sont parfois amenés à faire afin de permettre à leurs élèves de se préparer au mieux en vue des évaluations finales (vers la fin de l'année de terminale).

A défaut de pouvoir disposer pour l'instant de méthode (officielle, reconnue, qui aurait fait ses preuves) de classement des unités phraséologiques, l'enseignant CLIL n'a que deux choix possibles : soit la présentation repose sur son libre-arbitre, sa subjectivité, soit il s'en remet aux lexiques relatifs à sa disciplines (monolingues ou bilingues) que l'on trouve sur le net.

Dans la pratique, le fait d'inclure ou non des collocations, des expressions figées, est laissé à l'appréciation de chaque enseignant CLIL.

A titre indicatif, et à des fins de constitution d'un lexique *délivré progressivement* auprès des élèves, on pourra s'appuyer, en l'absence d'un hypothétique dictionnaire phraséologique de mathématiques *officiel*, sur des ouvrages tels que le Mathematical Vocabulary Book[34].

Selon nous, chaque lexique proposé aux élèves, qu'il soit global ou partiel, doit contenir des expressions figées, des collocations voire des idiomes.

L'objectif d'un enseignement de type CLIL n'étant pas de restreindre les acquisitions linguistiques à une terminologie disciplinaire, il sera nécessaire d'étendre au maximum le lexique proposé ou le lexique « visé ».

La constitution du lexique doit également inclure des termes plus proches de ceux de la vie de tous les jours. Il n'est pas question, pour nous, d'élaborer un lexique phraséologique général pour les termes mathématiques mais il est nécessaire d'insister sur le rôle d'un tel lexique.

On pourra, si on souhaite insister sur le côté interactionnel des activités, et procéder à une phase de consolidation des savoirs, inclure une phraséologie portant davantage sur la langue de tous les jours, et donc susceptibles d'être réinvestis ailleurs, mais reposant toutefois sur des termes sémantiquement proches des termes relatifs à la discipline.

Il pourrait être intéressant, dans le but de faciliter la mémorisation (et la restitution) de créer des micro-contextes (interactionnels) du type :

Teacher said :... / Pupil x answered :…

Selon nous, la reprise des contextes d'énonciation, pour des expressions phraséologiques relatives aux séances expérimentales, facilitera la mémorisation.

---

[34] Consultable en ligne à l'adresse suivante http://www.suffolkmaths.co.uk/pages/Primary/New%20Primary%20Framework/Documents/Mathematical%20Vocabulary%20Book.pdf

- Exemple de phraséologie relative à un enseignement CLIL Mathématiques

Dans le Mathematical Vocabulary Book, les expressions sont insérées dans de courtes phrases particulières et sont classées par rubriques comme par exemple :

Designing and comparing procedures:

How might we count this pile of sticks?
How could you subtract 37 from 82?
How could we test a number to see if it is divisible by 6?
How could we find the 20th triangular number?
Are there other ways of doing it?

Ou encore :

Ask children who are stuck:

Can you describe the problem in your own words?
Can you talk me through what you have done so far?
What did you do last time? What is different this time?
Is there something that you already know that might help?
Could you try it with simpler numbers… fewer numbers… using a number line…?

Mais on y trouve également un classement lexical sans phrases complètes, si ce n'est sous forme de structures schématiques :

Adding and subtracting:

add, more, and
make, sum, total
altogether
score
double
one more, two more, ten more…
how many more to make… ?
how many more is… than…?

take (away), leave
how many are left/left over?
how many have gone?
one less, two less… ten less…
how many fewer is… than…?
difference between
is the same as

III.3. Objectifs et méthodologie

III.3.a. Objectifs et premières questions

La construction de situations intégrées nécessite de déterminer avec précision les éléments fondamentaux sur lesquels reposent les savoirs et les connaissances relatives à la fois aux mathématiques et aux langues vivantes et notamment la L2 (en l'occurrence l'anglais).
L'objet mathématique est un objet abstrait. Il nous faut étudier de près la nature des liens originels qu'il entretient avec la réalité sensible et chercher à déterminer les conséquences de cette étude sur l'apprentissage.
Du point de vue sémantique, l'objet mathématique, lorsqu'il est défini par une définition conventionnelle, semble coller parfaitement aux sèmes du mot-concept, du point de vue de la langue naturelle. Il sera nécessaire d'étudier les signifiés d'un tel mot et comparer ceux-ci avec les signifiés d'autres mots abstraits situés hors du champ des mathématiques.
Les constituants de signification d'un mot-concept mathématiques (à caractère fortement fonctionnel ou algorithmique) sont-ils comparables aux sèmes d'un mot abstrait quelconque ?

Une autre question non moins importante consistera à étudier le lien qu'entretiennent les notions de représentation cognitive, de conception et de concept. Il nous faudra par conséquent articuler les éléments théoriques issus d'une approche sémantique (notions de signifiés abstraits, de sèmes, d'abstraction, etc…) avec le concept théorique de représentation. Nous le ferons en inscrivant nos propos dans le paradigme cognitif reposant sur une distinction entre pensée verbalisée et pensée non verbalisée et en considérant un double niveau de pensée : sémantique pur et lexical (c'est-à-dire relatif au lexique mental). Dans un même ordre d'idées, nous prendrons position quant à la possibilité et à l'intérêt d'intégrer ou non dans nos séances des éléments issus de la linguistique cognitive : sera-t-il judicieux de remonter jusqu'aux primitives cognitives ? Ainsi, le couple (ensemble, éléments) ne constitue-t-il pas un couple de notions primitives qui se co-déterminent et cela, avant même qu'on les intègre à la définition de fonction, par exemple ? Ce concept de notion primitive se rapproche-t-il de celui de primitive cognitive en linguistique cognitive (mot qui sert à définir des éléments perceptuels lorsqu'on tente de remonter aux sèmes d'un mot-concept) ? Ces questions sont, selon nous, fondamentales lorsque l'on souhaite regarder en profondeur les processus d'interprétation d'une langue à l'autre ou encore se donner les moyens de remonter jusqu'au stade pré-énonciatif, stade ou le perceptif joue un rôle essentiel : perception des caractéristiques d'un objet, d'une situation, d'un pattern, tout en mobilisant éventuellement les autres sens. La présence élevée de verbes satellites en anglais a très vraisemblablement, à cet égard, une influence directe sur la façon de penser, et donc en particulier de penser l'objet ou les propositions mathématiques (comme lorsqu'on dit *the parabola opens up* pour dire qu'*une parabole est tournée vers le haut*).
En ce qui concerne la phraséologie, en L2 ou en L1, il est légitime de se demander si elle va jouer un rôle important dans les processus de conceptualisation, au-delà de la prise de conscience de son rôle essentiel pour la communication. Dans l'affirmative, la notion de *scaffolding* (étayage) préconisée par les formateurs et pédagogues CLIL prendra une autre coloration, pour ne pas dire plus d'épaisseur, si nous parvenons à intégrer efficacement à nos séances les considérations que nous développerons à ce sujet dans la partie théorique et à les mettre en relief. Par ailleurs, lorsqu'il nous faudra élaborer un document intégré, la question se posera de déterminer s'il est préférable de dissocier ou non, au niveau du lexique phraséologique, ce qui relève des mathématiques, ce qui est situé hors du champ des mathématique ou ce qui est mixte. La ramification, l'arborescence des informations non spécifiquement lexicales devra-t-elle être établie selon un critère lié à la fréquence d'utilisation, au caractère emblématique, etc… ? Autre question également : quelle sera la part réservée à la phraséologie dans les analyse a priori des séances ? L'interaction est nécessaire pour favoriser un ajustement de la formulation. La dialectique Concept Quotidien-Concept Scientifique devrait donc intervenir également au niveau de la phraséologie elle-même puisqu'elle serait alors une garantie pour s'appuyer sur des éléments existants bien implantés dans le lexique mental et le réseau de représentations de l'élève.
Toutes les questions que nous venons de soulever vont nous guider pour le choix des situations expérimentales. Comment les choisir pour illustrer les considérations théoriques que nous venons d'esquisser et qui devront, certes être développées dans toute la partie théorique mais aussi éclairées lors des analyses des situations expérimentales elles-mêmes ?
Nous aurons à étudier l'évolution d'une conception impliquant à la fois la L2 et de la L1. Elle sera concomitante d'un apprentissage lexical et phraséologique dans l'une et/ou l'autre des

deux langues. Elle mobilisera des éléments de représentation cognitive et des connaissances de diverses natures, en rapport avec ces situations.
La thèse de Måsøval (2011) a permis de montrer les insuffisances du seul niveau discursif pour traiter, dans l'interaction, des questions de nature sémantique lors de processus de généralisation relatifs à des preuves pragmatiques. Il nous faudra développer des éléments théoriques particuliers spécifiquement pour surmonter cet obstacle dans l'apprentissage. Cela reposera sur l'activation de dualités telles que celles d'implicite-explicite au niveau schématique lui-même.
La thèse de Cabassut (2005, p147, 148) contient un examen précis de la typologie des preuves selon Balacheff (voir aussi II.3.). Elle fait aussi apparaître des phénomènes de non-recouvrement sémantique d'une langue à l'autre pour des concepts essentiels de la pratique mathématique tels que celui de preuve par exemple (concept qualifié de para-mathématique par Cabassut). Nous devrons par conséquent examiner comment articuler ces points délicats au niveau théorique (analyse sémique de certains mots : preuve, pattern, gnomon, entre autres) et nous poser la question de déterminer un moyen d'en faire part aux élèves. La transposition didactique passera donc par l'élaboration de documents intégrés (phases d'institutionnalisation mais pas uniquement) sur la base de considérations théoriques intégratives : mobiliser la dialectique Concept-Quotidien-Concept Scientifique (au sens de Vygotski) dans une perspective fonctionnelle, c'est-à-dire pragmatique, enraciner le nouveau lexique dans un réseau existant, explicitation de signifiés abstraits, rapports directs ou éloignés avec la réalité sensible, etc…
En ce qui concerne nos situations expérimentales, le thème conjoint à chacune d'entre elles est celui des *preuves visuelles*. Nous l'avons retenu car il reposait sur un concept nouveau pour les élèves. Nous souhaitions en effet élaborer une situation à dimension de recherche tout en anticipant et observant l'évolution sur plusieurs séances de la construction d'un concept nouveau chez ces derniers. Le choix de ce thème nous permet également de comparer une preuve visuelle et une preuve classique par induction (démonstration par récurrence dans le cas d'une propriété arithmétique sur la base d'une formalisation algébrique). Nous avons ainsi relevé le défi d'essayer d'amener les élèves à concevoir et élaborer par eux-mêmes une preuve visuelle schématique mais avec la consigne explicite de la présenter en anglais et de manière multimodale (représentations schématiques, exposé oral en L2, manipulations de cubes concrets et gestuelle). La propriété sous-jacente (inconnue des élèves) concernait la somme des cubes consécutifs (et qui se trouve être un carré). L'expérience reposait sur la manipulation de vrais cubes. Elle a nécessité d'examiner et de développer auprès des élèves (antérieurement à la séance) le concept de Gnomon.
La réalisation de cette situation didactique a aussi nécessité de développer les notions d'implicite et d'explicite schématique, de « caractère convaincant » (convincingness) d'une preuve visuelle, de principe d'extension schématique, tout ceci apparaissant comme des retombées des questions soulevées par nos investigations théoriques, traitées puis confortées par nos expérimentations.
L'un des objectifs a été d'amener les élèves à présenter oralement la généralisation induite par la généricité des schémas, sans recourir à la L1 (langue première). C'est l'analyse a priori des situations adidactiques qui a permis à l'expérimentation de se dérouler convenablement. Cette analyse a été réalisée sur la base des concepts de milieu et de situation adidactique (Bloch et Gibel, 2011). Nous nous sommes également appuyé sur les notions attachées à la sémiotique de Vygotski et à celle de Radford, pour traiter des questions de schématisation et de

généralisation dans le cadre de la preuve. Nous espérons montrer à travers notre étude et les analyses qui vont de pair que ce type de situation didactique permet de concilier objectifs mathématiques et linguistiques.
En ce qui concerne les éléments théoriques que nous serons conduit à prendre en considération, ceux-ci seront examinés au paragraphe suivant et, si nécessaire, enrichis.
Nous terminons en rappelant quelques points essentiels ; nous les avions évoqués dans l'introduction.
L'ingénierie mise en place pour nos séances expérimentale devrait nous permettre de montrer ce que les situations mathématiques intégrées apportent de plus par rapport aux situations en L1. A cet égard, il conviendra de faire remarquer, à l'occasion des analyses de ces situations expérimentales, que l'enseignant CLIL, pour ce qui est de la DNL mathématiques en tout cas, est conduit à faire preuve de plus de précision lorsqu'il parle des objets mathématiques, que ce soit lors des phases interactives pour émettre des conjectures, par exemple, ou lors des phases d'institutionnalisation relativement aux connaissances nouvelles et aux objets nouveaux. Le rapport à l'objet mathématique, nous le rappelons, et la manière dont on en parle, sont des points stratégiques de l'enseignement des mathématiques (voir Bloch, 2015)
Selon nous, cette exigence de précision devrait s'accompagner d'un accroissement de la qualité des productions d'élèves, notamment au niveau des formulations (en L2) mais aussi au travers de leurs productions schématiques. Nous essaierons donc de faire apparaître que celles-ci constituent des indices que leurs représentations sont conformes à ce qu'attendait l'enseignant, que les raisonnements produits sont adéquats à l'objectif qui consistera à établir un type de preuve nouveau pour eux.
Les preuves visuelles semblent, à première vue, faire partie des preuves pragmatiques, au sens de Balacheff. Nous examinerons dans la Partie théorique, le statut de ce type de preuve et serons amener à nuancer fortement cette affirmation, selon la perspective adoptée.
Le choix des preuves visuelles a été retenu pour nos séances expérimentales car il devrait permettre aux élèves d'agir à divers niveaux de milieu. C'est le modèle de la TSD qui va nous permettre d'analyser ce dernier point. Nous examinerons ainsi à quels moments ils débattent et comment ils sont amenés à valider, en référence au modèle de structuration des milieux. Signalons dès à présent que nous avons jugé essentiel d'établir un parallèle entre preuves visuelles et preuves par induction, dans le cas de nos séances expérimentales. C'est ce que nous avons effectué lors d'une deuxième approche, en reprenant les séances de manière à les rendre encore plus intégrées. Ceci a été possible lorsque nous avons mobilisé des concepts théoriques en tentant de les rendre plus fonctionnels. Cela nous a contraint à des analyses a priori intégratives car la question du parallèle entre preuves visuelles et preuves par induction ne fait pas partie du savoir savant codifié et pose donc des problèmes de transposition, que ce soit sur le plan épistémologique ou phraséologique (en L1 et en L2).
Nous pensons pouvoir montrer de la sorte que les élèves auront, grâce au thème retenu pour nos séances mais aussi, et surtout, grâce aux ingénieries mises en place (décrites en détail en Partie Expérimentale) un rapport enrichi à la démonstration.
La place du passage à la généralisation sera l'un des points de focalisation de nos analyses a posteriori. Nous espérons ainsi pouvoir déterminer quels sont les moments importants et quels sont les signes qui sont alors produits et qui attestent d'un raisonnement conforme (recours au modèle d'analyse de Bloch-Gibel, 2011). Dans un deuxième temps, nous effectuerons un bilan synthétique en termes de modes de raisonnements, de niveaux de discours, de formes et de contenus des argumentations mais aussi en termes de représentations (cognitives).

III.3.c. Méthodologie et premiers éléments de réponse

Comme nous l'avons indiqué au paragraphe I.3, l'approche socio-constructiviste a été retenue et appliquée avec efficacité par plusieurs chercheurs (Måsøval, Douek) en didactique des mathématiques pour des travaux ayant un lien avec notre étude et nous donnerons nous-même à nos propres travaux une orientation qui va dans le même sens. Nous consacrerons ainsi au chapitre 2 un paragraphe pour présenter quelques éléments essentiels de la sémiotique de Vygotski. En ce qui concerne la dialectique Concept Quotidien-Concept Scientifique, nous ferons en sorte qu'elle apparaisse dans une dimension fonctionnelle. Nous montrerons en quoi elle joue selon nous un rôle essentiel pour l'apprentissage de la phraséologie et la constitution de documents-ressources, que ce soit en amont d'une séquence (participant ainsi du *scaffolding*, au sens CLIL), en cours de progression le long de la séquence mais aussi pour tout document synthétique de type document d'institutionnalisation (au sens de Brousseau). Cette dialectique sera rendue fortement fonctionnelle lorsque nous traiterons des questions d'enracinement en mémoire d'une nouvelle phraséologie puisque nous attacherons le nouveau lexique à un lexique partagé en allant des Concepts Quotidiens, représentations enracinées et largement partagés, vers les Concepts Scientifiques, représentations en construction. Notons qu'il y a un accroissement de scientificité au fur et à mesure que la représentation évolue vers une cible établie selon une problématique de transposition didactique.

Le sens n'est pas totalement dans un mot donné – c'est-à-dire dans son signifiant – mais implique toujours un individu qui pense. Il nécessite une mobilisation de ses capacités à distinguer les divers signifiés pour un même signifiant et surtout lequel de ces signifiés est mobilisé dans la production ou la réception d'un énoncé discursif (capacités de perception sémantiques). Le sens ne réside donc pas uniquement dans le substrat lexical et par conséquent les questions de sens seront traitées dans une approche résolument cognitive. La sémantique lexicale propose plusieurs modèles et nous en présenterons quelques-uns mais c'est en linguistique cognitive que nous avons trouvé des éléments que nous jugeons essentiels pour notre problématique. Ainsi, nous avons retenu la notion de primitive cognitive (lorsque l'on remonte jusqu'aux éléments perceptuels) et celle de sème. Dans le cas d'un objet mathématique (une fonction, un vecteur, etc…) par opposition au cas d'un concept para-mathématique (une preuve, une expérience aléatoire, etc…), nous parlerons d'éléments constitutifs de signification plutôt que de sèmes. Ainsi, dans le cas d'une fonction, il s'agit alors des éléments, des ensembles de départ et d'arrivée (ensembles et éléments forment un couple de notions primitives), de la mise en correspondance orientée et du caractère véritablement fonctionnel d'une fonction[35] (« à tout x, on associe un *unique* y noté f(x) »). Les éléments constitutifs de signification sont étroitement associés au mot-concept mathématique et constituent les signifiés abstraits de ce mot. Nous traiterons de ces points très particuliers au chapitre 2 et la question se posera de déterminer quelle sera leur fonction dans les séances expérimentales : l'enseignant devra-t-il en faire part explicitement aux élèves ou devra-t-il simplement en avoir conscience comme garantie d'une meilleure conceptualisation pour lui-même, dans les milieux sur-didactiques notamment ?

Enfin, nous considérons que les phénomènes de conceptualisation mobilisent fortement des *dualités* lorsque nous effectuons un processus interprétatif. La question de l'interprétation

[35] L'approche sémantique selon la dualité explicite-implicite du caractère fonctionnel (unicité de f(x) pour chaque x) d'une relation de type fonction numérique fait ressortir clairement que ce caractère ne peut apparaître explicitement qu'au niveau de la définition en langue naturelle puisqu'il est absent des objectivations symboliques conventionnelles.

étant un point essentiel de la pratique mathématique mais aussi pour la lecture ou la réception d'un message ou d'un énoncé quels qu'ils soient, nous examinerons quelques-unes des principales dualités (discret-continu, implicite-explicite, concret-abstrait, déterminé-indéterminé, statique-dynamique, etc…) et nous leur conférerons une dimension non pas simplement dialectique, en les présentant tantôt comme des oppositions ou encore comme des pôles, mais pragmatique, voire très fortement fonctionnelle. Nous montrerons par exemple qu'un gnomon est sémantiquement défini par une forme spécifique ainsi qu'une valeur (nombre d'objets). Ainsi l'agrandissement d'un Gnomon, lorsque l'on *active la dualité* forme-valeur, peut être perçu et décrit comme élargi selon la forme mais que cet accroissement peut être liée à une augmentation numérique (nombre d'objets de l'agencement du gnomon) selon une règle qui implique la forme (principe d'extension schématique du gnomon lui-même) sur la base de l'ajout *dynamique* d'un certain nombre d'objets.
En ce qui concerne la transcription algébrique des preuves visuelles, celle-ci prendra davantage de sens une fois que nous aurons étudié les sèmes du mot-concept *preuve.* Nous envisageons ainsi de parler aux élèves des sèmes principaux associés au mot *preuve* mais en adoptant une formulation accessible. Le problème de transposition didactique implique donc la mise en place d'un vocabulaire pédagogique permettant d'aborder avec les élèves des questions fines de nature sémantique et cognitive. Le mot *sème* ne sera pas utilisé directement mais en revanche nous serons conduit à dire par exemple qu'un mot donné (le mot *preuve* par exemple) *partage son sens avec*, ou encore *a quelque chose à voir avec*, ou *entretient un lien de signification avec* un autre terme.
Les conceptions des élèves vont évoluer au cours des séances. Il en va ainsi des conceptions autour de la notion de *pattern* ou de celle plus particulière de *gnomon*. Le concept de *preuve* devrait lui aussi se traduire par une évolution des conceptions. Nous nous appuierons sur la modélisation proposée par Balacheff (modèle cK¢) pour décrire cette évolution, que ce soit de manière anticipatrice (lors des analyses a priori) ou suite à la réalisation effective des séances (analyses a posteriori). D'autres angles d'attaque sont possibles. En effet, en ce qui concerne la question de reconnaissance de *patterns algébriques* dans le cas de situations impliquant des suites numériques (en l'occurrence, il s'agit de *repeating patterns* particuliers et suites arithmétiques), Zazkis et Liljedahl s'appuient au niveau théorique sur la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (voir Zazkis et Liljedahl, 2002) et donc entre autres sur le concept de *théorème-en-acte*.
Le discours sur l'objet mathématique, ou encore le discours sur le rapport lui-même de l'individu à l'objet, lorsqu'ils sont réalisés en phase interactive, ne sont pas des discours codifiés et reposent sur les conceptions de l'enseignant ainsi que sur celles des élèves. Ils s'accompagnent d'ailleurs souvent de considérations métacognitives qui elles-mêmes ne sont pas codifiées. Par ailleurs, la notion de concept apparait comme une représentation idéale de l'ensemble des conceptions individuelles en accord avec le savoir savant mais ne s'appréhende que par un individu unique à chaque fois : celui qui pense le concept (objet mathématique ou concept para-mathématique) ou qui lit un texte à propos de ce concept. Nous devrons, en ce qui nous concerne, élaborer une phraséologie (en L2) qui soit conforme, malgré le filtre de notre propre représentation, aux concepts mathématiques, et accessible aux élèves.
En résumé, nos propos nous conduisent à qualifier notre approche de plurielle, c'est-à-dire comme étant à la fois sémantique, cognitive et conceptualisante dans un sens qui, nous l'espérons, s'éclairera davantage dans la suite du texte. Nous pouvons néanmoins déjà

affirmer que les considérations portant sur la phraséologie, l'implication des sens (multimodalité), la prise en compte de l'existence d'une pensée non verbalisée et du rôle essentiel joué par la perception active, seront autant d'éléments qui participeront à cet éclaircissement.

III.4. Hypothèses

Avant d'établir une conclusion relativement à ce premier chapitre, il est nécessaire de dresser la liste des principales hypothèses théoriques que nous avons été amené à envisager. Il conviendra, dans la partie expérimentale, de vérifier si celles-ci sont, ou non, confortées par l'expérience ou par le bon déroulement des situations. Nous entreprendrons également d'exposer la pertinence des moyens mis en œuvres à cette fin en précisant quels seront les types d'analyse, quels seront les modèles utilisés.

- Hypothèse 1

La modélisation en termes de milieux, au sens de la TSD, nous permet de proposer une ingénierie qui garantit la réalisation effective des apprentissages relatifs à la fois à la L2 et aux mathématiques.
Commentaire : Le recours à des situations adidactiques permet un accès au sens des concepts par le biais de phases d'action et de phase de validation et favorise aussi les acquisitions langagières, notamment en L2.

- Hypothèse 2

Les situations construites dans une progression, avec reprise des connaissances dans un contexte différent, sont efficaces pour l'acquisition de ces connaissances, tant en mathématiques qu'en L2.
Commentaire : Si une connaissance a déjà fonctionné, amener l'élève à trouver, déceler, des analogies entre la tâche à résoudre et les connaissances anciennes, doit garantir la bonne exécution de la tâche et ainsi concourir à la résolution de la situation-problème ou à atteindre l'objectif didactique visé. La richesse d'une situation permet un questionnement adéquat par l'enseignant afin de faire évoluer un concept mathématique en construction chez l'élève.

- Hypothèse 3

Afin de garantir un fonctionnement optimal des situations expérimentales et indirectement, de permettre aux élèves d'effectuer des raisonnements pertinents, de favoriser les processus interprétatifs, il semble nécessaire de confronter les élèves, dans les situations, à plusieurs manières de conceptualiser les actions.
Commentaire : La distinction entre actions réalisées effectivement dans la réalité sensible, actions idéalisées et portant sur des éléments de pensée et actions évoquées fera l'objet d'un paragraphe complet (voir chapitre 2, II.6.).

- Hypothèse 4

Il est nécessaire d'examiner précisément *les possibilités des langues et des répertoires pour favoriser la construction des représentations.* Les formulations dans les deux langues jouent un rôle essentiel pour l'institutionnalisation et la reconnaissance des savoirs mathématiques à officialiser.
Commentaire : Les conditions énonciatives sont en effet essentielles pour une description pertinente des énoncés. La prise en considération des éléments implicites et explicites, dans les divers registres, et notamment au niveau schématique, apparaît comme nécessaire pour

permettre une élaboration des séquences expérimentales adéquate aux savoirs visés et garantir la bonne réalisation de celles-ci.

- Hypothèse 5

La perception des sèmes ou des éléments constitutifs de signification (notamment pour un objet mathématique) doit faire l'objet d'un apprentissage particulier basé sur une explicitation de ces constituants sémantiques par le professeur.

Conclusion du chapitre 1

Dans ce chapitre, les concepts didactiques issus de la TSD ont été présentés en référence à une première série de considérations de nature essentiellement didactique, relativement aux autres cadres théoriques (les cadres de la sémiotique et de la linguistique). Nous reviendrons plus loin en détail et avec une focalisation plus importante sur les questions liées à la L1 et à la L2 en contexte CLIL (chapitre 3). A ce sujet, les spécificités de l'enseignement de type CLIL ont été, ici-même, simplement esquissées, afin que le lecteur puisse s'en faire une première idée. Il en va de même pour ce qui concerne la phraséologie. Celle-ci fera l'objet d'une étude approfondie au chapitre 3, IV.

Nous avons décrit avec précision la notion centrale de milieu didactique y compris dans son rapport avec les processus interprétatifs et des raisonnements (II.2.e).

Les divers répertoires ont été envisagés dans une perspective CLIL. Nous estimons que ces concepts ont été enrichis.

Néanmoins, la pratique mathématique mobilise aussi des capacités qui ne sont pas toujours des connaissances mathématiques mais qui sous-tendent les processus de conceptualisation mobilisés dans des situations didactiques : on n'élabore pas une preuve visuelle comme on élabore une preuve algébrique.

La notion d'intégration, qui est au cœur de l'enseignement de type CLIL, a été, elle aussi, minutieusement étudiée. Nous avons ainsi donné une définition de situation intégrée en mettant en relief certains points importants.

Nous avons également émis une série d'hypothèses théoriques. Nous reviendrons sur celles-ci dans la partie expérimentale et dans la conclusion générale, afin de préciser si elles sont ou non confirmées.

Le chapitre suivant va être l'occasion d'examiner ce que nous entendons par *représentation*, en y adjoignant notamment des considérations sémiotiques.

CHAPITRE 2. SIGNES ET REPRÉSENTATIONS

Nous souhaitons aborder dans ce qui va suivre deux notions fondamentales pour notre problématique : celles de médiation sémiotique et de représentations. La question fondamentale qui se pose d'emblée est celle de la modalité d'articulation entre le concept de signe et celui de représentation en des sens qu'il va nous falloir préciser. Se référer à une théorie ou à des conceptions sur un concept, quel qu'il soit, implique d'élaborer un discours qui ne peut que reposer lui-même sur des signes, en l'occurrence des signes linguistiques. Cette récursivité inhérente à toute tentative d'approche du signe par des signes va également se poser pour la question de représentation puisque cette notion évoquera nécessairement des notions apparentées ou étroitement associées telles que celles de représentations mentales, de représentations cognitives ou encore de représentations sémiotiques. Ainsi donc, il ne nous resterait comme seule échappatoire apparente que l'acceptation d'entrer directement dans un type de discours que l'on tenterait de concilier avec celui de telle ou telle communauté de discours. Mais la récursivité sera malgré tout encore présente à ce stade puisque se référer à une communauté de discours n'a de sens qu'en ce que la *représentation* que l'on s'en fait et les *signes discursifs* que l'on produit puissent être en conformité avec cette communauté c'est-à-dire considérés comme *recevables* ; il ne pourra donc s'agir que d'un idéal vers lequel on tentera de tendre.
Nous rappelons que le but de notre travail, dans le contexte de la classe, est de faire en sorte que les situations construites, ainsi que le contenu des répertoires correspondants, aient du sens pour les élèves et leur permettent d'accéder à des objets mathématiques et à des objets discursifs mais aussi d'effectuer des raisonnements nouveaux. Or cela passe obligatoirement par des signes et des représentations.

I. Concepts empruntés à la sémiotique de Vygotski

I.1. Pensée, langage et médiation socialement significative

Selon Vygotski, toute activité psychique supérieure telle que l'attention, la mémoire, la volonté ou la pensée verbale, est caractérisée par un principe de fonctionnement reposant sur les notions de signe et d'outil. Toute activité cognitive est d'emblée sémiotique et médiée. Le passage d'activités élémentaires à des activités plus complexes n'a été possible, historiquement, qu'avec l'élaboration d'outils et de signes de plus en plus perfectionnés. Héritée socialement et culturellement, cette *double médiation* se retrouve dans les activités mentales supérieures. Ces dernières sont s*ocialement* élaborées par le biais du langage ou d'autres systèmes de signes, socialement, car ces systèmes de signes sont l'aboutissement d'un long processus historique, social et culturel.
A la distinction signe / outil (au plan psychique) correspond la distinction intériorisation / extériorisation du point de vue du sujet.

> Toute fonction apparaît deux fois dans le comportement social de l'enfant ; d'abord au niveau social, entre les personnes (inter-psychologique), ensuite à l'intérieur de l'enfant (intra-psychologique)... (Schneuwly 1986)

Ainsi le langage a, dans l’interaction, simultanément une fonction communicative et cognitive *externe* (c’est-à-dire motivée par ou accompagnée des éléments de nature sociale) et une fonction cognitive (interne) participant à la construction-même de la pensée.

> Ce processus sociogénétique d'appropriation individuelle des fonctions mentales supérieures se réalise grâce aux médiations sémiotiques, se produisant au cours d'échanges interactifs, par transformation de la fonction sociale et communicative des signes (interpersonnelle) en fonction individuelle et intellectuelle (intra-personnelle). (Roux, 2003)

Le processus fondamental du développement individuel des fonctions mentales supérieures est un processus de sociogenèse à l'occasion de pratiques sociales de communication. Chez l'individu, l'appropriation des signes et systèmes de signes constitutifs de son appareil psychique se fait, selon Vygotski, par transformation de processus interpersonnels en processus intrapersonnels :

> Toutes les fonctions supérieures ont leurs origines dans les relations réelles entre individus humains. (Vygotski, in Schneuwly, 1986 ; également in Roux, 2003)

Ce processus sociogénétique d'appropriation individuelle des fonctions mentales supérieures se réalise grâce aux *médiations sémiotiques*, se produisant au cours d'échanges interactifs, par transformation de la fonction sociale et communicative des signes (interpersonnelle) en fonction individuelle et intellectuelle (intrapersonnelle).

I.2. Notions retenues pour la suite de notre étude

Nous rappelons deux notions fondamentales et qui, entre autres, sont au cœur de la sémiotique de Vygotski, à savoir les notions de concept quotidien et de concept scientifique, notions sur lesquelles nous reviendrons à plusieurs reprises au cours de notre exposé (voir Vygotski, 1997). A cet égard, nous insistons également sur le fait que, notre problématique étant surtout didactique, nous utiliserons ces notions conceptuelles comme deux pôles auxquels nous rattacherons certaines considérations, notamment celles relatives aux notions de représentations (avant tout cognitives). Ces représentations apparaissent comme formées spontanément, progressivement, dans la vie de tous les jours, avec un indéniable sens de représentation sociale ; mais les connaissances scientifiques, d’un point de vue cognitif (et mental), ont également à voir avec la notion de représentation, mais cette fois-ci avec l’idée de construction.

En premier lieu, le simple fait, en plus des considérations que nous avons évoquées ci-dessus, que la lecture de Vygotski fasse émerger la possibilité de distinguer ces deux pôles serait presque en soi suffisant pour nos propos (à finalité didactique). Nous allons néanmoins, mais assez brièvement, glisser dans ce qui suit quelques éléments issus des analyses du texte de Vygotski intitulé *Pensée et Langage* (Vygotski 1997), et que l’on peut retrouver par exemple chez Bernié. Certains de ces éléments sont en rapport direct avec l’apprentissage des langues vivantes. Bernié rappelle (Bernié, 2003, cité dans Chini, 2004, p 21) à cet égard que :

> [Vygotski] lui-même souligne la différence entre l'acquisition de la langue maternelle et celle d'une langue étrangère en termes de développement : [Vygotski] relève que l'enfant scolarisé apprend une langue étrangère "tout autrement qu'il n'assimile sa langue maternelle". La première n'intervient que lorsque l'assimilation de la seconde a déjà acquis une certaine maturité ; l'assimilation de la langue étrangère ne doit rien au développement verbal spontané, auquel l'assimilation de la langue maternelle doit une large part ; elle procède donc du "haut" vers le "bas" en utilisant "tout l'aspect sémantique de la langue maternelle.

En ce qui concerne le rapport à la langue, l'enfant doit construire un regard réflexif et volontaire sur la langue (*language awareness* dirait-on en anglais). Bernié estime que l'enseignement de la grammaire devient, lorsqu'il est abordé sous un angle psychologique (approche psycholinguistique de l'enseignement de la grammaire), un outil développemental.
Ainsi, lorsqu'on tombe sur des cas limites tels que celui qui correspond à une phrase du type « ce mur fait 100 mètres de long » et qu'on le rapporte à l'affirmation (fréquente) de nature grammaticale selon laquelle *le sujet est ce ou celui qui fait ou subit l'action*[36], on réalise que la grammaire nécessite un retour réflexif. Elle doit donc être l'enjeu de débats ouverts quant au sens de telles affirmations qui se voudraient en apparence définitives, non-ambigües ; et ces débats vont finalement, dans des cas similaires, nécessairement déboucher sur des modifications d'ordre psychologique (modifications développementales).
Notons au passage que la même complexité s'observe par rapport aux termes retenus en mathématiques : une fonction est souvent décrite relativement à l'idée de correspondance mais aussi à celles de grandeurs qui varient en étroite relation ou encore dans une relation de dépendance. Quel est le statut sémantique de l'expression « *les variations de la fonction constante* » ? Ou encore, dans un même ordre d'idées, on peut se demander quelle est la signification à attribuer *aux côtés d'un quadrilatère aplati* ? Ces phénomènes didactiques, que nous qualifions de situations-limites ou relatives à des objets-limites, entraînent nécessairement une modification du regard porté par l'élève sur les objets intervenant, ou impliqués, dans le discours.
En parlant des rapports au langage, Chini reprend les propos de Lahire (Lahire 1998, p 122 in Chini, 2004, p 49) :

> L'école vise d'abord et avant tout – avant même la correction de l'expression – un nouveau rapport au langage : un rapport réflexif, distancié, qui permet de traiter le langage comme un objet, de le disséquer, de l'analyser, de le manipuler dans tous les sens possibles et d'en faire découvrir les règles de structuration interne. Objectiver le langage, c'est lui faire subir une transformation ontologique radicale : l'enfant était *dans* son langage, il le tient désormais *face* à lui et l'observe, le découpe, le souligne, le classe, le range en catégories. Il se servait du langage pour dire ou faire des choses, et en pouvait presque ignorer l'existence tellement sa présence était indissociable des situations, des objets désignés, des autres, des intentions, des émotions, des actes. On lui fait désormais prendre conscience du langage en tant que tel, dans sa matérialité, et son fonctionnement propre, et on ne lui apprend pas vraiment à s'en servir dans des contextes d'usages particuliers, mais à en découvrir les lois spécifiques de fonctionnement, à voir *comment* il sert.

Ce second regard sur la langue a donné lieu à la notion de *secondarisation*. La langue, qu'il s'agisse de la L1 ou de la L2, devient objet d'étude. Les modifications du statut des objets à travers les modifications des règles discursives ont d'ailleurs été étudiées par Sfard (voir par exemple Sfard, 2000a, 2000b, 2001a) sur le plan mathématique et nous serons amené à reprendre ces questions plus loin.

Toujours est-il que, selon Chini :

> Si l'on veut que la situation scolaire ait un sens pour l'élève, qu'elle ne soit pas en rupture par rapport à la représentation qu'il s'en fait, il convient d'accorder à ces activités secondes la place qui leur revient. (Chini, 2004, p 50)

[36] Nous empruntons l'exemple à Bernié, suite à une communication à laquelle nous avons assisté.

Selon elle, le langage a trois fonctions essentielles : il est à la fois un outil de communication, mais aussi un outil cognitif et un objet d'étude.
Nous allons dans les paragraphes qui suivent présenter un certain nombre de notions théoriques que nous allons être amené à envisager sous un angle très particulier.

II. Evocation, représentation, signe et discours

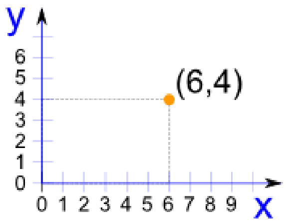
II.1. Premières considérations sur l'articulation de ces notions

En ce qui concerne nos conceptions en matière de signes et en particulier en matière de signes linguistiques, nous estimons, comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, qu'il vaut mieux partir des signes produits, combinés, déjà-là.
Notre pensée (verbalisée intérieurement) reposant elle-même sur des signes intériorisés et *combinés* (nous pensons rarement en utilisant un seul mot ou un seul signe), nous considérons qu'il vaut mieux partir d'unités discursives moyennes comme celles qui correspondent à des phrases ou des portions de textes, ou de discours, qui font sens. Par ailleurs, en matière de didactique et relativement à notre problématique, nous sommes le plus souvent amenés à nous intéresser à des signes combinés, que ce soit du point de vue linguistique ou du point de vue mathématique. Dans les deux cas, nous nous intéressons soit à des énoncés linguistiques, soit à des propositions formelles, voire aux deux, mais en tout cas, beaucoup plus rarement aux signes isolés. Toujours est-il que la question essentielle, dans un premier temps, est de savoir *comment les combinaisons de signes font sens.*
Une première remarque, et non la moindre, consiste à souligner que lors d'un énoncé linguistique, le sens perçu est global et ne se résume pas à celui qui pourrait être attaché à chacun des signes séparément. En combinant [homme] et [marcher] par exemple, nous pouvons constituer l'énoncé [l'homme marche]. Cet énoncé, lors d'une interaction discursive avec autrui, ou lors d'un acte de lecture ou encore lors d'un énoncé mental personnel est *naturellement perçu dans sa globalité*[37] et ne nécessite pas d'analyse ou de dissociation sémiotique particulière et consciente pour être saisi comme tel. Sans autre précision, pris isolément, c'est-à-dire sans mise en rapport de cet énoncé (ou proposition) avec un texte ou un discours plus vaste, celui-ci *évoquera* plus ou moins la même chose chez chacun d'entre nous car il fait référence à quelque chose de *familier*. L'évocation est celle d'une *lecture porteuse*, naturelle, *sans fixation de l'attention sur le sens individuel de chaque terme de l'énoncé mais présupposant une construction syntaxique cohérente dont les rapports de signification peuvent être examinés extérieurement à l'énonciation elle-même*. L'évocation envoie directement les signifiants vers le niveau sémantique de la pensée : phénomène naturel métaphoriquement décrit par l'idée de *production de sens*.
Mais quelle est donc la nature de cette *évocation* ?
Evoquer c'est faire venir à l'esprit des éléments de pensée suscités par l'énoncé.
Ainsi, lorsque nous produisons un énoncé tel que [l'homme marche] nous déclenchons chez l'interlocuteur une représentation familière portant sur une ou plusieurs expériences antérieures concrètes, représentation que l'on pourrait légitimement considérer comme partagée chez la plupart des individus. Cette représentation serait plutôt quelque chose qui figure en arrière-plan de la conscience, à un niveau subconscient, capable de susciter elle-même des représentations mentales de type visuel ou autre si besoin était, ce qui serait par

[37] On en perçoit le sens en se laissant en quelque sorte porter par les mots.

exemple le cas si l'énoncé faisait partie d'un ensemble plus vaste et s'il était produit lors d'une interaction et dans un contexte particulier.
Relativement à notre problématique, il serait bon que nous choisissions un exemple représentatif, significatif de la pratique mathématique. Considérons ainsi le micro-énoncé suivant : [la fonction *f* est croissante sur un intervalle]. Sans autre précision, cet énoncé pourra se passer d'image mentale chez un mathématicien averti. Dans le cas d'un élève en cours d'apprentissage et peu familiarisé avec la notion de fonction, cet énoncé pourra évoquer ce qu'il vient d'étudier récemment. Cette évocation pourra consister à faire venir à l'esprit des images mentales associées à des fonctions croissantes particulières déjà étudiées (fonction carré sur R^+ …), à évoquer des schémas de nature générale proposés par l'enseignant pendant son cours ou encore à une sorte de parcours visuel intériorisé de telles représentations schématiques mais sans image mentale nette. Dans tous les cas, il est possible que vienne à l'esprit de manière effective, ou de manière subconsciente, des représentations associées : on pourra par exemple *se sentir* sur le point ou *être capable de raviver mentalement,* sans forcément le faire, le critère formel caractérisant une fonction croissante sur un intervalle. L'évocation recouvre donc souvent une *potentialité d'évocation* plutôt qu'une *évocation effective*. Il en va de même de la notion de représentation mentale associée ou déclenchée par un énoncé. Evocation et représentation pourraient donc être vues comme processus et produit d'un même acte de pensée sans que celui-ci s'actualise nécessairement (c'est-à-dire se réalise de manière effective).
En résumé, l'évocation donnera lieu ou non à une production de signes (ou pseudo-signes mentaux). En revanche, dans le cas d'une interaction didactique, si l'un des interlocuteurs souhaite que sa représentation soit partagée par autrui de la manière la plus satisfaisante possible, il sera sans doute nécessaire de reformuler, d'étendre le discours de manière à ce que les évocations et les représentations deviennent effectives, que les représentations annexes associées le soient aussi, que les expériences antérieures partagées soient elles-mêmes évoquées effectivement. D'une manière générale, la richesse de la production sémiotique (discursive ou autre), l'articulation de celle-ci avec les tâches en cours et le souci de s'appuyer sur des représentations effectivement partagées constituent autant de conditions de réussite pour la communication.
Néanmoins, nous verrons plus loin que les choses ne sont pas toujours aussi simples. En effet, les situations d'apprentissage mathématique entraînent une modification du statut, et donc aussi des représentations, des objets mathématiques impliqués. Dans une situation qui évolue, les objets mathématiques reposent sur des représentations individuelles provisoires et ces dernières évoluent ainsi que le discours lui-même. Ce n'est qu'à l'issue d'une phase d'institutionnalisation par le professeur que l'on va pouvoir à nouveau ramener les nouvelles connaissances à des représentations partagées. La TSD, notamment selon Bloch et Gibel, attribue au système organisateur ce rôle de réaménagement. Seuls des réinvestissements ultérieurs, des consolidations ainsi que des évaluations pourront garantir à ces représentations un caractère considéré comme véritablement partagé mais la délimitation précise de cette zone de partage représentationnelle restera néanmoins un idéal car elle conservera irrémédiablement un caractère subjectif. Cerner au mieux cette zone de partage devra donc rester le souci constant de l'enseignant. La question (implicite) sera toujours la même : que puis-je *légitimement* considérer, à un instant donné, comme faisant partie du répertoire de représentation de la classe ?

Revenons maintenant aux productions sémiolinguistiques (verbalisations intérieures, mentales) qu'une représentation quelconque peut susciter. Une représentation, de manière générale est un ensemble d'éléments divers disponibles mais non nécessairement actualisés. Lorsqu'une explicitation linguistique s'avère nécessaire, celle-ci aura lieu soit dans la langue 1 (L1) soit dans la langue 2 (L2). De manière réciproque, des discours en L2 viendront modifier ou étendre des représentations qui avaient été élaborées, à l'origine, en L1. Très souvent, des conditions d'évocation (de représentations) en apparence similaires ne donneront pas lieu à des énoncés traduisibles mot à mot. Ainsi, lorsque le Français dira « déplacer de la gauche vers la droite », l'Anglais dira souvent « move across », privilégiant ainsi l'aspect transversal par rapport à la précision directionnelle.



Point **(6,4)** is

6 units **across** (in the **x** direction), and

4 units up (in the **y** direction)

Figure 2.1

La question de l'appréhension du mouvement dans une perspective anthropomorphe est un objet d'étude pour la linguistique cognitive :

> La linguistique cognitive conçoit l'organisation du lexique et des constructions comme les traces de la conceptualisation de l'expérience du monde par le sujet parlant. Elle considère les structures langagières comme le reflet de structures conceptuelles sous-jacentes. (Barnabé, 2013, p2).

Le corps y est décrit comme une relation au monde et ceci a pour conséquence une manière très spécifique de traiter des prépositions et des particules :

> Svorou définit la représentation spatiale de across :
> Across: the landmark is treated as a stative entity with two boundaries; the trajector is treated as traversing the landmark from one boundary to the other (Svorou, 1994, p 237). Across et from sont soumis à deux configurations géométriques distinctes, comme l'indique la Figure n° 3 :

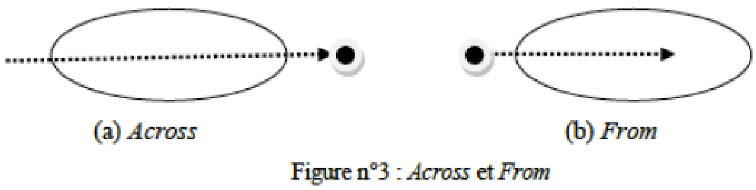


Figure 2.2 Extrait de Barbé (2013)

Le rapport à la spatialité est une composante importante dans l'apprentissage d'une langue car il concerne une part importante du lexique et de nombreuses expressions.

En tant que thème transdisciplinaire par excellence, le thème de l'espace et le rapport qu'il implique entre l'individu et ce dernier nous amène à entrevoir des possibilités effectives de travaux conjoints entre le professeur de mathématiques (espace et géométrie), celui d'histoire et de géographie (espace symbolique, territoires), celui de langue vivante étrangère et celui de français (espace physique, espaces idéalisés, cultures, etc…). Mais on peut également envisager l'espace à travers ce qu'en diront les enseignants d'éducation physique et sportive, lorsqu'ils se réfèrent, par exemple, au rapport de l'individu à son milieu en se rapportant à la notion de corps comme possibilité de repère mais aussi comme lieu du ressenti d'équilibres ou de déséquilibres. Pour le professeur de géographie, par exemple, l'espace concret, le réel, « apparaît sous forme de *représentations* qui varient suivant les individus et les sociétés. Il est le résultat de la rencontre du monde matériel et de la subjectivité humaine » (Bédouret 2012). La notion de représentation sociale propre à une communauté peut être mise en rapport avec le caractère individuel des représentations cognitives au travers d'éléments représentationnels appréhendés comme des caractéristiques partagées ; ce que nous allons examiner au III.

La fluidité de la langue repose à nos yeux en grande partie sur une capacité à catégoriser les contextes, mais aussi à prendre conscience de l'implication des sens, y compris à un haut niveau d'abstraction.
Ce point de vue semble apparemment rejoindre celui adopté en linguistique cognitive, mais pour l'instant sans aucune préoccupation d'ordre didactique explicite. En parlant des schèmes-images, Barbé déclare ainsi :

> Les schèmes-images sont construits et abstraits à partir de l'expérience incorporée et socialement située du monde, ce qui leur confère à la fois une assise culturelle et sensori-motrice. (Barbé, 2013, p2)

Rappelons par ailleurs que la plupart des métaphores revêtent un caractère fondamentalement spatial[38] (y compris les métaphores temporelles). Une maîtrise correcte de celles-ci passera invariablement par un retour réflexif (*cultivé*, c'est-à-dire *développé*) sur le rapport de la langue avec la spatialité.
La linguistique cognitive permet un éclairage très pointu des processus de conceptualisation en langue et les travaux récents ne devraient pas manquer d'avoir à moyen terme des répercussions en didactique des langues. L'analyse des déplacements y est en effet finement décrite :

> En tant que langue à satellites, la langue anglaise exprime le chemin par une préposition, tandis que le mouvement est encodé par le verbe (Slobin, 2004 : 26 ; 2003 : 161), comme dans l'exemple :
> They crawled into the open space. (cité dans ibid)

Néanmoins, la présence de nombreux courants se réclamant de paradigmes parfois opposés risque sans doute de retarder encore quelque temps un apport effectif éventuel de la linguistique cognitive en matière de didactique des langues (voir Fuchs, 2004, pour une description des divers courants). Pourtant, compte tenu de notre problématique et de notre volonté de donner à nos travaux une approche cognitive, nous avons besoin de nous positionner quant à la nature du rapport entre pensée et langage. Au III.7, nous aborderons en effet la question de pensée sans verbalisation. Nous estimons ainsi, en reprenant la description que Fuchs donne du paradigme retenu dans la psychomécanique de Guillaume, que *la pensée indépendante du langage se saisit elle-même via la langue, révélant ainsi ses schèmes cognitifs et que le langage constitue le moyen qui permet à la pensée de se penser elle-même* (voir aussi Valette, 2003). Cela dit, la distinction entre une pensée verbalisée et une pensée sans verbalisation (voir III.7) nous apparaît suffisante pour décrire les raisonnements en

[38] Pensons par exemple aux métaphores suivantes : *couvrir* des domaines particuliers, *surmonter* les obstacles, *traverser* des épreuves, *mettre de l'ordre* dans ses idées, *soulager* sa peine, *prendre* son courage *à deux mains*, etc...

mathématiques et leur rapport à la L2, sans que nous entrions davantage dans des questions de positionnement à l'égard de l'un ou l'autre des courants cognitivistes. Remonter jusqu'à la pensée nous a cependant paru nécessaire pour pouvoir articuler les concepts de représentations (au sens cognitif), de signes, de mots-concepts dans leur rapport aux langues (L1 et L2) et dans une prise en compte des questions d'ordre sémantique. Celles-ci seront objet d'étude dans les chapitres suivants.

Nous revenons maintenant sur le concept d'*évocation*. Chaque terme que nous utilisons, quelle que soit la nature du discours, renvoie implicitement à l'ensemble du discours à la fois produit et en train de se produire mais aussi aux expériences signifiantes antérieures pour lesquelles ce terme a été utilisé ou encore aux diverses représentations auxquelles nous avons attaché, d'un point de vue sémantique et lexical, ce terme. Il en va de même d'un terme relativement à un texte, à ceci près que ce dernier ne possède pas le caractère interactionnel que possède en général un discours.
Lorsque nous utilisons le mot *articulation* et que nous l'appliquons de manière métaphorique à des concepts (*articuler* ou encore *croiser des concepts*) nous évoquons quelque chose se référant par *analogie* à ce qu'évoquerait ce terme dans une situation plus concrète, situation pour laquelle la signifiance apparaît comme plus accessible (souvent imagée et expérientielle). Ainsi donc ─ et il en va de même pour n'importe quel terme abstrait, conceptuel, notionnel ─ nous nous exprimons en faisant en sorte que l'évocation souhaitée puisse être partagée. L'évocation s'appuie sur diverses formes de signifiance et sur la perception d'un lien entre celles-ci (signifiance lexicale, représentationnelle ou expérientielle). Nous ne pouvons ignorer que la délimitation du contenu sémantique (ou de signifiance) attaché à toute évocation contiendra toujours une certaine imprécision, une inévitable part de *flou* (au sens de non saisissable *parfaitement*) puisque l'évocation est appréhendée en tant que possibilité de production de sens mais que cette production de sens reste en dernier ressort à l'état de métaphore au niveau lexical tout renvoyant le lecteur à une expérience signifiante personnelle. La lecture de notre texte est donc ici fortement *porteuse*.
Le vécu, au travers des expériences personnelles, est inévitablement impliqué dès lors qu'il y a évocation. La récursivité ou encore la régression à l'infini, inhérentes à toute tentative de définition d'un mot par des mots, ne nous empêchent cependant pas de produire un discours pour lequel on ne pourra simplement *que souhaiter* qu'il soit cohérent. Cette cohérence ne sera appréciée, *en dernier lieu*, que relativement à un sentiment profond et global suscité chez l'autre, indépendamment des rapports de signification des termes d'un énoncé dans une lecture extérieure, entre autres. En ce qui nous concerne, aucune norme ne garantissant jamais, de manière définitive, la cohérence, il ne nous reste qu'à tenter au mieux, compte tenu de nos propres expériences, lectures, analyses, de mentionner, d'expliciter, d'exemplifier ce que l'on juge nécessaire et à chaque moment où cela semble être le cas. Lorsque nous utiliserons des termes tels que représentation, signe, évocation, nous espérons que nous évoquerons chez le lecteur des choses qui seront perçues comme recevables du point de vue de la communauté de discours et/ou de pratiques à laquelle il appartiendra. Comme nos travaux se situent au confluent de plusieurs domaines disciplinaires, il est néanmoins difficile de tenir un discours qui puisse satisfaire complètement chaque membre de chaque communauté.

II.2. Exemplification (ultérieure) au niveau didactique et expérimental

Nous montrerons dans la suite de nos travaux, et notamment dans la partie expérimentale, comment s'actualise l'articulation entre les concepts de représentations, de signes et de discours. Nous souhaitons néanmoins, dès à présent, familiariser le lecteur avec cette question et la manière dont nous envisageons de la traiter par la suite à un niveau plus pragmatique. Lors de l'élaboration de nos séances expérimentales, nous nous placerons, d'un point de vue didactique, à des niveaux surdidactiques au sens de la TSD (voir chapitre 1). Cela dit, dès le stade d'élaboration, des représentations sont sollicitées, ou encore, sont à l'œuvre chez l'enseignant désireux de mettre au point un projet de séquence. En ce qui concerne la spécificité de certaines de nos séquences, les représentations convoquées ou impliquées seront celles qui concernent, entre autres, la notion de *preuve visuelle*. Ces représentations font partie du répertoire de l'enseignant mais pas de celui des élèves. La notion de preuve visuelle n'est pas quelque chose qui fait habituellement partie de la culture éducative des enseignants et donc encore moins de celle des élèves. Nous aurons donc ainsi la possibilité de voir évoluer, chez ces derniers, de telles représentations et il sera nécessaire de préciser la nature et les modalités de cette évolution. Par ailleurs, de nombreuses situations (dont certaines seront adidactiques) donneront lieu à des productions de signes multiples et variés, en l'occurrence, de nature symbolique, discursive mais aussi gestuelle ou autre. Le caractère multimodal de ces productions et interactions sera donc pris en compte. Nous aurons donc aussi la possibilité de tenter d'établir une correspondance entre les signes produits lors des situations et les représentations en train d'évoluer. Nous traiterons donc les signes produits à la manière d'*indices*. Nous considérerons ainsi que ces signes sont des indices des représentations cognitives des élèves. Le caractère interactionnel et la spécificité des situations concernées permettront donc d'exemplifier, de mettre en relief, de manière significative, les concepts que nous avons mentionnés dans le paragraphe précédent.

Par ailleurs, mis à part les signes discursifs (produits dans les interactions) et les éléments tels que les manipulations d'objets concrets ou les gestes accomplis à des fins d'explication, certains signes (notamment les signes symboliques, formels) seront produits de manière assez isolée. Il va donc nous falloir examiner par la suite les choses sous un autre angle, c'est-à-dire examiner, étudier de plus près les signes lorsque nous les considérons comme isolés. Il nous faudra néanmoins être vigilants et garder présent à l'esprit que tout est ici question de point de vue, comme toujours d'ailleurs si l'on veut bien l'admettre, et que les signes que l'on considérera comme étant isolés lors de l'analyse des situations expérimentales ne le sont qu'au titre d'un examen à première vue. En effet, ces signes auront été produits lors d'interactions, lors de réflexions et seront donc très fortement contextualisés. Le danger serait donc qu'une étude *générale* du signe en tant que signe ne prenne pas suffisamment en compte cet aspect. Nous veillerons bien sûr à en tenir compte dans le paragraphe concerné.

III. Signification « étendue » du concept de représentation

Nous allons préciser dans quelle mesure nous souhaitons élargir la signification que nous souhaitons attacher au concept *représentation*, c'est-à-dire quels sens nous souhaitons lui conférer pour la suite de notre étude. Nous proposerons également une définition de la notion de *représentation interne* afin de mieux situer les autres concepts de représentation, notamment celui de représentation mentale. Notons néanmoins déjà que tout concept, y compris et surtout celui de représentation, s'appréhende discursivement *sur la base d'un filtre qui va limiter les caractéristiques qu'on lui prête* : le concept de représentation en sociologie peut par exemple être croisé avec celui de représentation en linguistique ; les éléments retenus dans les descriptions seront notamment ceux qui participent des deux champs. Dans le cas d'une représentation cognitive, lorsqu'on la rattache à la mémoire, les éléments retenus peuvent être de nature mathématique, linguistique, visuelle (mémorisée), expérientielle (l'expérience de la nécessité et la trace qu'elle laisse dans les souvenirs portant sur celle-ci), propositionnelle (un énoncé a fait sens d'une certaine manière ; qu'en reste-t-il après coup ?) etc…

Le concept de représentation, en linguistique, est un concept central (voir par exemple Petitjean (2009). Selon Petitjean, le concept de représentation pose de nombreux problèmes de délimitation ; il est transdisciplinaire mais nécessite une démarche interdisciplinaire pour être appréhendé. Petitjean introduit le concept à partir de la psychologie sociale (voir ci-dessous, notre positionnement quant à nos propres travaux), se plaçant parfois sur des territoires tels que celui de la politique (2009, p 74) mais examinant également le rôle des activités discursives (ibid, p 154 et suivantes) et celui des activités énonciatives (p 270 et suivantes) dans la co-construction des représentations linguistiques. Elle distingue *contenus représentationnels* et *variations représentationnelles* ; l'objet direct de ses travaux est le plurilinguisme.

III.1. Premières considérations

Dans la mesure où nous serons également amené à l'utiliser fréquemment, nous avons souhaité consacrer un paragraphe complet à la notion de représentation. Nous insistons d'emblée sur son caractère polysémique et sur son utilisation très fréquente voire quasi-systématique dans les articles de recherche en sciences humaines, que ce soit en linguistique, didactique des langues, didactique des mathématiques etc…

Au-delà de la facilité de langage que permet le terme de représentation, il ne renvoie pas, en général, à un objet suffisamment clair. La représentation, d'une manière générale, est une notion abstraite, ayant parfois, mais pas toujours, le statut de concept scientifique, comme c'est le cas en sociologie, en psycholinguistique, en mathématiques, etc...

Mais la représentation peut aussi apparaître comme un concept quotidien au sens de Vygotski. Chacun, depuis son jeune âge, se trouve ainsi régulièrement exposé à des situations diverses au cours desquelles la notion de représentation est convoquée et les termes *représentation*, *représenter*, utilisés, mais avec, dans la pratique, des significations souvent différentes. Nous citons quelques exemples d'utilisation :

- une œuvre artistique représentera un personnage célèbre ou une divinité,
- on dira que l'écriture est une représentation de la langue parlée,
- on parlera de la représentation d'une pièce de théâtre,
- en mathématiques, on dessinera ou on affichera (à la calculatrice ou à l'ordinateur) une représentation graphique d'une fonction,
- on dira de quelqu'un qu'il était représenté par son avocat etc...

La notion de représentation est une notion qui, à l'origine, émerge du champ social et clinique, passe ensuite dans le champ de la psychologie du développement et enfin dans celui de la psychologie cognitive. On y recourt également en histoire et en géographie mais aussi en mathématiques (avec, dans ce cas, la coprésence extrêmement fréquente de sens différents).

En mathématiques, cela sous-entend donc une polysémie effective au travers de l'emploi régulier de ce terme et entraîne donc des risques d'incompréhension, ou tout au moins de confusion, en matière d'enseignement.
Si l'on se pose une question du type *qu'est-ce que cela représente* ou encore *qu'est-ce que cette représentation évoque véritablement,* on se rend compte que les termes *évoquer, représenter*, s'utilisent de manière similaire, dans des situations analogues et donc peuvent dans la pratique être intervertis. Pour appréhender une notion, il est toujours bon de se défamiliariser vis-à-vis d'elle. Mais pour cerner des concepts, voire les redéfinir hors de leur contexte d'origine, il en va autrement. Néanmoins, l'évocation première suscitée par la notion, c'est-à-dire celle qui consiste à évoquer ce à quoi elle est naturellement attachée sans se préoccuper de *maîtriser* son discours relativement à un cadre conceptuel, scientifique souvent, est invariablement sous-jacente, presque présente malgré notre volonté ou notre souci de créer un discours (avec parfois un sentiment plus ou moins avoué de contrainte) en référence à une communauté spécifique.
Dans son acception la plus générale, la plus courante, on peut résumer en disant que la notion de représentation a deux facettes que l'on peut aisément illustrer de manière métaphorique. On fera référence à l'une ou à l'autre selon les situations. Premièrement, et en référence à la notion de représentation théâtrale, la représentation consiste à présenter, dans le sens de rendre présent, à soi-même ou à autrui, quelque chose tenant lieu d'autre chose, une sorte d'objet fictif à la place d'un objet premier issu du monde réel. En référence au domaine de la diplomatie, la représentation consiste à substituer quelque chose à autre chose mais en conservant les caractéristiques, les attributs d'origine (l'ambassadeur est censé représenter son gouvernement ou le pays d'où il vient).

III.2. Représentation partagée

Pour qu'une communication permette à chacun de tendre vers une représentation partagée, il est nécessaire qu'elle passe par une compréhension similaire, analogue mais qui ne pourra jamais prétendre à l'identité. Une identité dans la compréhension à travers les représentations sous-entendrait que l'on puisse se mettre à la place de l'autre, ce qui est impossible. Cette impossibilité d'accéder directement à la pensée de l'autre n'empêche pas cependant que l'on puisse viser une analogie, une similarité dans la compréhension. La compréhension, l'interprétation, les représentations impliquées, pourront être considérées comme partagées si les productions sémiolinguistiques produites lors de la communication s'articulent dans l'échange et éventuellement dans l'interaction avec celles de l'interlocuteur. Les signes convoqués ne feront jamais qu'évoquer en se combinant. L'action conjointe ou l'interaction est un réel moyen de faire évoluer la compréhension de chacun vers une compréhension similaire mais toujours propre à chaque individu. Il est essentiel dans ce type de propos, et nous insistons sur ce fait, de distinguer le sens en tant que notion synonyme souvent de *signification* et le *sens vécu (interne et expérientiel)*, le *sens ressenti*, qui dans ce cas, a plus à voir avec l'émotion ou la sensation (sense and sensitivity / sense and sensibility, chez les anglo-saxons). Les intonations, les exclamations, les manifestations émotives sont également des indicateurs du rapprochement ou de l'éloignement vis-à-vis de cette zone de partage représentationnelle. La compréhension similaire ne sous-entend pas de passer nécessairement par les mêmes images mentales que l'autre. De toute façon, nous n'avons aucun moyen de le vérifier véritablement, même si, malgré tout, les progrès en neurosciences permettent déjà de proposer des représentations effectives, imagées mais néanmoins pour l'instant approximatives, de ce qu'un individu perçoit intérieurement. De toute manière, même en supposant une identité des représentations mentales (de type visuel et intériorisées), on n'aura jamais la garantie qu'elles fassent sens de la même façon chez deux individus (le sens vécu (interne) n'est donc pas véritablement accessible sauf indirectement ou pour soi-même).

III.3. Représentations sociale, cognitive, mentale, physique

Comme nous l'avons déjà mentionné, le concept de représentation sociale est issu des sciences sociales mais trouve également des applications en histoire, en géographie, en didactique des langues-cultures, en anthropologie, etc... Dans la mesure où ce concept a déjà fonctionné à un niveau didactique dans d'autres disciplines, ceci nous a incité à l'utiliser dans notre étude mais en l'adaptant et en le rattachant aux autres composantes souvent impliquée de manière implicite, à savoir la notion de représentation cognitive.

En abordant la notion de manière générale mais sous l'angle de la psychologie, on peut, si l'on se réfère au Grand dictionnaire de la Psychologie (Jodelet, 1991), faire ressortir trois composantes à cette *forme de connaissance courante, dite de sens commun* :

1. Elle est socialement élaborée et partagée
2. Elle a une visée pratique d'organisation, de maîtrise de l'environnement (matériel, social, idéel) et d'orientation des conduites et communications
3. Elle concourt à l'établissement d'une vision de la réalité commune à un ensemble social (groupe, classe, etc...) ou culturel donné.

Rappelons néanmoins, en ce qui concerne son usage le plus fréquent en mathématiques, que le terme de représentation est essentiellement associé à quelque chose de physique, de phénoménologique : on parlera de *représentation graphique d'une fonction*, on *représentera une figure géométrique dans le plan*, pour ne citer que quelques exemples. A cette occasion, il est fréquent d'interpréter ces énoncés par le biais de considérations sémiotiques. Mais, d'un point de vue didactique, on peut aussi se poser la question de savoir *quelle représentation l'élève se fait de telle ou telle situation-problème* ou encore *quelle représentation l'élève se fait de ce qu'est une fonction*.

Nous proposons ci-après quelques définitions de ce que l'on peut entendre par représentation sociale, cognitive, physique, à travers quelques citations :

> La représentation (cognitive) est définie comme un élément cognitif en relation avec un élément extérieur à lui et qui peut s'y substituer comme objet de traitement (Perraudeau 2006, cité dans Aguerre 2010)

> Une représentation mentale ou représentation cognitive est l'image qu'un individu se fait d'une situation. Elle est au confluent des sensations et de la mémoire. Dans une situation donnée, les sensations vont susciter l'activation d'informations contenues en mémoire ce qui provoquera les réactions du sujet. (extrait de l'article *représentation cognitive*, Wikipédia)

> «La représentation physique (c'est-à-dire un dessin, un schéma, un tableau…) entretient une relation de type analogique avec le réel. (Perraudeau, 2006)

> [La représentation sociale est] le produit et le processus d'une activité mentale par laquelle un individu ou un groupe reconstitue le réel auquel il est confronté et lui attribue une signification spécifique (Abric 1988)

> La représentation [sociale] est donc un ensemble organisé d'opinions, d'attitudes, de croyances et d'informations se référant à un objet ou une situation. Elle est déterminée à la fois par le sujet lui-

même (son histoire, son vécu), par le système social dans lequel il est inséré, et par la nature des liens que le sujet entretient avec ce système social (ibid.).

Remarquons qu'en didactique des mathématiques, on préférera parler de représentation sémiotique (particulière) plutôt que de représentation physique et que les analogies ne seront pas mentionnées ou établies en général avec le réel mais plutôt entre diverses représentations sémiotiques d'un même objet ou encore des représentations de cet objet dans des registres sémiotiques différents, cf. Duval (1993). Le terme est donc fortement polysémique à l'intérieur-même du domaine mathématique. L'élève d'une part, et l'enseignant d'autre part, se font à un certain moment, ou ont en mémoire, une *représentation cognitive* du travail fait dans un ou plusieurs registres de *représentation sémiotique*. Duval a examiné en détail et d'un point de vue cognitif les questions de passage d'un registre à l'autre.

L'articulation que nous proposons dans notre étude entre ces deux modes de représentation implique une étude particulière de l'objet mathématique d'un point de vue à la fois sémantique et linguistique. C'est ce que nous ferons au chapitre 3. Pour l'instant, nous considérons *la représentation cognitive comme un tissu d'informations mémorisées et structurées autour d'un mot du lexique mental*. Ces informations peuvent être vues comme des connaissances attachées au mot-concept, des souvenirs d'expériences au cours desquelles le concept a joué un rôle crucial ou significatif, des éléments sémantiques liés aux signifiés du mot-concept, des éléments sémiotiques fortement constitutifs des différentes modalités d'objectivation dans le sensible (s'il s'agit d'un mot-concept de nature mathématique par exemple)

La question se pose déjà néanmoins de déterminer, à un niveau général pour l'instant, comment articuler la notion de représentation avec la composante mathématique et la composante linguistique de notre étude. Dans un premier temps, nous retiendrons deux aspects fondamentaux : *la représentation, quelle que soit sa nature, peut être vue comme un processus (dynamique) ou un produit (fixé ou encore mémorisé*). Dans le cas d'une interaction, ou de la réalisation d'une tâche (de nature mathématique ou autre), les représentations cognitives évoluent ; elles apparaissent tantôt de manière globale, continue mais peuvent tout autant être discrétisées. Dans le cas d'un rapport à la durée d'un processus mental interprétatif, et relativement à un découpage de la situation en phases, on sera amené à parler de représentations provisoires. Les connaissances faisant partie du répertoire d'un individu et disponibles pour la réalisation d'une tâche correspondent à des représentations stables. En revanche, les connaissances en train d'émerger au cours d'une situation didactique correspondent à des représentations provisoires ou en cours d'élaboration. Lorsqu'on l'envisage comme détachée d'une situation, et sans rapport à la temporalité, nous parlerons plutôt de représentation cognitive, en la considérant comme dépendante d'éléments mémorisés et comme potentielle. Dans un rapport temporel direct à une situation effective et expérientielle, on parlera alors plutôt de représentation mentale, avec une connotation forte d'évolution et d'adaptabilité à la situation.

Dans le cas d'un groupe d'individus, d'un groupe-classe par exemple, lorsque l'activité sera élaborée dans un but spécifique et commun, et réalisée de manière socialement interactive, socialement partagée, on parlera de représentation partagée, rejoignant ainsi le sens de représentation sociale. C'est le comportement (et notamment les réactions) des membres du groupe lors de l'interaction et leurs productions sémiotiques qui permettront de dire si une représentation peut ou non être considérée comme partagée. On peut néanmoins signaler qu'une représentation dite sociale implique indirectement une référence à la représentation cognitive des individus, mais elle n'est pas attribuée à un individu en particulier. Tout ceci est donc une *question de focalisation sur tel ou tel aspect* selon que l'on considère ou non la représentation pour un individu, pour plusieurs d'entre eux ou pour la majorité des individus, avec ou sans prendre en compte les processus de pensée.

Dès lors, une représentation sera dite mentale si elle actualise une représentation cognitive au niveau de la conscience et si elle s'accompagne de la production d'éléments intériorisés de nature sémiotique. En se référant au postulat classique établi en sciences cognitives, on pourrait ajouter qu'il existe deux types de représentations mentales. D'une part, on peut considérer les représentations possédant un caractère imagé, figuratif, analogique voire iconique avec leur objet. On les qualifie dans ce cas de *représentations imagées*. Lorsqu'elles n'entretiennent pas de relation iconique avec l'objet, lorsqu'elles sont de nature propositionnelle, les représentations seront alors qualifiées *d'abstraites* (Perrin 2005).

Une représentation peut donc se substituer à quelque chose de sensible, qui se trouve dans la réalité. Elle constitue alors une abstraction de la réalité. Mais elle peut aussi, de manière inverse, consister à réifier des objets abstraits, des concepts, en produisant un substitut dans le domaine du sensible ainsi que le signale Malt :

> Plus généralement, la représentation est la présentation d'une chose à un champ perceptif d'un sujet. L'un des sens premiers de ce concept est celui de montrer, de mettre devant les yeux ou l'esprit. Ce processus opère par l'évocation de l'absence de l'objet premier par la présence d'un deuxième objet, en évoquant, en invoquant, en créant une allusion, en remémorant, en rappelant l'original à l'esprit par des mécanismes d'association divers, créant des liens entre l'original et son représentant. L'espace de la représentation est l'espace de l'imagination et de la mémoire. (Malt, 2010, p26)

La représentation permet donc d'établir un pont entre le réel et l'abstrait, entre le présent et l'absent ou encore, entre le sensible et l'intelligible, et elle est donc, en tant que processus, fondamentalement dialectique. A cet égard, Malt déclare :

> Représenter est aussi une dialectique entre le présent et l'absent. On présente un objet absent, par un autre objet présent, on invoque des objets et/ou des phénomènes, en leur absence, ou non. Le remplaçant est une évocation d'un objet premier, le représenté, par un second (la représentation). (Malt, 2010, p26)

III.4. Perception, mémorisation et représentation cognitive

L'élaboration d'une représentation mentale repose sur plusieurs composantes. La première composante correspond au traitement, par l'analyse perceptive, inconsciente, subconsciente ou consciente, des informations issues de l'environnement. La *perception active* est multimodale, elle mobilise tous nos sens. Elle inclut donc l'analyse visuelle, si utile en mathématiques dans l'analyse des figures géométriques, des diagrammes et dans la reconnaissance des symboles. Elle consiste à un déchiffrage de la réalité environnante.

A la première composante peut se superposer ou s'ajouter la pensée sans langage ou plutôt, non verbalisée. Cette pensée consciente alors à l'œuvre peut n'être qu'une pensée *sans verbalisation* ou encore une pensée pré-sémiotique (pas de production intérieure de signes standards mais perception de signaux extérieurs), elle n'en permet pas moins d'appréhender cognitivement la réalité en produisant du sens. Ce sens est alors extrêmement proche du ressenti, de ce que l'on ressent lorsqu'on perçoit en comprenant sans passer par une explicitation linguistique (intériorisée). Dans le cas de l'analyse d'une situation par l'élève,

dans une première confrontation au milieu (mais aussi par la suite), c'est le moment où « il voit » ce qu'il faudrait ou ce qu'il pourrait faire. Il analyse de façon dynamique son environnement et commence ainsi à élaborer un début de représentation.
La troisième composante consiste en un processus d'objectivation des éléments résultant de l'analyse du milieu. Il y a alors constitution d'un noyau simple, concret et imagé (Rouquette et Rateau, cités dans Bédouret 2012). Dans le cas d'une représentation partagée et en référence à une situation didactique, le noyau, que l'on peut considérer comme commun à un groupe, peut servir de base à la construction de l'ensemble de la représentation. Le noyau de celle-ci peut devenir un substitut de la réalité dans le cadre des échanges linguistiques qui ont lieu dans les interactions entre élèves ou entre élève(s) et professeur. Dans le cas d'une représentation provisoire, l'ancrage social (mais limité à la classe) de celle-ci s'effectue à travers, ou par le biais, des interactions linguistiques ou autres.
Nous souhaitons néanmoins apporter une précision importante. Par une certaine analogie avec la distinction existant, dans la sémiotique de Vygotski, entre concepts quotidiens et concepts scientifiques, nous souhaitons distinguer les représentations fortement sociales (socialement très partagées) et les représentations sociales propres à des petits groupes ou spécifiques d'une communauté. Dans le cas d'un groupe-classe, on parlera des représentations didactiques et l'ensemble des représentations didactiques partagées (considérées comme telles de manière nécessairement subjective par l'enseignant) constituera le répertoire didactique de représentations de la classe. Ce répertoire sera en relation étroite avec l'ensemble des savoirs qui auront été institutionnalisés par l'enseignant mais aussi par ses prédécesseurs ainsi qu'avec les expériences didactiques qui leur sont attachées. Il ne faudra pas oublier néanmoins, qu'en tant qu'individus d'une société (plus vaste que celle de la classe), les élèves ont un ensemble de représentations à caractère social dont certaines peuvent être considérées comme partagées et qui peuvent être (et le sont effectivement dans la pratique) sollicitées lors de n'importe quelle interaction ou situation didactique. Ces représentations sont étroitement associées aux concepts quotidiens au sens de Vygotski.
Une question telle que « *à quoi vous fait penser ...* » incite l'interlocuteur à faire émerger des éléments relatifs à ses propres représentations. Dans le cas où cette question s'adresse à un élève, il est clair que, parmi ces éléments, certains seront relatifs à des représentations de nature plutôt extrascolaire tandis que d'autres seront rattachées à des représentations didactiques propres à la classe.
Dans un autre ordre d'idées, la question se pose de savoir comment les concepts de représentations cognitives ou de représentations mentales s'articulent avec celui de mémoire.
En l'état actuel des choses, les travaux d'Abric sont très éclairants. Ceux-ci ne se réfèrent pas au physiologique mais permettent de donner plus de consistance au concept de représentation en établissant un lien entre cette notion et le fait que des éléments qui s'y rattachent soient présents dans l'esprit (en mémoire) d'une majorité d'individus (affirmation vérifiable de manière *statistique*). Nous reviendrons sur ce point un peu plus loin.
On disait autrefois, dans un but d'apprentissage et de manière à permettre une facilitation de la restitution ultérieure des connaissances, qu'il fallait *établir un maximum de connections entre les idées.* Cette affirmation est encore valable et repose toujours sur une métaphore mais c'est simplement l'*éclairage* que l'on peut lui apporter qui, globalement, a changé. Ainsi, en matière de conceptualisation, les mots, les notions, évoquent d'autres mots auxquels sont attachés d'autres représentations. Cette *métaphore réticulaire* semble très opératoire à condition de ne pas perdre de vue un autre aspect lui aussi métaphorique, à savoir l'aspect

fondamentalement *topologique*, lorsque l'on tient à évoquer une certaine *étendue* ou encore, l'idée de *voisinage* ou celle de *proximité sémantique* : on dira ainsi que des concepts ou des notions *se recouvrent, s'interceptent, se croisent.* En résumé, on pourra dire que ces concepts ou ces notions s'enracinent, au niveau cognitif, dans la spatialité[39]. Cela n'est pas surprenant car, au niveau discursif, nous parlons en général des objets abstraits en empruntant toute une phraséologie propre ou similaire à celle des termes concrets, se référant à des objets situés dans l'espace physique (une catégorie *contient* des sous-catégories, un ensemble est *disjoint* d'un autre ensemble, les parties *s'interceptent*, etc…). En mathématiques, il est souvent nécessaire, voire impératif, que les mots figurant à l'intérieur d'une question évoquent suffisamment de choses pour permettre des possibilités de les articuler et, en conséquence, plusieurs pistes de raisonnement ou plusieurs manières de ramener à ou faire déboucher la situation ou la tâche sur un raisonnement adéquat. Les possibilités de restitution d'éléments représentationnels ancrés en mémoire, les capacités de remémoration sont des éléments essentiels en matière d'apprentissage. En situation didactique, en mathématiques ou en langues vivantes pour ce qui est de notre problématique, les représentations personnelles sont donc sollicitées. Le questionnement du professeur invite l'élève à reparcourir les liens sémantiques entre diverses représentations, c'est-à-dire des représentations qu'il considère comme relevant du répertoire de représentations. Les parcours sémantiques antérieurs apparaissent donc comme des manifestations signifiantes possédant une certaines rémanence, et donc réactivables. Le répertoire de représentations sous-entend implicitement une structuration de la mémoire, structuration, ou encore agencement, que nous ne pouvons que postuler. Nous n'avons accès, à travers les échanges, les interactions, qu'à des manifestations sémiotiques qu'on attribue au fonctionnement, conscient ou non, de la pensée, et que l'on fait reposer sur la mémoire de l'élève. Remarquons au passage que ces productions sémiotiques sont très souvent multimodales car elles impliquent non seulement des productions linguistiques mais aussi des productions formelles (symboles mathématiques) ou encore, s'appuient sur la gestuelle.

III.5. Représentation socialement partagée et institutionnalisation

Le concept de représentation revêt presque immanquablement un caractère social. Si, dans cette perspective, on souhaite lui attacher des éléments propres à la psychologie sociale, il peut se révéler intéressant de se référer à l'article *Représentation sociale*[40] proposé sur Wikipédia. Il résume ce que nous entendons par caractéristiques spécifiques à ce concept dans le cadre de la psychologie sociale et en référence aux travaux d'Abric. Ce sont entre autres ces caractéristiques que nous souhaiterions attacher à la notion de représentation lorsqu'elle est appréhendée dans cette perspective :

> Dans l'expérience qui lui permit d'avancer cette théorie, Abric mit à jour en exemple, les éléments nucléaires de la représentation sociale de l'Artisan : ces cinq éléments que sont

[39] Nous considérons que les concepts, et d'une manière générale les représentations cognitives, peuvent être considérés comme agencés selon une structure en réseaux, avec en arrière-plan, l'image d'une structure neuronale, mais qu'ils peuvent tout autant (et c'est leur force) être vus d'une manière en quelque sorte topologique, en les considérant avec une certaine *étendue*, c'est-à-dire qu'ils peuvent par exemple se recouvrir, de la même manière que l'activation, la sollicitation de deux zones neuronales, au niveau physiologique, entraînerait parallèlement, au niveau de la conscience, la formation d'idées distinctes mais partageant certaines caractéristiques.

[40] Extrait de l'article consultable en ligne à l'adresse suivante :
http://fr.wikipedia.org/wiki/Repr%C3%A9sentation_sociale

> *travailleur manuel, amour du métier, travail personnalisé, travail de qualité* et *apprenti* sont dits non négociables du fait qu'ils constituent les éléments indispensables qu'un objet social doit comporter pour appartenir à cette représentation. Ainsi, un artisan qui ne présente pas un certain amour du métier, par exemple, ne peut être réellement considéré comme tel. De nombreux éléments plus instables peuvent caractériser l'objet social sans pour autant y être associé de manière systématique. De tels éléments « périphériques » permettent de classer aisément un objet social au sein de la représentation sociale - remplissant alors leur rôle facilitateur de gestion de la réalité sociale - tout en maintenant une certaine souplesse : l'objet social peut ou non présenter ces éléments sans que leur nature n'en soit fondamentalement affectée.

Il y a de grandes différences entre la représentation (à caractère fortement social) que se font les parents d'élèves, celle que se font les pédagogues CLIL et celle, idéale, que devraient se faire les enseignants CLIL, à un niveau surdidactique, quant à ce type d'enseignement. Ainsi, les parents d'élèves pensent parfois que les élèves vont devenir bilingues parce qu'ils suivent un enseignement européen. Les pédagogues CLIL estiment que les techniques développées pour un enseignement de L2 non intégré (c'est-à-dire non-CLIL), certes se transposent mais surtout suffisent pour garantir un enseignement CLIL de qualité. Dans le langage courant, et dans une vue d'ensemble, on parlera également de la conception que les uns et les autres peuvent avoir de l'enseignement CLIL.

Selon nous, et c'est ce que nous cherchons à montrer dans nos travaux, l'enseignant CLIL (cas des sections européennes de DNL mathématiques) doit être capable d'utiliser la L2 pour éclairer la nature de l'objet mathématique, certaines de ces facettes qui auraient pu être masquées dans le rapport à cet objet lorsqu'on se cantonne à la L1. Cela passe par des moments de secondarisation où la phraséologie est mise en relief d'une manière contrastive, où les faits de langue spécifiques à la L2 permettent de jeter un nouveau regard sur l'objet mathématique (voir dans la Partie Expérimentale, chapitre V, le cas de *pattern* pour des illustrations de nos considérations en la matière).

Lors des phases d'institutionnalisation (voir Comin, 2000, pour une présentation éclairante des éléments associés à l'institutionnalisation) l'enseignant va motiver auprès des élèves le choix des expressions phraséologiques qu'il a retenues, tantôt par des arguments d'utilité transversale (transdisciplinarité) mais aussi, et surtout, en rapport avec les objets mathématiques rencontrés lors des activités ou des expressions qui ont facilité la réalisation des tâches communicatives en L2. Plus précisément, ces tâches peuvent relever de la validation entre pairs, par exemple, ou encore participer de la verbalisation des raisonnements, de l'énonciation des arguments de preuve, être de nature interprétative (interprétation des consignes, par exemple). La représentation que les élèves se font de la pratique mathématique et le rapport qu'ils ont aux objets mathématiques (abstraits) en seront modifiés. Par voie de conséquence et au travers du partage avec leurs proches de leurs expériences vécues, la représentation, sociale et plus élargie, que ces derniers s'en font, risque d'être modifiée de manière selon nous positive.

III.6. Sens, sensation et idéalisation

Nous entendrons dans ce paragraphe le terme perception en tant qu'il renvoie à une perception active de la réalité. Notre but est d'éclairer les rapports existant entre perception de la réalité phénoménologique et la place que peuvent jouer les sens par le biais des sensations et de la signification que revêtent les phénomènes réels lorsqu'ils sont perçus, en étant conceptualisés simultanément ou reconceptualisés postérieurement. Selon nous, la perception des régularités des objets et des phénomènes, la reconnaissance d'invariants attachés à certaines caractéristiques observables dans la réalité (comme les notions de nombre, de relation spatiale entre les objets concrets, de symétries ou de dissymétrie, etc...), et le rapport à la spatialité de manière générale peuvent être considérés indépendamment ou en lien avec le langage naturel. Les schèmes de formulation langagière n'ont pas à être sollicités pour que la perception ait lieu. Les caractéristiques propres aux objets, lorsqu'elles sont par exemple de l'ordre des symétries, de la répartition, des agencements, sont des éléments non substantiels issus de l'acte de perception.

Notre culture numérique et géométrique, héritée en grande partie de notre apprentissage scolaire, mais pas seulement, modifie notre manière de percevoir ce qui nous entoure. Elle a une influence évidente sur la façon dont on pourra décrire les éléments que nous avons mentionnés précédemment. Cependant, il n'y a pas que la géométrie traditionnelle qui intervienne dans la perception. L'architecte, le maçon, le berger, l'artiste, le danseur, etc..., ne verront pas les mêmes choses dans la réalité.

L'imagination peut apparaître également comme une manière de percevoir activement, en les recréant, des objets idéalisés. Elle permet, et c'est ce qui est fondamental dans la pratique mathématique, de mouvoir des éléments de pensée, similaires à des objets géométriques, de manière superposée à l'espace physique et sans qu'il y ait nécessairement conscientisation réfléchie de ce phénomène mental.

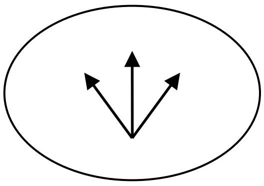
Si l'on décide de superposer aux objets concrets (extérieurs) ce type d'éléments idéalisés, notre vision devient plus efficace, plus dynamique, et permet une meilleure appréhension des caractéristiques et des phénomènes géométriques (on peut ainsi déplacer des objets, ou certains de leurs éléments, de manière idéale).

Nous estimons que tout phénomène perçu, qu'il soit intérieur ou extérieur, implique à la fois le sens et la sensation. Souvent, on oscille plutôt d'un côté que de l'autre, mais les deux composantes coexistent. Nous proposons dans ce qui suit (tableau 2.1) une représentation mettant en parallèle des éléments (de nature perceptive) relatifs, soit au sens, soit aux sensations.

Les éléments proposés vont plutôt vers le concret, d'autres vont plutôt vers l'idéal. Mais n'oublions pas que les mots ont aussi des connotations, que leur sens varie selon les contextes et que ce que nous proposons n'est là que pour évoquer, que pour donner une idée générale, les délimitations n'étant pas catégoriques.

On ne peut pas simplement opposer un mouvement d'objets concrets, d'objets réels situés dans l'espace physique, à un mouvement idéalisé, sans préciser ce que l'on entend par *mouvement idéalisé*, même en ajoutant qu'il s'agit d'un mouvement intériorisé ou imaginé.

réalité concrète	réalité idéalisée
répétitivité, succession, systématicité	causalité, vérité
agencement ordonné, enchaînement	déduction logique
sensation, ce qui est ressenti (au niveau du corps, par exemple)	ce qui est pensé (indépendamment des manifestations internes)
plaisir des sens	plaisir intellectuel
émotion / séduction	compréhension / cohérence

Sensation (produite)		sens (interne)
sensible		sensé

expérience sensitive		expérience significative
mouvement réel		mouvement idéalisé
équilibre		harmonie
musique, mélodie		texte, paroles d'une chanson
traces visibles, observables naturellement		traces idéalisées, rayons visuels
parcours physique		parcours par la pensée
substance physique, accessible par les sens		substance idéale (subtile)
lumière, luminosité		clarté
entremêlement		confusion
lien (tangible, etc)		relation (association, etc)
schéma, objet sensible, signifiant		concept, signifié
	interprétation	
changer de place en intervertissant		permuter, inverser un processus
voir (naturellement)		imaginer (sans images mentales)
pressentir (un événement)		anticiper (par la pensée, mentalement)
	effort	
	plaisir	
	peine	
	image	
	etc…	

Tableau 2.1 oscillation entre sensation et sens intériorisé

Le schéma qui suit mérite d'être affiné, ce que nous ferons immédiatement après :

⟵	⟶
mouvement spatial effectif	mouvement idéalisé
(mouvement effectivement dynamique)	(mouvement dynamique imaginé)
perçu comme extérieur	intériorisé

Nous distinguons dans ce qui va suivre trois stades dans la manière de percevoir et de conceptualiser une manipulation. Il s'agit pour nous de décrire finement ce que nous pensons être trois modes d'appréhension de ce que peut être une manipulation d'objets.

Les manipulations sont **effectives,** sont exercées sur l'environnement, le milieu, les objets du milieu. **Les sens sont fortement sollicités** et les sensations ne sont pas atténuées mais perçues comme telles. Néanmoins, elles s'accompagnent **simultanément** d'une **perception intériorisée** de ces manipulations. Elles peuvent même être conceptualisées **simultanément** par retour réflexif sur l'action elle-même, c'est-à-dire par conscientisation.	Les manipulations sont idéalisées mais surtout **imaginées** (à partir de l'interprétation d'actions originellement dirigées vers l'extérieur et à partir de l'expérience qui leur était associée). On **déplace des objets idéalisés, mentaux, par la pensée** mais de manière effective. On peut déplacer des **objets superposés aux objets physiques**. On peut permuter **une représentation mentale de cube** mais aussi des **représentations mentales de symboles** dans une écriture formelle (au tableau, par exemple).	Les manipulations idéalisées sont **évoquées,** censées être exercées sur des représentations (souvent statiques) d'objets. On **déclare** permuter des symboles a x b = b x a Mais **on ne permute pas effectivement les représentations mentales** des symboles, les représentations imaginées et superposées aux représentations physiques, matérielles de ces symboles. La permutation, et de manière générale, la manipulation, **est néanmoins toujours présente**, mais **de manière atténuée**, s**implement du fait de son évocation**.

Tableau 2.2 : manipulations et niveaux d'idéalisation

Les résultats fournis par les recherches en neurosciences vont en ce sens car l'imagination mentale et les capacités à conceptualiser apparaissent nettement accrues lorsque des sens tels que le toucher sont sollicités. Le simple fait de tenir dans la main un cube physique augmente les possibilités de visualisation mentale et de détection ou de conceptualisation des propriétés géométriques associées. Par ailleurs les zones du cerveau attachées à la vision sont aussi celles qui sont sollicitées lors de la production d'images mentales. Ce que nous avons ajouté concerne l'implication de sensations plus subtiles, provoquées par le fait d'évoquer. S'agit-il du sens du toucher, de la palpabilité ? Nous n'avons malheureusement pas d'éléments de réponses par rapport à cela (c'est-à-dire relativement à une adéquation entre notre modèle d'interprétation et la réalité physiologique) et, de toute façon, cela déborde du cadre de nos travaux.

Néanmoins, nous avons choisi dans l'une des situations expérimentales, de construire un milieu consistant, notamment du point de vue du rapport de l'élève au concept para-mathématique de preuve, milieu permettant à cet égard un rapport direct au sensible (chapitre 8, Somme des Cubes). Les considérations que nous venons d'évoquer prendront encore davantage de signification mais il est clair que l'accès à des objets physiques, matériels, a contribué à augmenter les possibilités de contrôle du sens par les élèves, en phase adidactique.

Pour l'instant et à des fins d'illustration, nous proposons un exemple de figures schématiques susceptibles d'être rencontrée en mathématiques. Les considérations qui suivent serviront de base à l'élaboration de documents utilisés dans nos situations expérimentales.
Le rôle des flèches consiste à objectiver ce qui est de l'ordre d'une manipulation. Les flèches apparaissent ainsi comme des éléments implicites mais invitent le lecteur à idéaliser par la pensée une manipulation d'un type très précis et, en tout cas, parfaitement clair pour celui qui a l'habitude de la pratique des mathématiques[41] :

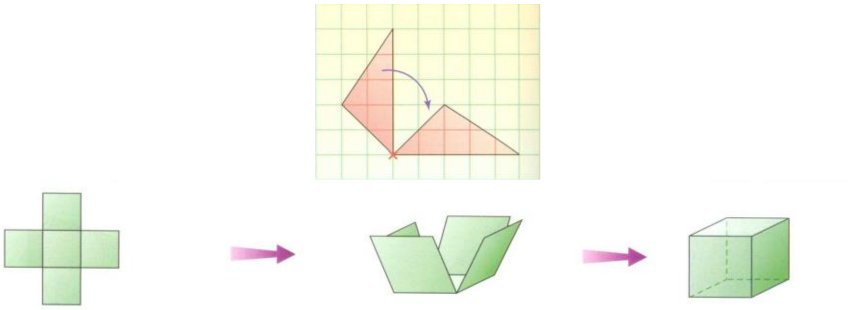


Figure 2.3

Les images mentales dynamiques et leur subdivision en schèmes cognitifs (mentaux) associés ne sont pas nécessaires pour la compréhension de la manipulation évoquée. Ce que nous avons tenté de décrire précédemment se ramène à insister sur le fait qu'une représentation idéalisée est**,** ou n'est pas, nécessairement actualisée (au niveau de la conscience imaginative) mais que son évocation implique le recours aux sens, ne serait-ce que de manière subtile. La mémorisation sensorielle d'expériences antérieures suffit à appréhender l'articulation conceptuelle entre les éléments associés à la représentation physique (la figure), éléments statiques, et la manipulation dynamique évoquée par la flèche. Les éléments proposés vont plutôt vers le concret, d'autres vont plutôt vers l'idéal. Mais n'oublions pas que les mots ont aussi des connotations, que leur sens varie selon les contextes et que ce que nous proposons n'est là que pour évoquer, que pour donner une idée générale, les délimitations n'étant pas catégoriques.
On ne peut pas simplement opposer un mouvement d'objets concrets, d'objets réels situés dans l'espace physique, à un mouvement idéalisé, sans préciser ce que l'on entend par « mouvement idéalisé », même en ajoutant qu'il s'agit d'un mouvement intériorisé ou imaginé.

IV. Représentation et verbalisation

IV.1. Pensée sans verbalisation

Il peut sembler curieux, au premier abord, de réserver un paragraphe à ce qui est souvent désigné par *pensée sans langage* dans des travaux dont les objets essentiels sont de nature linguistique et mathématique[42]. Pourtant, cela nous semble tout à fait nécessaire et non pas simplement pertinent. A l'expression *pensée sans langage* nous préférons *pensée sans verbalisation*. En effet, il existe, chez les animaux, des modes de communication par des

[41] Certaines illustrations proposées sont extraites de l'article de Jehad Alshwaikh, intitulé *reading geometrical diagrams: a suggested framework.*
[42] Voir Fuchs (2004) pour une allusion à plusieurs paradigmes en linguistique cognitive, en ce qui concerne notamment la place de la pensée dite sans langage, du rôle du langage dans le façonnement de la pensée, etc…

signes qui ne sont pas nécessairement de type linguistique. Ces signes peuvent être de nature comportementale, impliquer des sens tels que l'odorat ou le contact physique. Chez les abeilles les signes employés constituent même un langage particulier. Nous pensons néanmoins qu'il existe également un mode de pensée qui repose sur un traitement de signes perçus et donne lieu à une production consciente de sens. Ce type de pensée n'est donc pas sémiotique au sens où il y aurait production de signes mais impliquerait un traitement sémiotique des données perceptives. Ainsi, lorsque nous regardons un film muet, comme par exemple un film de Charlie Chaplin ou plus récemment un film comme *the Artist* ou *Blanca Nieves*, nous percevons sans conteste un sens global, un sens plus local pour chaque scène, nous suivons la trame complète comme une véritable narration et cela, chose surprenante, sans avoir recours, quasiment à aucun moment, à une pensée sémiolinguistique de type habituel. Il faut reconnaître qu'il s'agit là de situations ou d'expériences où le sens est très proche de, voire rejoint, l'émotion, le ressenti. Lorsque nous *cherchons quelqu'un des yeux*, il n'est pas nécessaire que nous verbalisions intérieurement tandis que nous faisons plus que percevoir.

Ainsi, le sens ne sous-entend pas nécessairement le recours au langage ou à la pensée sémiolinguistique (pensée accompagnée d'une verbalisation intérieure). Lorsque nous nous déplaçons, par exemple, et que nous arrivons à destination, nous n'avons pas besoin de nous exprimer « *voilà, nous sommes arrivés* », ni intérieurement, ni à voix haute pour réaliser que nous sommes bien arrivés. On pourrait multiplier à l'infini les occasions ou nous pensons sous cette forme.

Ainsi, dans la pratique mathématique, il est clair que l'on recourt soit au langage formel, soit à la langue naturelle. Il est pourtant tout aussi clair que l'on peut appréhender certaines tâches sans recours à une explicitation sémiolinguistique (intériorisée ou non) : la lecture d'un diagramme, l'analyse d'une figure géométrique, l'appréhension de certaines propriétés relative à cette figure (géométrie dite perceptive), traitement de problèmes relatifs à celle-ci. On peut également lire *en diagonale* une démonstration formelle, c'est-à-dire sans passer par la réactivation du sens correspondant à chaque étape syntaxique et pourtant percevoir le sens global, voire la cohérence de cette démonstration parce qu'elle correspondra à quelque chose de très familier. Cela va même plus loin car on peut très bien sentir, de manière intuitive, une possibilité de démonstration (algébrique ou non), voire son déroulement, avant même de l'actualiser, en pensée, à l'aide de signes mathématiques.

Cette pensée sans verbalisation est étroitement liée à notre perception. On dit que pour comprendre, lorsqu'on est en face d'une situation inhabituelle, lorsque le problème semble résister, il est nécessaire souvent de *voir autrement* afin de faire surgir les idées permettant d'apporter une solution. Ce type d'approche consiste à déceler des signes au travers de ce qui est perçu. Le traitement visuel (ou autre, c'est-à-dire conceptuel par exemple) qui a lieu lors de ce type de perception consiste souvent à analyser la figure (ou la configuration problématique) en termes de nature fondamentalement cognitive : déceler des similitudes, distinguer les objets, établir des correspondances, repérer les éléments les uns par rapport aux autres, les regrouper, les associer par la pensée, rechercher des symétries, des arrangements, des dispositions particulières, permuter, séparer, enchaîner des éléments de façon dynamique etc... La pensée sans verbalisation repose sur ce type de perception. Il s'agit de perception active et non passive. Le regard actif que nous portons sur notre environnement précède souvent les actions effectives sur celui-ci. Il constitue d'ailleurs déjà une action en soi. Notons également que ce regard peut très bien être intériorisé complètement. En ce qui concerne le type de perception que nous venons de mentionner, les actions que nous avons citées à titre d'exemples peuvent très bien n'être que potentielles. La simple possibilité, ou mieux, potentialité, d'action (visuelle ou conceptuelle) peut, comme nous l'avons déjà fait remarquer plus haut, faire naître un sentiment proche de l'évocation effective créée par un signe plus classique comme un signe linguistique par exemple.

En ce qui concerne la pensée sans verbalisation, nous souhaitons signaler également un autre point important. Il est en effet fréquent de voir une requête d'explicitation ou d'explication par l'enseignant se révéler contre-productive lorsque l'élève est en cours de réalisation d'une tâche qu'il est en mesure d'effectuer mais pas de commenter ou justifier convenablement ou facilement de manière verbale (cas d'un calcul complexe de nature formelle à effectuer par exemple). Dans tous les cas, ce mode de pensée ne permet pas la communication. Pour que celle-ci puisse avoir lieu, il est nécessaire d'avoir recours à la langue naturelle, aux signes sémiolinguistiques et/ou mathématiques (symboliques, formels) sans oublier la gestuelle. Il est important de pouvoir mettre des mots (ce que nous avons essayé de faire de la manière la plus fine possible) sur des domaines et des objets de nature extralinguistique, et la pensée sans verbalisation en fait partie. Une action, quelle qu'elle soit, doit pouvoir être décrite par le locuteur et l'interlocuteur. Que l'on considère la manière de lire un diagramme, d'analyser une figure, de calculer mentalement, toutes ces actions doivent pouvoir se transcrire par des mots et, en règle générale, cela a lieu.

Certaines de nos situations expérimentales concernent des preuves visuelles. Néanmoins, nous pouvons déjà faire remarquer que la notion d'*implicite schématique* est à la base de ce type de représentations visuelles. La perception du principe implicite d'extension algorithmique de la figure peut être effectuée sans recours au langage, sans passer par les mots. Les preuves visuelles, à cet égard, sont aussi appelées *preuves sans mots* (proofs without words). Notre but, dans ce genre de situations, est d'amener les élèves à pouvoir expliciter un tel principe et cela de manière à la fois *schématique* **et** *verbale*. Compte tenu de l'objet de notre thèse, il sera intéressant de savoir jusqu'à quel point les élèves peuvent aller, à la fois dans la compréhension non sémiolinguistique, au niveau de la perception active et de l'analyse visuelle, mais aussi dans l'explicitation verbale en L2 et/ou schématique sans qu'ils se sentent obligés de recourir à la L1. Pour ce qui concerne l'une des situations, les élèves devront interpréter des consignes (en L2) les invitant à concevoir une représentation et une généralisation schématiques à travers la manipulation de cubes concrets.

L'appréhension du principe implicite d'extension aura lieu au cours des manipulations elles-mêmes et il est prévu que cela se fasse sans recours à une pensée sémiolinguistique mais par une perception directe de l'algorithme sous-jacent à, ou émergeant de, la tâche. Autrement dit, cette perception du caractère algorithmique doit survenir d'elle-même, dans et par une perception adéquate des manipulations. Nous reviendrons sur tout cela en détail. L'articulation cognitivo-langagière entre les gestes et les explicitations ou descriptions verbales liés à la démonstration multimodale (effectuée par l'un des élèves vers la fin de cette séance) sera aussi analysée, cela va sans dire.

En ce que qui concerne l'analyse sémique du mot-concept *pattern*, analyse que nous effectuerons dans le chapitre 5, nous pouvons dès à présent illustrer nos propos précédents par un examen des rapports que ce concept entretient avec la pensée sans verbalisation. Comme on le détaillera plus loin, ce concept entretient un lien étroit avec la perception. Reconnaître un *pattern* physique, matériel (un motif), reconnaître un *pattern* dans un phénomène (phénomène récurrent, phénomène répétitif, tendance) ou un comportement (type de comportement, habitude particulière, pratique), reproduire, étendre un *pattern* schématique, sont autant de facettes du concept. En ce qui concerne celles-ci, les délimitations, qu'elles soient matérielles (pour un motif), idéalisées (pour un phénomène), interprétées en termes de représentations (pour un comportement) impliquent une délimitation dans le champ de la perception, et sous-entendent un traitement inconscient ou conscient des informations perçues à partir de la réalité sensible ou de la réalité conceptualisée à laquelle renvoient les concepts de phénomène, de comportement, par exemple. La reconnaissance ou le repérage d'un *pattern* sous-entend une analyse consciente volontaire ou involontaire. L'appréhension cognitive du *pattern* implique fondamentalement l'analyse perceptive, la visualisation active, au niveau de la pensée sans verbalisation. La reconnaissance du *pattern* n'est possible que par la reconnaissance de traits caractéristiques et de relations internes qu'entretiennent les éléments constitutifs du *pattern*. C'est également au niveau de ce type de pensée que le *pattern* schématique peut être étendu, répété, avec souvent des images mentales en apparence individuelles mais qui très certainement partageront un grand nombre de caractéristiques chez la plupart des individus.

La conscience réfléchie qu'un individu peut avoir quant aux traits sémantiques caractéristiques de *pattern*, explicitée grâce aux résultats fournis par des analyses sémantiques, va lui permettre de mieux cerner le concept avant de pouvoir le réinvestir verbalement dans de nouvelles situations, dans de nouveaux contextes tout en enrichissant son répertoire phraséologique. La prise en compte de l'idée de modèle, de motif, de règle, attachée à pattern explique la possibilité d'utilisation de ce terme dans une multitude de nouveaux contextes. Mais cela n'est rendu possible (pour un apprenant L2) que s'il maîtrise les traits conceptuels de base. Les maîtriser sous-entend de pouvoir les percevoir, au niveau conceptuel (voir chapitre 3, IV.2. pour la définition du concept de *perception sémantique* que nous proposons). La conceptualisation passe néanmoins par un ancrage linguistique. En mathématiques, le *pattern*, schématique, graphique ou autre, doit être explicité. Cela peut se faire verbalement mais aussi schématiquement. L'explicitation verbale est nécessaire pour tendre vers une représentation partagée.

IV.2. Langue naturelle, langue spécifique et pratique mathématique

IV.2.a. Communautés de discours et communautés de pratiques mathématiques

Selon Vygotski (1997) le langage contribue à la structuration de la pensée par le biais d'interactions socio-discursives. L'école apparaît comme un endroit privilégié où l'élève est amené à développer des capacités cognitivo-langagières au travers des interactions qui ont lieu lors des situations d'apprentissage. L'élève peut donc être vu comme appartenant à une, ou plusieurs, *communautés discursives* particulières, selon la perspective adoptée. Ainsi, en tant que sujet-apprenant et indépendamment de toute référence à une discipline particulière, on le regardera comme membre de la *communauté de discours et de pratiques scolaires (en cours d'élaboration)*. Si maintenant on le considère comme élève-apprenant d'une discipline spécifique telle que les mathématiques, on dira de lui qu'il fait partie de la *communauté de discours et de pratiques scolaires mathématiques.* Nous entendons ce concept en tant qu'il fait *implicitement* et *indirectement* référence à la communauté humaine de référence plus vaste, non scolaire, reconnaissable à son *mode d'agir-penser-parler,* à ses pratiques socio-langagières d'un type particulier. Selon Jaubert et al (2001, 2003), l'école doit être le lieu où

les savoirs sont reconstruits, où les situations d'apprentissage sont contextualisées. Ces situations doivent logiquement entraîner une *réorganisation des capacités cognitivo-langagières des élèves*.
La langue peut être appréhendée comme système de signes par opposition aux autres systèmes sémiotiques (le langage formel mathématique par exemple, la *langue des signes* pour les sourds-muets…). Elle peut être aussi l'objet d'investigation par les linguistes (avec tout leur arsenal de termes techniques propres à leur communauté de discours et de pratiques : grammaire, lexique, lexico-grammaire, terminologie grammaticale, phraséologie, sémantique, syntaxe…). Dans une perspective socioconstructiviste, elle peut aussi apparaître comme le résultat d'interactions sociocognitives chez un sujet-apprenant, induisant une structuration de sa pensée (verbalisée) et lui servant ensuite de ressource sémiotique pour agir sur son environnement (social ou non). Elle n'aura pas de mode de fonctionnement unique. Celui-ci varie selon qu'un individu appartient à telle ou telle communauté discursive donnée.

IV.2.b. Langue naturelle, langue spécifique

La pratique mathématique repose en partie, d'un point de vue sémiotique, sur l'utilisation et la production de signes formels, schématiques, linguistiques de manière parfois multimodale. En ce qui concerne la place des définitions, des énoncés, des commentaires, des arguments produits lors des interactions en classe, lorsqu'ils sont de nature linguistique, on peut délimiter, au premier abord, deux domaines lexicaux assez nets. La langue utilisée se subdivise apparemment en langue naturelle et langue spécifique. On peut ainsi opposer le mot *polynôme* au mot *sommet*, dans la mesure où le premier n'est pas utilisé en dehors de la pratique mathématique et le deuxième évoque spontanément l'idée de point culminant. Mais les choses ne sont pas si simples. En effet, lorsque l'on reprend l'exemple précédent, le mot *sommet*, à l'intérieur du champ-même des mathématiques, se trouve être polysémique : on parlera des sommets d'un quadrilatère sans pour autant les considérer comme des points culminants.
Le lexique utilisé en mathématiques, en ce qui concerne les objets propres sur lesquels repose la pratique (*fonctions*, *ensembles*, *nombres*, *croissant*, *dériver*, etc...), est très souvent emprunté au lexique général de la langue (qu'il s'agisse d'ailleurs de la L1 ou de la L2) pour ensuite être appliqué à des objets spécifiques de la pratique mathématique, en un sens bien délimité, souvent nouveau (on pense à *dériver* ou *intégrer* dans le cas d'une fonction). Le problème pour les élèves est, à cet égard, le fait que les mots utilisés ont déjà un sens (voire plusieurs) dans la vie de tous les jours. Le mot *ensemble* est très fréquemment utilisé, au quotidien, sans qu'il n'évoque une quelconque relation à un objet mathématique abstrait.
Lors des phases d'institutionnalisation, le discours *méta*, qu'il soit simplement réflexif (en tant que retour réflexif sur l'activité), métalinguistique (considération sur le lexique, la grammaire, l'étymologie, etc...), se doit de prendre en considération la reprise à son compte, par la communauté des mathématiciens, d'un terme déjà bien implanté dans la langue, lorsqu'il ne s'agit pas d'un terme nouveau, spécifique aux mathématiques.
L'enseignant, conscient de cet aspect important, soucieux de négocier la formulation, reprendra les expressions proposées par les élèves, apparues lors des recherches, en phase adidactique ou en phase dialoguée et interactive, pour finalement indiquer celle que la communauté des mathématiciens a finalement retenue, en insistant au passage sur l'idée fondamentale de convention (discursive).

Lorsqu'il le jugera nécessaire, il pourra faire apparaître qu'une définition seule n'est jamais que le début ou une invitation à l'utilisation sous contrôle du maître, celui-ci étant la référence en matière de formulation recevable par la communauté de discours. Qu'est-ce qu'un *ensemble* si ce n'est ce qui *contient des éléments* (lorsqu'il n'est pas vide !) et qu'est-ce qu'un *élément* si ce n'est ce que *contient un ensemble* ! C'est ici le sens d'origine, le sens premier, naturel, du terme qui prime et qui suffit, une fois que l'enseignant a proposé une manière officielle de représenter *un ensemble particulier* : E = {1, 2, 3, …, 10} pour l'ensemble des entiers de 1 à 10.
Nous ne reprendrons pas ici tout ce que nous avons dit sur la notion fondamentale d'*évocation* mais il est clair que nous avons à cette occasion, un lien étroit entre l'objet défini dans le cadre de la pratique mathématique et ce que le terme retenu va (et selon nous fort heureusement) inévitablement évoquer au niveau des représentations des élèves.
Nous discuterons plus loin de l'exemple du mot-concept *pattern*, quant à ce qu'il représente chez un natif, quant aux traits sémantiques minimaux (en fait, les plus abstraits possibles) qui se dégagent au niveau purement sémantique et conceptuel. Ce terme, utilisé très tôt par l'élève anglo-saxon, sera ensuite, lorsqu'il abordera le chapitre sur les suites, remplacé par celui de *sequence*, en référence à l'objet mathématique que nous appelons *suite*, mais qui lui-même ne peut immanquablement qu'évoquer l'idée de *succession*, avec l'idée de temporalité qu'elle implique elle aussi.
En conclusion, il est clair que la délimitation entre *langue naturelle* et *langue spécifique* n'est souvent qu'une question de *point de vue* et dépend fortement du positionnement de l'énonciateur et du thème du discours. Il n'en demeure pas moins, compte tenu de ce que nous avons mentionné, que cette délimitation aux contours certes fluctuants, est plus qu'une facilité de langage !
Le document que nous proposons ci-après (figure 2.4) est extrait de Dale (2012). On peut y voir la distinction qui est établie entre, par exemple, *specialised mathematical terms* et *everyday words used in specialist way*. Elle reste subjective et imparfaite puisque *multiply*, *divide* sont des termes qui sont aussi utilisés hors contexte mathématique.

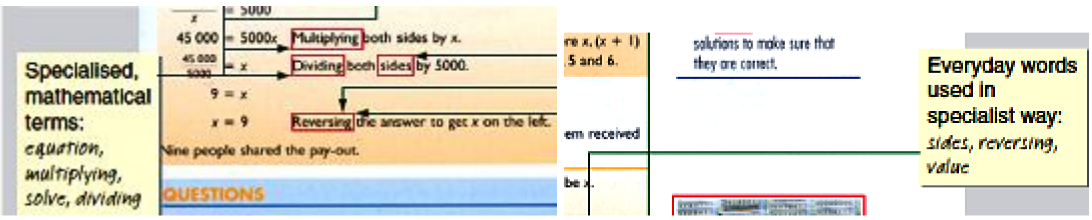


Figure 2.4

Néanmoins, le contenu du document (voir ci-dessous figure 2.5) et la mise en relief de commentaires métalinguistiques pertinents permettent une focalisation linguistique très intéressante (ce que nous soulignons) en contexte CLIL. Cette manière de procéder résulte d'études produites par des linguistes non mathématiciens, chose que nous avons déjà mentionnée par ailleurs, et est sujette à des réserves comme nous venons de le montrer.

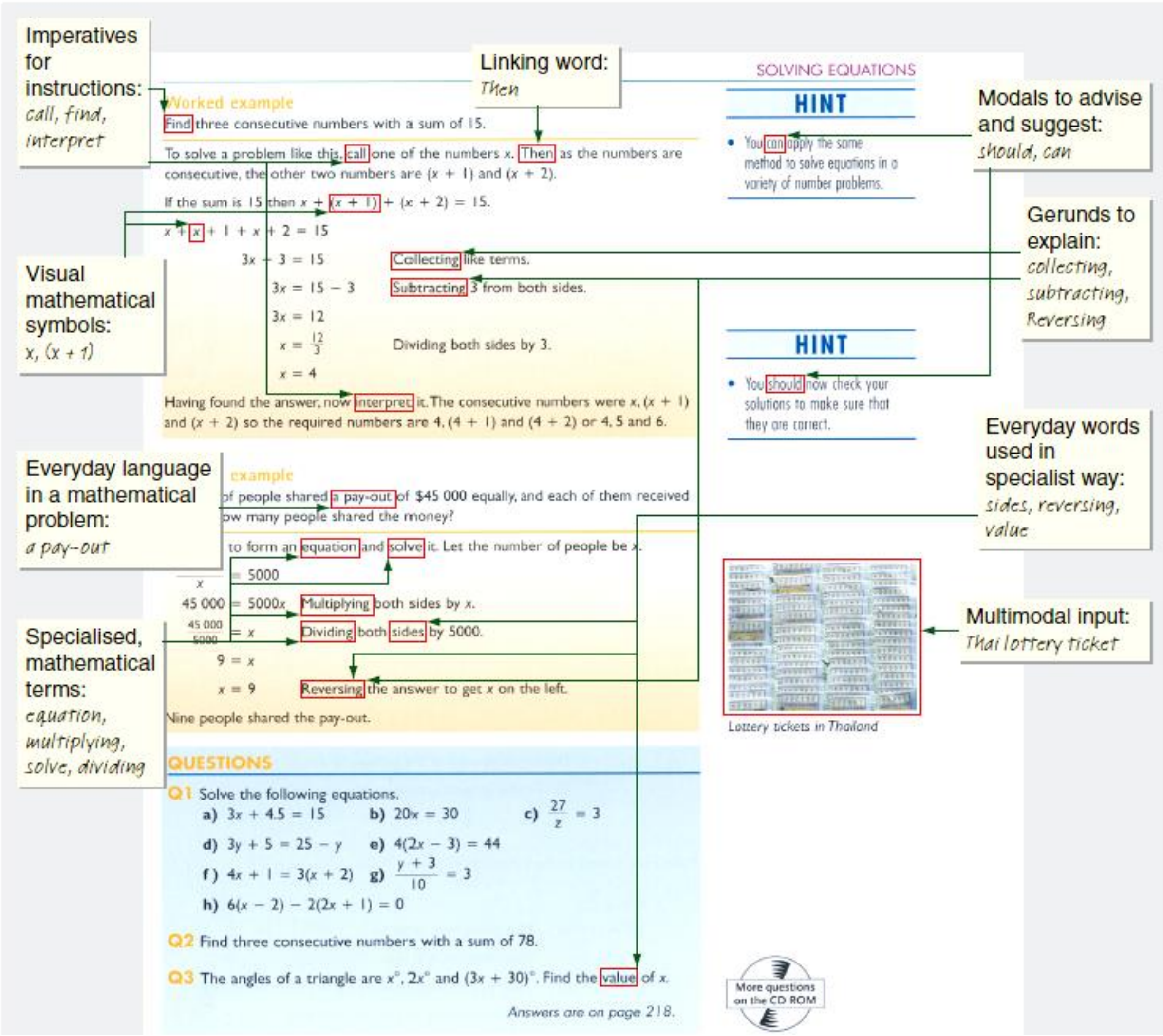


Figure 2.5 extrait de Dale (2012)

IV.2.c. Termes retenus pour la pratique mathématique

D’un point de vue linguistique et dans une perspective comparatiste L1 / L2, on pourrait examiner quels sont les termes courants et les termes spécifiquement mathématiques que la pratique mathématique dans les communautés relevant de la L1 ou de la L2 a retenus pour décrire les aspects techniques et les aspects intuitifs que nous avons résumés (de manière partielle) sur la figure suivante. Ce genre de question fait l’objet du paragraphe II.

A titre d’exemple, en ce qui concerne la propriété de *croissance* d’une fonction, c’est le terme *increasing* qui a été retenu en anglais, en allemand il s’agit de *steigend*, etc... Or plusieurs adjectifs étaient disponibles dans chacune des langues. Rappelons que l’adjectif renvoie de manière générale à une qualité et qu’une propriété mathématique n’est autre qu’un type particulier de qualité s’appliquant ou non à un objet mathématique. On aurait pu adopter les termes *augmentant* ou *grimpant* en français, ou encore « *montant* », quitte d’ailleurs à introduire des néologismes (au niveau syntaxique) en créant un adjectif à partir d’un radical existant. Il en va de même pour les autres langues : *climbing*, *augmenting*, *growing*, *raising*, sont des termes disponibles en anglais.

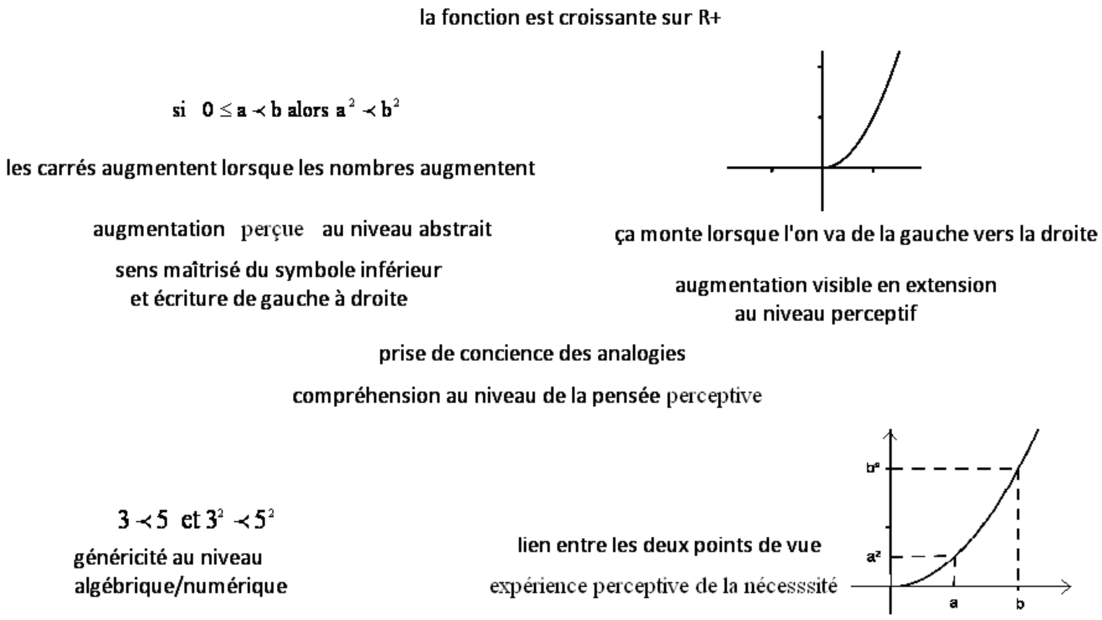


Figure 2.6

En ce qui concerne le cas de *climbing*, nous tenons à préciser, en se plaçant au niveau sémantique et syntaxique, que *climb* ne s'utilise pas uniquement de manière transitive (tout comme *grimper* d'ailleurs, en français). On peut dire en effet :

The path climbed all the way to the top of the hill.

ou encore :

Prices climbed steeply.

Dans un autre ordre d'idée, mais toujours en ce qui concerne les phénomènes de croissance et la manière de les appréhender en mathématiques, il est clair qu'au niveau conceptuel, la croissance peut être perçue de man*ière continue*, selon le phénomène étudié, mais nous la traitons de manière *discrète* : on *analyse*, au sens étymologique du terme. Le sens intuitif de croissance est, au niveau de la conscience et de la perception, souvent fondamentalement continu. C'est le cas de l'appréhension conceptuelle du phénomène de remplissage d'un récipient par un liquide. Le sens vécu intérieurement, participe de l'idée de continu. La représentation graphique l'est aussi, par le biais d'une courbe continue. En revanche, le traitement mathématique analytique ne l'est plus. La discrétisation est donc nécessaire, voire incontournable, et se traduit par une méthode dite *analytique*.

V. Représentations et mathématiques

V.1. Articulation entre représentation sémiotique physique et représentation cognitive

Chaque confrontation avec une représentation physique (diagramme, écriture algébrique …) donne lieu à la constitution d'une représentation mentale associée.

Nous postulons que nos représentations cognitives englobent une plus ou moins grande quantité d'éléments mémorisés, hiérarchisés ou structurés en mémoire, éléments pouvant être

a priori de toute nature (pourvu simplement qu'ils soient associés en mémoire). La représentation mentale, quant à elle, porte à la fois sur des éléments mémorisés et sur des éléments issus de la perception ou produits par l'imagination.
La structuration de la mémoire repose sur une métaphore décrivant les éléments mémorisés comme étant tous connectés à des nœuds (image classique de réseau sémantique).
Une représentation sémiotique physique, même statique, va donner lieu à un phénomène d'interprétation. Les éléments relatifs au processus d'interprétation, dès lors qu'on les identifie, vont correspondre à certains des constituants de la représentation mentale, c'est-à-dire situés au niveau-même de la pensée en acte. D'autres éléments sont ceux qui proviennent de la mémoire et qui subissent sans doute une adaptation lors du processus d'interprétation, par perception d'analogies, par mise en correspondance mentale d'éléments similaires, par exemple. En présence d'une représentation graphique d'une fonction, la représentation mentale repose donc souvent sur le fait de faire venir ou non à l'esprit des éléments (mémorisés) de la représentation cognitive d'une fonction.
La représentation cognitive, quant à elle, peut d'ailleurs être traitée à l'aide d'un schéma physique (du type carte conceptuelle) résumant les éléments, informations ou connaissances par exemple, qui lui sont attachées. On pourra parler de modélisation de la représentation cognitive, y compris si l'on renonce à tout schéma pour se contenter du mode discursif pour l'explicitation.

Nous examinons dans ce qui suit uniquement les représentations schématiques et nous examinons les processus interprétatifs qu'elles induisent.
Face à un schéma, il est nécessaire de pouvoir en décrire les termes constitutifs de manière recevable. Certaines caractéristiques du processus d'interprétation des diagrammes rencontrés en mathématiques ont déjà fait l'objet d'études didactiques.
Nous proposons ci-après une explicitation des éléments attachés à ce que Jehad Alshwaikh appelle *signification représentationnelle*, en référence à des représentations schématiques en géométrie (diagrammes) (Alshwaikh, 2008, 2009).
Alshwaikh distingue deux types de diagrammes (son étude porte exclusivement sur les figures géométriques planes), selon que leur structure est plutôt narrative ou plutôt conceptuelle.
La distinction de ces types de diagrammes pourrait donner lieu à une séance intéressante en contexte CLIL, séance qui porterait précisément sur le rôle des flèches, sur la place de la temporalité dans l'élaboration et l'interprétation des diagrammes géométriques ou autres.
Elle déboucherait nécessairement sur la mise en place d'un métadiscours sur les conventions, les consignes, les notations dans la pratique géométrique usuelle et pourrait d'ailleurs être étendue à l'utilisation d'autres types de diagrammes, dans d'autres branches des mathématiques, et en référence à une problématique similaire (discussion sur les *bar-charts* en probabilité etc…).

1. Diagrammes à structure narrative

Dans le cas des diagrammes impliquant une *structure narrative*, Alshwaikh insiste sur *le rôle de la temporalité* dans le processus d'interprétation (narrative) du schéma.
Il distingue plusieurs sous-catégories schématiques[43] comme nous allons le voir.

[43] Certaines des figures sont extraites de la thèse de J. Alshwaikh

- schéma à structure directionnelle

Les flèches utilisées sont de deux types :

– soit elles représentent un *mouvement* du type transformation, rotation, translation, glissement, pliage, comme sur la figure ci-dessous.

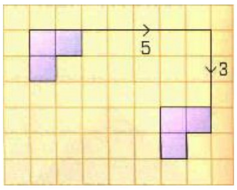


Figure 2.7

– soit elles concernent des *mesures* (doubles flèches) et impliquent la temporalité au niveau de l'action-même de mesurer, action à laquelle elles renvoient implicitement (si tant est qu'on veuille bien en prendre conscience).

Figure 2.8

En probabilité, les flèches (il s'agit parfois de branches) figurant sur un arbre de probabilités renvoient à une *succession d'étapes* telles que, pour chacune d'elles, un *choix* est considéré comme possible. La référence explicite au temps, notamment dans le cas des probabilités conditionnelles, constitue, en contexte CLIL, un moyen d'engager les élèves dans un type de discours très intéressant.

Did you see how we multiplied the chances? And got 1/10 as a result.

The chances of drawing 2 blue marbles is 1/10

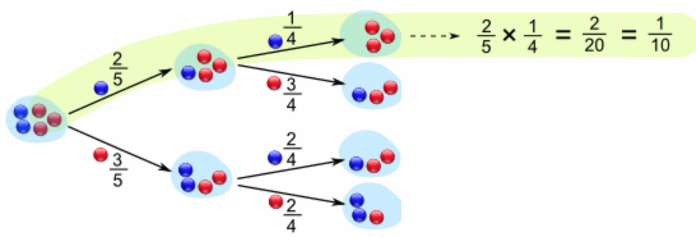


Figure 2.9

Dans le domaine des probabilités, les expériences sont théoriques et correspondent à *la modélisation d'expériences concrètes*. C'est en ce sens que le temps est impliqué. Les flèches traduisent ainsi des orientations possibles de la *situation imaginée*, en rapport à une *subdivision du temps en étapes*. Dans l'absolu, aucune voie n'est a priori privilégiée lorsque l'hypothèse d'équiprobabilité est satisfaite. Un arbre pondéré tel que celui de la figure ci-dessus correspond en fait à des regroupements de voies similaires (2 chemins identiques pour la première branche, c'est-à-dire la branche supérieure de probabilité globale 2/5, et 3 chemins identiques pour la branche inférieure, correspondant à une probabilité de 3/5).

Dans la figure qui suit (et qui sera reprise dans la partie expérimentale), les flèches représentent *une action concrète, physique* : elles correspondent à l'action d'*emboîtement* des structures pyramidales, elles-mêmes constituées d'un assemblage *rigide* de cubes-unités :

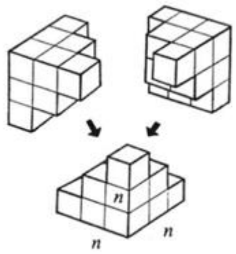


Figure 2.10

Signalons dès à présent que l'emboîtement peut être perçu comme résultat d'une action ou comme action effective. C'est à ce titre qu'il implique la temporalité.
D'un point de vue linguistique, nous serons amené à distinguer ce qui correspond à l'action et que l'on peut rattacher à l'expression *bring together* et ce qui tient lieu du résultat en utilisant les expressions telles que *fit*, ou *it's a perfect fit* pour traduire le fait qu'il s'agit d'un emboîtement parfait.

Certains schémas utilisent des flèches de plusieurs types. Sur la figure ci-contre, certaines indiquent une *extension possible* dans deux directions simultanément et une flèche donne une précision sur la boule considérée, soit comme étant ajoutée à la configuration initiale (en bleu sur la figure 2.9), soit comme se trouvant intégrée à la structure en forme de « L », elle-même étant ajoutée globalement au carré.

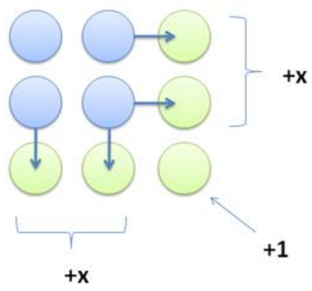


Figure 2.11

Nous retrouverons ce type de schéma à l'occasion de la séance sur les Gnomons. La figure ci-dessus a été trouvée sur le net et elle concerne le thème des *growing patterns*, thème sur lequel nous reviendrons en détail.

- Utilisation de lignes en pointillés

Elles peuvent renvoyer à une construction supplémentaire, nécessaire à la réalisation de la tâche mathématique ou simplement pour illustrer certains faits particuliers.

Sur la figure ci-dessous (figure 2.12), les pointillés correspondent à la *figure initiale* (figure 3D) par rapport au *patron* (figure mise à plat).
En tant que résultat d'une mise à plat, c'est-à-dire d'une action physique, le patron implique une référence indirecte au temps. Le temps apparaît comme une condition requise pour l'idéalisation et la production d'images mentales dynamiques aidant à la perception des propriétés géométriques liées aux actions de pliage.

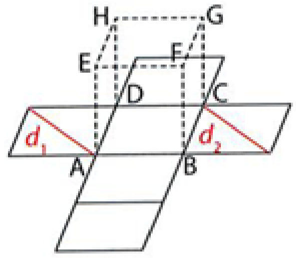


Figure 2.12

Certains schémas *combinent plusieurs types* de signes conventionnels (Figure 2.11).

La flèche de la figure ci-contre incite à *extraire* une partie de la figure initiale.

Rq : le diagramme ci-contre est qualifié de *rough diagram* (diagramme à main levée) par opposition à *neat diagram*.

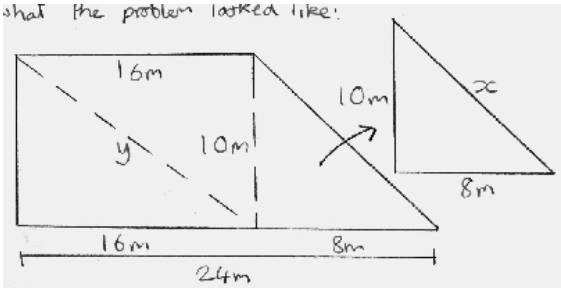


Figure 2.13

- Utilisation de coloriage ou de hachures

L'image de l'objet *d'origine* (avant transformation) est distinguée grâce à l'utilisation de hachures ou de la couleur.

La référence au temps, *à travers une figure statique*, est donc *implicite*. En tant qu'action idéalisée, le fait d'effectuer une symétrie axiale renvoie à l'action concrète de pliage bord à bord.

En tant que résultat, d'un point de vue statique, la symétrie fait penser au reflet dans un miroir et la figure globale prend en compte simultanément l'objet et son reflet. Le temps peut néanmoins intervenir indirectement dans le processus d'interprétation qui consiste à dissocier et appréhender successivement *l'objet initial* puis *son reflet*.

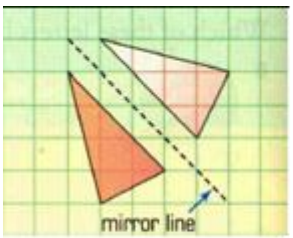


Figure 2.14 *mirror line*

On peut également utiliser la couleur *sans aucune référence à la temporalité*[44], même implicite.
En analyse, par exemple, on peut utiliser la couleur ou les hachures pour indiquer l'aire de la partie située sous la courbe et que l'on cherche à calculer.

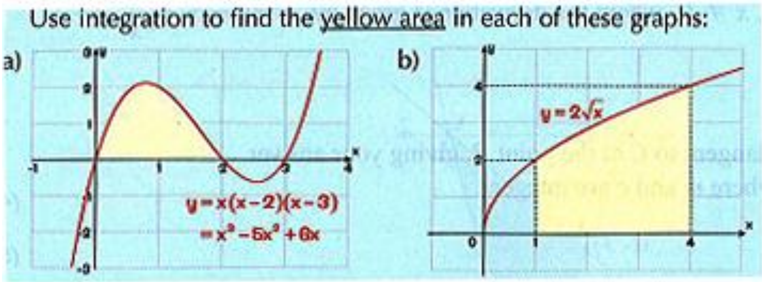


Figure 2.15

On peut utiliser la couleur pour indiquer, de manière similaire, l'aire de la partie délimitée par deux courbes :

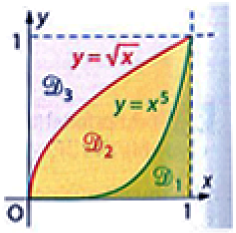


Figure 2.16 areas and graphs

- Conservation des traits de construction

Les traits de construction *récapitulent les étapes d'une construction* mais leur chronologie n'est pas toujours explicitable facilement.

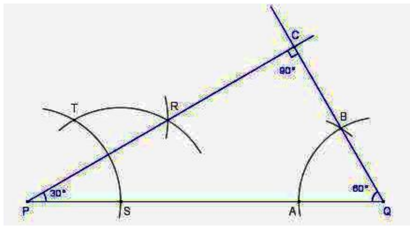


Figure 2.17

2. <u>Diagramme à structure conceptuelle</u>

Dans le cas des diagrammes impliquant une structure conceptuelle, on ne peut inférer de relation immédiate et naturelle avec la temporalité.

- La première catégorie est qualifiée de *symbolique et attributive*

Ce type de diagrammes porte sur des définitions ou des relations.

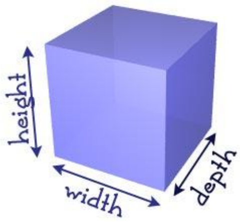


Figure 2.18 *dimensions*

[44] Nous plaçons malgré tout ici, en raison de notre propos, deux figures qui entreraient en fait dans la catégorie de schémas suivante.

"The main reason not to consider these arrows in the example as a directional feature is that these arrows 'come' from outside the diagram itself pointing to specific parts of the diagram."

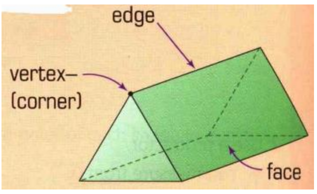


Figure 2.19 *prism*

A cet égard, la présentation des informations par des flèches ou sous forme d'étiquettes est *un moyen de mettre en valeur des données linguistiques importantes* (en L2, pour ce qui nous intéresse) Il s'agit de termes censés faire partie du répertoire de la classe et les flèches traduisent *une focalisation sur des éléments lexicaux et phraséologiques.* Ils sont intéressants pour leur caractère authentique lorsque l'illustration est extraite de manuels ou d'autres types de ressources en anglais.
Nous proposons ci-dessous quelques exemples de ce type (Figures 2.18 et 2.19).

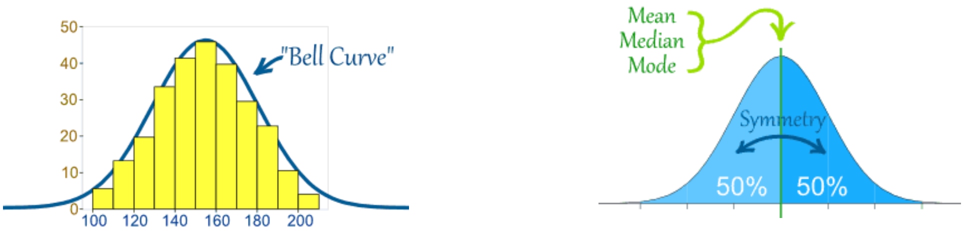


Figure 2.20 bell curves

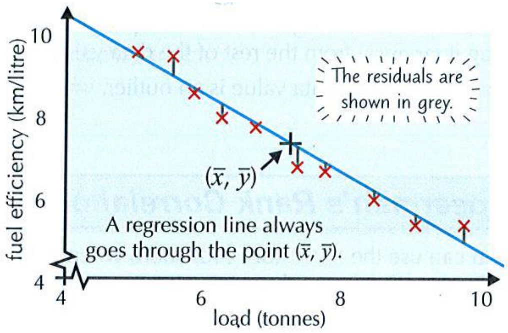
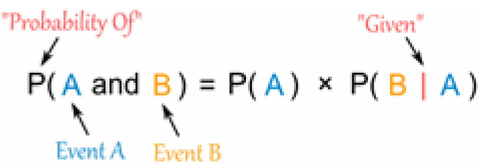


Figure 2.21 regression line



"Probability of **event A and event B** equals the probability of **event A** times the probability of **event B given event A**"

Figure 2.22 probability of the intersection of two events

- La deuxième catégorie est qualifiée de *symbolique et suggestive***.**

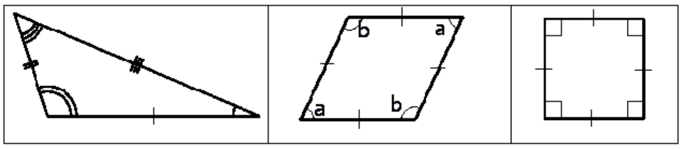


Figure 2.23

Il s’agit en fait souvent des figures que l’on qualifie de codées.
Dans le cas d’une perspective cavalière, en géométrie dans l’espace, les *pointillés* représentent des éléments *cachés* (arêtes ou autres éléments).

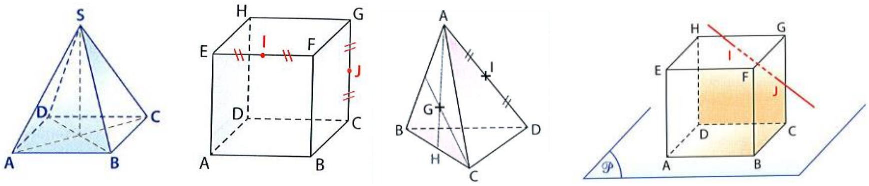


Figure2.24 hidden lines

On retrouvera ce phénomène sur les représentations 3D servant à schématiser des volumes à calculer (à l’aide d’une intégrale).

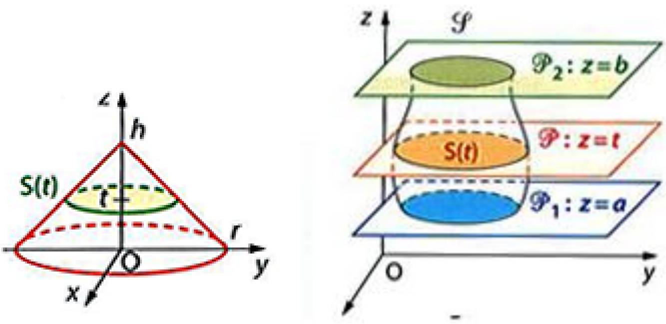
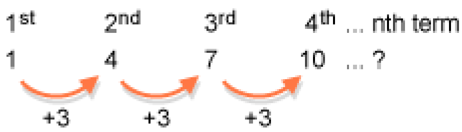


Figure 2.25 integrals and volumes

Dans le cas des représentations portant sur un thème non géométriques, les flèches peuvent jouer des rôles tout à fait différents.
C’est le cas par exemple dans la figure ci-dessous. Celle-ci illustre le *passage d’un terme au suivant* dans le cas d’une suite *récurrente* (arithmétique).



1, 4, 7, 10 is a sequence starting with 1.

You get the next term by *adding 3* to the previous term.

You are often asked to find a formula for the n^{th} term.

Figure 2.26 arithmetic sequence

Pour donner un ton humoristique, on peut également faire figurer des personnages et/ou des animaux, comme dans les illustrations ci-dessous (Figure 2.27 et Figure 2.28).

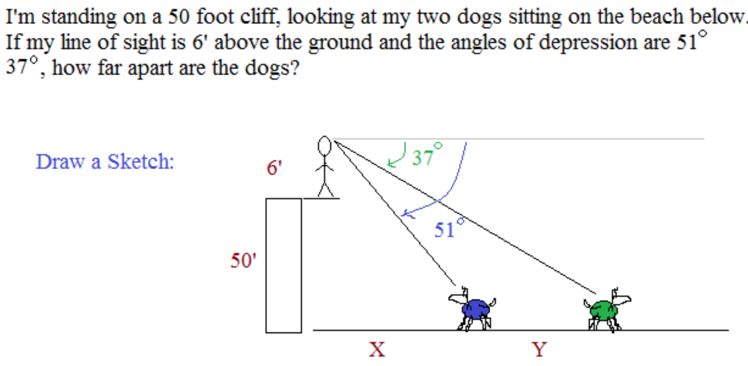


Figure 2.27 determining a distance

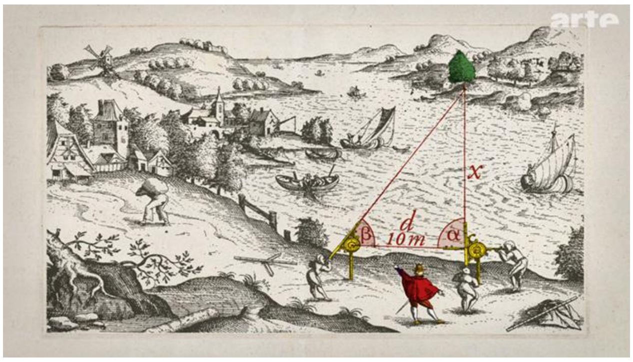


Figure 2.28

Par ailleurs, dans le cas des exercices portant sur des motifs répétés ou croissants, en liaison étroite avec le thème des suites arithmétiques ou géométriques, il est fréquent de proposer un schéma faisant apparaître les premières étapes (voir Figure 2.26).

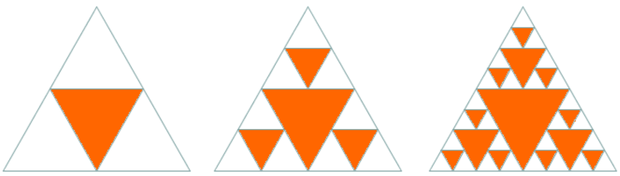
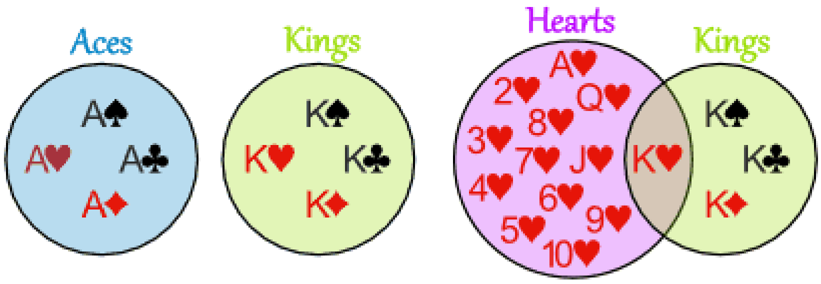


Figure 2.29 *Growing patterns*

L'élève peut ainsi s'appuyer sur des figures génériques ou alors les construire lui-même.
Elles sont en tout cas nécessaires pour qu'il se fasse une représentation adéquate et efficace de la situation. La description de ces schémas, et du principe d'extension ou d'accroissement qui les sous-tend, donnera lieu, là encore, à un discours très riche, en relation avec des éléments abstraits et avec la problématique de la généralisation.
Nous reviendrons en détail sur cela à l'occasion des preuves visuelles.
Enfin, sans espérer faire le tour des types de diagrammes que l'on peut être amené à rencontrer ou à produire, nous terminerons en signalant qu'un diagramme de Venn figuré et muni d'une légende (en L2) peut être un excellent moyen à la fois pour illustrer une propriété (concernant les probabilités pour le diagramme qui suit) mais aussi pour permettre une meilleure fixation en mémoire d'éléments linguistiques (voir Figure 2.30).



Aces and Kings are
Mutually Exclusive
(can't be both)

Hearts and Kings are
not Mutually Exclusive
(can be both)

Figure 2.30 mutually exclusive events

V.2. Représentation d'une situation mathématique

V.2.a. Evolution d'une représentation

La représentation cognitive de ce que l'enseignant ou l'élève se fait d'une situation didactique peut apparaître comme globale ou comme subdivisée, découpée (conceptuellement) en représentations locales, propres à chaque étape ou à chaque interaction. Chacune d'elles doit donc être décrite finement. Selon nous, elle doit intégrer les consignes relatives à l'objectif à atteindre.

Les termes utilisés dans les consignes doivent fonctionner comme déclencheurs d'autres représentations, de type connaissances notamment.

Au fur et à mesure de son déroulement, la représentation évolue, la crainte étant toujours de perdre de vue l'objectif. Le sens de ce dernier doit donc souvent être réactualisé, au fur et à mesure de l'évolution de la représentation globale, suite à un apport de nouvelles informations ou à l'émergence de nouvelles connaissances.

La représentation cognitive globale, modélisable ou non, subit des réajustements, se trouve constamment rééquilibrée.

Les éléments déclencheurs initiaux, ou intervenant en cours de route, peuvent être explicités par l'enseignant mais aussi par l'élève, par le biais d'un retour réflexif et/ou un questionnement intériorisé.

Le rôle de l'enseignant peut également déboucher sur le fait de faire prendre conscience aux élèves des traitements sémiotiques particuliers ou des conversions de registres lorsque cela est nécessaire (voir Duval 2006).

V.2.b. Premier exemple

Considérons donc, à cet égard, un exemple simple. Il s'agit d'une succession d'équivalences traduisant l'appartenance d'un point à un ensemble géométrique pour donner lieu à une caractérisation analytique.

Un repère étant choisi, (P) est le plan passant par un point A de coordonnées (x_A ; y_A ; z_A) et de vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $(\alpha\,;\beta\,;\gamma)$.

$$\mathrm{M}(x\,;\,y;\,z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}} \text{ est orthogonal à } \vec{\mathrm{n}}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}.\vec{n} = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha(\mathrm{x} - \mathrm{x}_{\mathrm{A}}) + \beta(y - y_A) + \gamma(z - z_A) = 0$$

On peut remarquer que le vecteur $\vec{n}$ peut aussi être vu comme le vecteur directeur d'une droite (d) perpendiculaire au plan (P) et le plan (P) défini comme passant par A et perpendiculaire à (d).

Il est intéressant de voir qu'au travers d'une écriture formelle, constituée d'une succession d'équivalences, les signes utilisés renvoient à des objets dont le sens et le registre auquel ils appartiennent évoluent. Les équivalences formelles traduisent ainsi des sauts cognitifs en ce qui concerne l'interprétation par l'élève ou l'enseignant.

Ainsi, la proposition $\mathrm{M}(x\,;\,y;\,z) \in (P)$ situe les objets (point et plan) dans le registre géométrique. Afin que l'évocation de ces objets soit facilitée, une représentation graphique peut être adjointe (voir Figure 2.28).

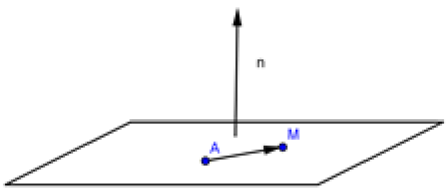


Figure 2.31

La caractérisation de l'appartenance d'un point M à un plan défini de la sorte (comme passant par un point supposé fixe, connu et une direction orthogonale) passe par l'évocation de la perpendicularité. Elle peut être décrite de diverses manières par l'enseignant (on pensera à une table et aux pieds de celle-ci pour l'orthogonalité statique mais aussi à un objet en chute libre, tombant sur le sol, pour l'aspect perpendiculaire, plus spécifique, étymologiquement parlant, que l'orthogonalité, etc…), en revenant aux expériences physiques, dans le monde sensible, liées à la perception de la perpendicularité. Celle-ci est ancrée en mémoire et doit être sollicitée à cette occasion. Le discours alors produit, à caractère fortement interactif, est bien connu des enseignants de mathématiques. Nous ne le détaillerons pas davantage si ce n'est en mentionnant le fait que le terme *perpendiculaire* peut donner lieu à des considérations de nature étymologique[45].

La deuxième proposition [$\overrightarrow{\mathrm{AM}} \text{ est orthogonal à } \vec{\mathrm{n}}$] convoque des objets intermédiaires : les vecteurs se rattachent encore au registre géométrique, de par leur écriture (le premier est un représentant dont l'expression renvoie à des objets géométriques, les points, et donc aussi à la représentation figurée et le deuxième porte un nom dont la lettre *n* évoque le caractère normal, synonyme d'orthogonal).

[45] Etant donné notre problématique, et en rapport avec la composante linguistique de notre approche, nous mentionnons à titre d'illustration un extrait du Online Etymology Dictionary : perpendicular (adj.)
late 15c., from adverb (late 14c.), from Old French *perpendiculer*, from Latin *perpendicularis* "vertical, as a plumb line," from *perpendiculum* "plumb line," from *perpendere* "balance carefully," from *per-* "thoroughly" (see *per*) + *pendere* "to weigh, to hang" (see *pendant*). As a noun from 1570s. Related: *Perpendicularly*; *perpendicularity*.
"perpendicular, vertical," mid-15c., from *plumb* (n.). The notion of "exact measurement" led to extended sense of "completely, downright" (1748), sometimes spelled *plump*, *plum*, or *plunk*.

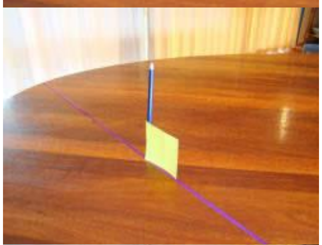
La troisième proposition [$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$] est intermédiaire, elle aussi, mais fait intervenir un outil algébrique : le produit scalaire. Elle se situe à un moment où on va basculer complètement dans le registre algébrique, le saut cognitif définitif ayant lieu au niveau de l'équivalence entre cette proposition et la quatrième. La traduction de l'orthogonalité phénoménologique, liée à la fois à une écriture vectorielle et affine mais aussi discursive (*le vecteur est orthogonal à* …), par un produit scalaire est souvent un moment où l'enseignant doit *réactiver le sens* du produit scalaire, en faisant référence au répertoire didactique de la classe et aux expériences antérieures. L'évocation explicite renvoie aux situations didactiques, elles même renvoyant à des représentations que l'enseignant peut légitimement considérer comme partagées.
La quatrième proposition, à savoir [$\alpha(\mathrm{x}-\mathrm{x}_{\mathrm{A}})+\beta(y-y_A)+\gamma(z-z_A)=0$] se situe dans le registre algébrique (ou, plus spécifiquement, analytique). Elle résulte de l'expression analytique du produit scalaire. Elle permet d'obtenir une équation qui, sous cette forme, est déjà une équation de plan. Elle peut être développée pour revenir à la forme générale d'une équation cartésienne de plan mais ce n'est pas en général nécessaire. Le terme *équation*, souvent évocateur auprès des élèves *d'équation à résoudre, d'équation avec inconnue(s)*, correspond ici à une *relation caractéristique* liant les coordonnées des objets impliqués et traduisant l'appartenance d'un point M à l'ensemble géométrique (en l'occurrence un plan). Les points que nous venons de mentionner doivent donner lieu, selon nous, à une explicitation par l'enseignant. En contexte CLIL, le discours susceptible d'être produit à cette occasion est un discours particulier, où le statut des objets mathématiques et les registres convoqués jouent un rôle essentiel dans la compréhension et la maîtrise de la tâche à accomplir, à savoir la caractérisation de l'appartenance d'un point à un plan par la recherche d'une équation caractéristique (équation cartésienne).
Dans un même ordre d'idée, il peut arriver également de revenir à la condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan (P). Exprimée en termes familiers mais évocateurs, elle se ramène à l'observation qu'*un seul angle droit ne suffit pas* pour entraîner la perpendicularité d'une droite et d'un plan. L'enseignant, confronté à la nécessité de réactiver des connaissances relativement à ce sujet, recourt souvent à des images usuelles, à la gestuelle, en sollicitant, en suscitant chez l'élève le recours aux sens qui va de pair. L'expérience phénoménologique, à caractère en quelque sorte mécanique, du *basculement d'une équerre* (l'équerre matérialisant, en le *rigidifiant*, l'angle droit), l'image de la charnière qui coïnciderait avec le bord de l'équerre, cette dernière restant en contact avec le plan tandis que celle-ci « s'incline » sont autant d'éléments impliquant la perception, les expériences concrètes, phénoménologiques, le recours aux sens (gestuelle, multimodalité) (Radford, 2010). Encore une fois, nous estimons que ces éléments se doivent d'être évoqués et ils le sont d'ailleurs souvent dans la pratique. La condition nécessaire et suffisante, codifiée en termes de perpendicularité à deux droites sécantes du plan (P), apparaît comme *une contrainte phénoménologique* (nécessaire mais surtout suffisante) : un deuxième angle droit, avec une droite de (P) non parallèle à la précédente (et même sécante, pour des raisons de facilité) apparaît comme *un moyen d'empêcher* le basculement.
La traduction géométrique et formelle se ramène à :

$$d \perp d_1 \ ; \ d \perp d_2$$
$$d_1 \subset P$$
$$d_2 \subset P$$
$$d_1 \text{ et } d_2 \text{ sécantes}$$

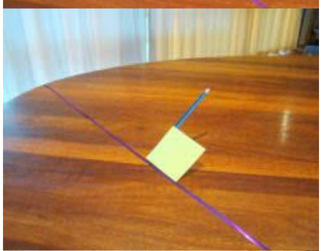
Et la traduction algébrique pourra passer par deux produits scalaires nuls.
En ce qui nous concerne, et relativement à un contexte CLIL (Mathématiques en anglais), le recours à des images *de basculement, de contrainte, d'empêchement*, constitue également des occasions, du point de vue du lexique et de l'énonciation, de rattacher l'activité, la situation, à des concepts quotidiens (c'est-à-dire acquis naturellement, presque spontanément) par le biais de de l'évocation d'expériences usuelles, de situations de la vie quotidienne.
Afin d'illustrer notre propos, nous proposons quelques figures extraites du site *math is fun*[46] (voir figure 2.29)
La notion de *basculement* renvoie à l'idée de couvercle, de boîte, celle *d'empêchement* débouche sur la représentation plus générale d'obstacle.
Une discussion portant sur ces thèmes pourra même donner lieu (lors d'une phase récapitulative ou d'institutionnalisation) à la constitution d'une carte mentale (mind-map) récapitulant les termes et les expressions rencontrées lors de l'interaction (essentiellement orale) et étendant le lexique utilisé de manière effective. Mais nous reviendrons plus loin sur ces éléments, notamment dans les paragraphes portant sur la phraséologie.

A line is perpendicular to a plane when it extends directly away from it, like a pencil standing up on a table:

If the pencil is perpendicular to a line on the table, then it **might be** perpendicular to the table:



Or it **might be leaning over**:



But if it is perpendicular to **two lines** (where they intersect) then it **will be** perpendicular to the table:
It can't point anywhere else but directly away from the table.

[46] Images consultables à l'adresse suivante :
http://www.mathsisfun.com/geometry/parallel-perpendicular-lines-planes.html

When a line is perpendicular to **two lines on the plane** (where they intersect), it will be **perpendicular to the plane**.

It will also be perpendicular to all lines on the plane that intersect there.

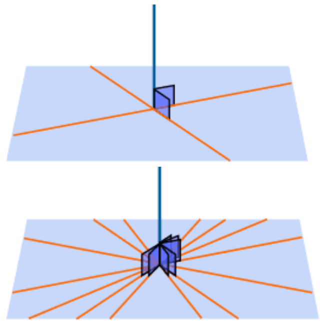


Figure 2.32 understanding perpendicularity

Par ailleurs, nous pouvons également ajouter que, selon nous, les images mentales associées au *basculement* et à son *empêchement,* éventuellement consolidées par une visualisation effective, comme sur les figures proposées ci-dessus, ou obtenues à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique (ou autre), doivent faire partie du répertoire de représentations de l'élève, avec tous les éléments que cela implique et que nous venons d'évoquer.

V.2.c. Représentation d'une situation mathématique en contexte monolingue puis bilingue

Nous souhaitons décrire, dans ce paragraphe, l'évolution de la représentation qu'un élève se fait d'une situation mathématique. Plus précisément, la question est de savoir comment l'élève perçoit et fait évoluer ses propres représentations d'une situation et modifie par la même occasion ses connaissances au cours de la résolution d'un problème. Nous considérons à cet effet un exemple relativement simple mais très significatif et nous serons conduit à distinguer la représentation *globale* de représentations *partielles* ou *locales* de la situation en train d'évoluer (par rapprochement avec la subdivision en tâches et micro-tâches dans le cas d'un cours dialogué avec les interactions élèves-professeurs que cela implique). Puis, nous indiquerons quelques pistes concernant les modifications qu'entraînerait l'adaptation de cette situation en vue de son traitement ou de sa résolution en contexte CLIL.
Dans ce qui va suivre, nous nous inspirons d'une phase d'enseignement concernant un exercice donné à des élèves de seconde, relativement au chapitre portant sur les équations de droites.
La première question concernait la détermination par les élèves d'un vecteur directeur d'une droite définie par deux points A et B.
A ce stade du cours, les élèves disposent de la définition de vecteur directeur d'une droite et de la formule donnant les coordonnées d'un vecteur connu par un représentant.
La notion de direction est assez bien maîtrisée et est fortement rattachée à l'intuition et aux images mentales dynamiques ainsi qu'aux représentations graphiques de droites ou simplement de traits rectilignes. La capacité de faire abstraction du sens pour ne conserver que l'aspect directionnel (matérialisé par une droite ou un trait sans flèche) peut être désormais considéré comme bien acquise. A cet effet, nous pouvons d'ailleurs préciser que tout ce que nous venons de citer fait partie de la représentation du concept de « direction » chez un élève. A ce stade, elle peut légitimement être considérée comme partagée. Elle est étroitement associée aux items lexicaux suivants : vecteurs directeurs, coefficients directeurs. Elle est connectée également à l'idée de sens d'un vecteur, sens d'une translation (les vecteurs ont été introduits, de manière ouvertement récursive, par le biais des translations). Le terme

de vecteur directeur est susceptible d'évoquer chez l'élève à la fois l'écriture de ses coordonnées (dans un repère imposé ici par l'énoncé) ainsi que la possibilité de le représenter graphiquement. Il s'agit donc là-aussi d'éléments faisant partie de la représentation générale (globale, étendue) de « direction ».

Après avoir déterminé les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ à par tir de celles des points A et B, la question suivante était :

> *Déterminer le réel t tel que le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (1 ; t) soit, lui-aussi, un vecteur directeur de la droite (AB).*

La plupart des élèves effectuent le calcul en s'appuyant sur la formule correspondant au déterminant de 2 vecteurs, à savoir xy'-$x'y$=0 tandis que d'autres reviennent au coefficient de colinéarité. Nous ne détaillons pas les calculs du fait de leur simplicité mais en revanche nous insistons sur le fait que les procédures convoquées sont, elles-aussi, des éléments faisant partie de la représentation du concept de « direction ». En résumé, à ce stade de notre propos, nous pouvons aussi dire que *les termes de direction et de colinéarité doivent immanquablement faire penser à l'une des deux caractérisations (de type procédural) précédemment citées*.

Les premières questions de l'exercice visaient à consolider un savoir-faire à travers l'application d'une formule algébrique (xy'-$x'y$=0) ou l'utilisation d'une égalité vectorielle (du type $\vec{u} = k\overrightarrow{AB}$), débouchant elle-même sur sa traduction au niveau des coordonnées (égalité des coordonnées de $\vec{v}$ et de celles de $\overrightarrow{AB}$).

Ensuite, l'exercice se prolongeait par la question suivante :

> Que représente *t* pour le vecteur $\vec{v}$? Justifier votre réponse.

Par le questionnement de l'enseignant, certains élèves sont conduits à voir et à dire que le nombre *t* est nécessairement le coefficient directeur de la droite (AB).

Les élèves sont alors de la *reconnaissance* d'une formule faisant référence au coefficient directeur et au vecteur directeur associé (noté $\vec{u}$ dans le cours) dont les coordonnées sont (1 ; m). C'est ici l'analogie entre les écritures qui fait immédiatement penser à (1 ; m), m étant la lettre utilisée par l'enseignant et les élèves pour désigner le coefficient directeur.

Certains élèvent évoquent un lien possible au niveau des représentations graphiques potentielles des vecteurs, tout en procédant à une description multimodale (linguistique + gestuelle).

L'égalité est *explicitée* par des gestes et une formulation verbale un peu hésitante ou approximative : « *on voit bien que si on décale de 1 horizontalement et que c'est parallèle, alors c'est que la deuxième coordonnée est forcément* identique ».

Le professeur demande l'assentiment de la classe et pose la question de savoir si cela peut tenir lieu de preuve : *« Est-ce que si nous faisons un dessin, cela va prouver quelque chose ? »*

Il insiste sur le fait que les élèves *sentent bien les choses* mais les amènent à *faire l'expérience de la nécessité*[47].

Ce point important renvoie au concept de *validité* d'un argument en mathématique, c'est-à-dire à la question : de quel moyen légitime, reconnu par la communauté, dispose-t-on pour justifier une assertion, une proposition, une propriété etc... ?

---

[47] Nous faisons ici, une nouvelle fois, référence à l'article de Sackur et al. (2005).

Nous revenons donc à notre propos et en particulier sur le dernier point. Il consistait à trouver un moyen de prouver l'égalité t = m où t correspond à la valeur numérique obtenue après calcul par les élèves.
Une élève déclare que si deux vecteurs sont colinéaires, et s'ils ont la même abscisse, alors ils sont égaux. Cette élève a fait le lien entre le fait que plusieurs vecteurs directeurs sont colinéaires (propriété faisant partie du répertoire didactique de la classe) et la *quasi-certitude* concernant le résultat d'une propriété *qui n'avait pas encore été établie en cours* comme telle (propriété non encore institutionnalisée c'est-à-dire ne faisant pas encore partie du répertoire de la classe).
Le professeur demande si la propriété que l'élève vient de mentionner est valable uniquement dans le cas où ce sont les abscisses qui sont égales. Les élèves répondent que cela *marche aussi* si ce sont les ordonnées qui sont égales.
La propriété est alors établie (dans le cas général) en se référant au critère de colinéarité de deux vecteurs, c'est-à-dire en utilisant la formule $xy' - x'y = 0$. Puis, en tant que conséquence directe, l'égalité t = m est alors établie.
Puis, à titre de vérification, les élèves recalculent le coefficient directeur directement à partir de la formule ($m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$).
Nous en profitons pour signaler que nous avons ici un bon exemple d'émergence de nouvelles connaissances. Le questionnement de l'enseignant fait émerger, dans l'*interaction*, en s'appuyant sur les représentations partagées faisant partie du répertoire de la classe et les représentations provisoires, un nouveau savoir qu'il institutionnalise dans la foulée. Ce phénomène d'émergence, contrôlé par le professeur, *s'appuie très fortement sur ce que les élèvent perçoivent et commencent à articuler*.
Un retour réflexif sur la situation peut permettre aux élèves de se rendre compte du fait que ce qu'ils perçoivent comme nécessaire (au sens de systématiquement vrai dans la réalité, du point de vue phénoménologique), en l'occurrence le fait que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux, n'est pas quelque chose qui fait partie des connaissances officielles, légitimes, considérées comme acquises. Or le sentiment que ceci est toujours vrai (dans la réalité) est une représentation basée sur une intuition correcte mais néanmoins impropre tant qu'elle ne repose pas sur une institutionnalisation et une justification valide. L'expérience de la distinction, de la dissociation entre la nécessité de justifier ou non certains points et l'utilité de s'appuyer sur le sensible, le phénoménologique, la mobilisation des sens doit faire partie de l'histoire des connaissances pour le sujet, c'est-à-dire pour l'élève. En effet :

> […] c'est en transposant ce dont il a pris conscience dans d'autres histoires, que le sujet va pouvoir éprouver la nécessité de la connaissance, en faire l'expérience[48] (Sackur et al. 2005).
>
> […] Nous prenons la nécessité épistémique comme interne aux mathématiques et comme étant la qualité des énoncés qui sont nécessairement vrais à l'intérieur du mathématique socialement admis. Nous supposons que le caractère de nécessité des énoncés mathématiques fait partie d'un certain nombre de principes internes à l'activité mathématique (comme le principe de la non-contradiction, principes rarement explicité dans les textes mathématiques, mais qui constituent les règles du jeu mathématique. (ibid)

[48] «

Ce point, vu côté enseignant, doit faire partie de son répertoire de représentations, en ce qui concerne les phénomènes de transposition didactique.
La question de « savoir comment procéder pour prouver » est intimement liée à celle de « savoir comment regarder » et doit s'accompagner d'un questionnement adéquat et d'un retour réflexif sur la situation, en tant qu'expérience vécue.
Nous nous en tiendrons là pour les questions de savoirs et de connaissances sur lesquelles nous reviendrons plus loin. En attendant, le point important que nous souhaitons traiter maintenant est celui du transfert, de la transposition de cette situation didactique à un contexte CLIL. Nous renvoyons le lecteur à la partie expérimentale pour plus de détails et un éclairage plus profond. A ce stade de notre exposé, nous souhaitons dès à présent évoquer ce que pourraient être les problèmes, les difficultés rencontrés si cette transposition s'avérait effective, ce qui n'a pas été le cas pour nous pour ce qui est de cet exemple particulier. Cela dit, cet exemple peut être considéré comme faisant partie de la classe des situations expérimentées à travers notre pratique, situations similaires en tout cas et relevant de notre culture éducative et expérience personnelle d'enseignant en classe européenne. La situation précédente peut naturellement être transposée dans un contexte CLIL. Mais cela sous-entend de replacer de manière imaginaire la situation précédente relativement à une progression idéalisée et en tenant compte des différentes modalités pratiques, institutionnelles, selon lesquelles les cours se seraient déroulés jusqu'alors. Nous ferons abstraction de ces détails pour évoquer simplement quelques éléments-clés afin d'illustrer quelques caractéristiques liées à la pratique des mathématiques dans une langue seconde (en l'occurrence, l'anglais).
La notion de vecteur repose sur la notion de longueur et sur les idées intuitives de direction et de sens. En France, dans la pratique mathématique, l'idée de sens est fortement dissociée de celle de direction. Chez les anglo-saxons, le terme « *direction* » est indifféremment utilisé (avec ou sans focalisation sur cet aspect) pour traduire soit l'idée de direction, soit l'idée de sens, soit les deux simultanément. On dira ainsi : « *the direction of the line* » ou « *the direction from A to B* ». Le sens de A vers B présuppose l'idée de rectilinéarité. En France, culturellement[49] parlant (pour ce qui est des mathématiciens), l'idée de direction est fortement attachée à la caractérisation que l'on en faisait dans les anciens programmes, à savoir par le biais d'une référence à une *famille de droites*. Le fait de traduire *direction (anglais)* par *direction* ou par *sens* dépendra donc du contexte et de la formulation initiale (en anglais).
Dans un ordre d'idée très proche, le terme *collinear* en anglais, s'applique à des points tandis que l'on utilisera l'adjectif *parallel* pour des vecteurs (et pour des droites également), ce qui correspond exactement à l'opposé de ce qui se passe côté français. Il y a donc risque de confusion chez les élèves et seule une utilisation fréquente, une vigilance accrue (autocontrôle conscientisé) ou encore une modification de ses propres habitudes cognitivo-langagières (similaires à la façon dont on traite le problème des faux-amis) pourraient garantir une limitation du risque d'erreur.
En termes de représentations, et de répertoire lexical et phraséologique (répertoire ou lexique mental), les termes et expressions suivants (liste non exhaustive et non organisée de manière réticulaire ou en tant que carte mentale) devront apparaître comme connectés, c'est-à-dire *étroitement associés* :

[49] Nous avons ici un élément important concernant les divergences de points de vue, les aspects culturels de la pratique mathématique. Les choix linguistiques opérés pour nommer les objets mathématiques et les conventions adoptées varient selon les pays.

direction vector : vecteur directeur
gradient / slope : coefficient directeur, pente
collinear points : points alignés
parallel vectors : vecteurs colinéaires
points aligned / aligned points : points alignés
points B, C, D, are on a same straight line : les points B, C et D sont alignés
inclination : inclinaison
What is the slope of a line if it's inclined to the right?
slant line / inclined line : droite inclinée
two points that coincide: deux points qui sont confondus.
points (or objects) that have to be in perfect alignment with each other : points (ou objets) devant être parfaitement alignés.
etc…

Nous proposons dans un même ordre d'idée, au chapitre 8 de la partie expérimentale, un exemple plus conséquent d'élaboration de document-ressource lexical et phraséologique (sur la base d'un travail collaboratif entre élèves et enseignant). Nous y aborderons la question de discrimination des termes à retenir (voir également chapitre 3) et proposerons quelques critères à appliquer pour rendre l'élaboration de ce type de document, et par suite le travail d'apprentissage du lexique, optimaux.

V.3. Zone d'émergence de la pensée algébrique, multimodalité et représentations

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de présenter quelques traits caractéristiques des phénomènes liés à l'émergence de la pensée algébrique chez l'élève, en nous appuyant sur les travaux de Radford (Radford 2010). Certaines de nos séances expérimentales portent sur les preuves visuelles (relatives à des propriétés d'algèbre arithmétique[50]) et les phénomènes de généralisation à la fois au niveau de la formulation, de la schématisation et de la transcription algébrique.
Le cadre d'interprétation développé par Radford nous semble très approprié pour mettre en lumière certaines caractéristiques concernant ce que lui-même appelle la Zone d'Emergence de la Pensée Algébrique, avec une référence claire à la sémiotique de Vygotski. Ceci correspond largement au point de vue théorique que nous avons adopté. Nous développerons en particulier les points suivants : rôle joué par la perception active, mouvement réel et mouvement idéalisé, place des sens dans l'appréhension des situations conduisant à une généralisation algébrique, multimodalité (prise en compte de la gestuelle par exemple).
En se basant sur des situations impliquant des schématisations et le thème mathématique des *patterns*, Radford illustre et développe les concepts et les moments-clés associés à l'émergence de la pensée algébrique (voir Radford (2010) pour plus de détails). Sa description, généralisable aux situations adidactiques du type de celles que nous proposerons, est intéressante pour notre propos : elle permet de décrire *l'évolution de la représentation* que se fait l'élève de la situation didactique à travers l'examen de l'évolution du statut des signes produits. Nous nous appuierons dans la partie expérimentale sur la plupart des éléments décrits par Radford et qui concernent la cognition par les sens.

[50] propriétés concernant la somme des carrés et des cubes des entiers consécutifs (de 1 à n).

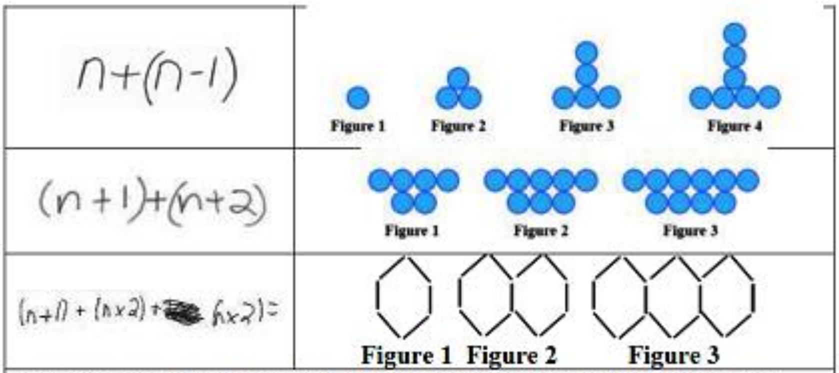


Figure VI. Formulas as narratives. Instead of decontextualized calculations, the formulas narrate the manner in which calculations have to be carried out in close relationship to the geometry of the figures and position of their parts.

Figure 2.33 (Figure extraite de Radford, 2010)

Nous reprenons et prolongeons si nécessaire les étapes cruciales relatives à cette évolution de la pensée algébrique, en nous contentant de les énumérer, de façon quasi-chronologique :

- objectivation des relations
- repérage d’invariants, de régularités à travers une perception active des phénomènes
- mise à contribution du corps et des sens (cognition sensible par le corps et les sens / sensuous and embodied cognition)
- rôle essentiel de la contextualisation
- la formulation des élèves passe par des formulations linguistiques partielles en rapport direct avec la perception de structures et de motifs ou de formes objectivés.
- forme initialement située et concrète de la pensée algébrique : production de formules en acte (à la fois par les mots et les gestes).
- stade factuel : la pensée opère au niveau des nombres particuliers
- les élèves sont ensuite invités à dépasser ce stade pour entrer dans un niveau d’objectivation plus profond.
- généricité
- les élèves utilisent ensuite les figures particulières pour traduire des idées générales d’une manière métaphorique mais la généralité ne se traduit pas encore comme il faut au niveau de la formulation linguistique.
- formulation procédurale : la description langagièra d’un procédé (d’extension, par exemple) est déjà en soi une formule (procedural sentence)
- utilisation de déictiques spatiaux
- la pensée algébrique est encore contextuelle et attachée à la perception
- le terme général est décrit, mais de manière encore contextualisée
- changement drastique, à un certain moment, dans le mode de désignation des objets du discours (ce point de vue rejoint celui de Sfard)
- la formule condense l’expérience phénoménologique
- la formule algébrique a un statut iconique par rapport à la disposition réelle des objets, ou relativement à la disposition des objets schématisés[51] ou figurés
- la formule raconte, dit des choses. elle joue le rôle d’indice représentationnel.

[51] Nous reviendrons plus loin sur les *manipulations idéalisées.*

- Elle donne lieu à une interprétation par l'enseignant de la représentation (générale et évolutive) que l'élève se fait de la situation.

on passe

des gestes, des déictiques linguistiques $\longrightarrow$ aux signes et aux parenthèses

- Les parenthèses renvoient à des regroupements effectifs d'objets (réels ou figurés).
- Le fait de pouvoir ou non enlever les parenthèses peut donner lieu à un débat.
- L'entrée dans l'abstraction est concomitante d'une décontextualisation, d'un détachement progressif à l'égard de la situation concrète.
- Glissement sémantique du statut des signes
- Les signes acquièrent ensuite un statut relationnel.
- Néanmoins, il continue d'y avoir un parallèle entre la disposition réelle et la disposition des signes dans la formule.
- Attribution de nouvelles significations (abstraites)

on passe (dans un but de simplification)

des signes encore attachés au contexte $\longrightarrow$ aux signes décontextualisés, au statut relationnel

- Passage de l'iconique simple au symbolique
- On rentre ainsi plus profondément dans la Zone d'Emergence de la Pensée Algébrique.
- Cela se traduit par un processus d'objectivation supplémentaire.

Radford insiste sur le fait que les étudiants peuvent continuer à faire des va-et-vient entre les diverses formes de pensée.

V.4. Signe isolé et signe peircien

Dans ce paragraphe, nous précisons quel emploi (et il sera restreint) nous ferons de certains concepts issus de la sémiotique de Peirce.
Nous renvoyons le lecteur à l'abondante bibliographie disponible traitant de cette sémiotique.
Dans la mesure où nous avons souhaité donner à nos travaux une approche davantage centrée sur la notion de représentations, sur l'idée de co-construction des concepts, le recours à la sémiotique de Vygotski nous a semblé cohérent. Néanmoins, la référence à des signes dans le cadre d'une sémiotique d'inspiration peircienne est susceptible d'éclairer de façon assez pertinente les analyses des situations expérimentales, ne serait-ce que par l'utilisation d'une petite partie de la terminologie spécifique à cette sémiotique.
Au chapitre 3, paragraphe III, nos propos seront éclairés différemment, en recourant cette fois au triangle sémiotique (signifiant, signifié, référent) pour le signe linguistique en présence ou concomitant d'un signe mathématique. Nous détaillerons ces questions liées à la référence en réservant la sémiotique peircienne pour les seuls signes mathématiques. Notons que dans le cas de l'enseignement supérieur, la place du calcul formel est prépondérante. La sémiotique peircienne pourra se révéler efficace. Il y a dans ce cas, en effet, peu ou pas de référence dans

la réalité sensible autre que celle qui nous maintient au niveau des représentamens mathématiques physiques (symboles mathématiques algébriques, symboles impliquant davantage le visuel tels les matrices, graphiques, diagrammes,). Les interprétants ont donc *un caractère plus systématique* et les processus interprétatifs portent sur des signifiés abstraits de nature mathématique, liés aux symboles, pour la plupart. Ces processus peuvent le plus souvent se passer de verbalisation intérieure et nécessitent, en général (mais pas toujours), beaucoup moins l'implication des sens. Le fait que ces types de signes soient vus comme des icônes, des indices ou des symboles (arguments) est un moyen pratique pour décrire certaines facettes des raisonnements mathématiques.

Lorsque nous tentons d'appréhender un signe[52] tel qu'un signe linguistique ou une expression formelle de type mathématique et que nous tentons de l'interpréter, il ne fait pas sens pour nous de la même manière s'il est isolé que si nous le considérons comme faisant partie intégrante d'un énoncé (linguistique) ou d'une proposition (mathématique). Lorsque nous formulons un énoncé linguistique, notre attention, sauf exception, ne s'arrête pas sur chaque signe individuellement mais saisit le sens du message à un niveau global. Notre processus d'interprétation du message ne s'arrête pas non plus sur une simple phrase en l'examinant *sémiotiquement* mais en percevant un sens ou une signification pour laquelle chacun des signes individuels est traité *cognitivement* de manière presque *automatique*.

Examinons l'écriture mathématique formelle x^2. Dans un premier temps nous la considérons isolément. Nous la lisons mentalement : « x au carré » ou plus simplement « x carré ». Si nous tentons de l'interpréter isolément, il nous vient à l'esprit que cela coïncide algébriquement avec $x \times x$. Si nous continuons, l'écriture algébrique va assez naturellement susciter en nous (phénomène d'évocation) l'idée de la représentation graphique de la fonction *carré*, ce qui s'accompagnera sans doute d'une image mentale (plus ou moins nette selon les individus). Nous sommes en fait en train de *recréer* des *micro-contextes familiers* par le biais de raccourcis cognitifs. Selon nous, la notion d'interprétant automatique du signe est étroitement associée non seulement à l'habitude, mais surtout aux *types de contextes* auxquels nous avons associé ce signe lors d'expériences antérieures. Il en va ainsi pour les signes linguistiques comme pour les signes mathématiques (signes formels, graphiques, images mentales). Nous avons donc élaboré en nous, petit à petit, une *représentation cognitive* associée à ces expériences contextualisées et dont la nature différente des contextes a généré non pas une mais *plusieurs* interprétations automatiques[53] disponibles.

Considérons maintenant les énoncés suivants :

(1) « *le carré d'un nombre est un nombre positif* »

(2) « x^2 est un nombre positif »

(3) « $x^2 \geq 0$ »

L'énoncé (1) est écrit en langue naturelle (il est composé de signes exclusivement linguistiques).

L'énoncé (2) est une écriture mixte (mélange de symboles mathématiques et de signes linguistiques).

L'énoncé (3) est écrit en langage formel (utilisation exclusive de symboles mathématiques).

[52] C'est-à-dire en référence à la sémiotique de Peirce.

[53] Même si l'on pense plus naturellement en premier à l'un d'entre eux en particulier (ainsi on pensera peut-être d'abord à $x \times x$ plutôt qu'à la fonction carré lorsque nous nous trouvons en présence du signe x^2).

Ces trois énoncés, certes très courts, se rencontrent fréquemment en mathématiques et sont généralement interprétés sans effort, de façon automatique et, ce qui est essentiel, sans qu'il soit nécessaire de *réactiver le sens* (à moins que l'on soit dans une phase d'apprentissage ou encore de première confrontation avec la propriété convoquée au travers de cet exemple). La représentation que l'on pourrait se faire effectivement de ce à quoi renvoie cette propriété (par le biais d'un processus d'interprétation de nature sémiotique) figure simplement en arrière-plan lorsque nous intériorisons le message correspondant.

Si maintenant on demande à un élève de justifier n'importe lequel de ces énoncés, il va devoir interpréter chacun des signes dans une perspective de démonstration ou justification de type mathématique. Nous nous intéressons, dans nos travaux, davantage aux combinaisons de signes ou, en tout cas, aux interactions et aux liens qu'entretiennent les signes produits avec les représentations des participants (élèves et enseignant) en référence à des contextes spécifiques. Le signe, pour ce qui nous intéresse, sera donc toujours contextualisé, voire très contextualisé, et sera toujours considéré relativement au sujet, à celui qui le produit. Plutôt que de parler d'interprétant attaché au signe, nous préférons revenir à la notion d'interprétation liée elle directement au sujet et à ses représentations. Un representamen, essentiellement symbolique (symbole mathématique, en particulier algébrique ou numérique, diagramme, schéma etc…) sera l'occasion, en tant qu'il en sera un indice, de tenter de reconstituer ce qu'auront été la ou les représentations associées chez l'élève. Le representamen, de nature mathématique, linguistique ou autre, sous-entendra le plus souvent, pour nous, le renvoi à un objet relativement à un contexte global d'interprétation et d'interaction dans des phases situationnelles. En mathématiques, on recontextualise d'ailleurs souvent le signe dans une situation pour cerner ou simplement appréhender son objet. Mais ce n'est pas la seule manière car on peut également directement accéder directement au signifié (relativement au triangle sémiotique) ; ce que nous décrirons au chapitre 3.

Ainsi, nous ne parlerons pas d'interprétant immédiat par exemple mais plutôt d'évocation première ou naturelle non nécessairement accompagnée d'un retour réflexif, conscientisé, sur le signe en train d'être perçu. Le signe hors contexte, lorsque l'on veut cerner son objet, nous oblige immanquablement à *recréer* un micro-contexte, à raviver des représentations associées (cognitives, expérientielles, etc…), avec ou sans la présence d'images mentales. Il peut s'agir dans ce cas d'un parcours en accéléré, toujours incomplet, de situations antérieures attachées à la découverte puis à la familiarisation avec ce signe (avec son representamen et son objet) ou encore de réactivation de représentations effectives qui lui sont attachées (et fixées dans la mémoire). On aura alors affaire à une remémorisation de représentations souvent associées à des situations, à des contextes rencontrés dans le passé ou fréquemment rencontrés. Cette manière d'appréhender le signe pour le cerner (du point de vue du sens) a lieu naturellement et est d'autant plus rapide que les représentations qui lui sont associées sont valides (lorsqu'il s'agit d'un signe mathématique par exemple, c'est-à-dire conventionnel). Lorsqu'une partie des représentations convoquées se révèle erronées ou agencées de manière jugée incomplète ou insatisfaisante par l'enseignant, c'est l'occasion, pour ce dernier, de réactiver le sens en recourant à une recontextualisation partielle et à des schématisations faisant partie du répertoire de la classe.

Un symbole algébrique renvoie implicitement à une règle permettant de l'interpréter. Par exemple, le symbole x^2 est interprétable en tant que produit de x par x ; $x \mapsto x^3$ est interprétable comme la fonction qui, à un nombre, associe son cube etc… Cependant, le sens

que cette règle (définitoire et conventionnelle à l'intérieur du registre algébrique) permet de conférer à ce signe (x^2) n'est pas nécessairement toujours perçu, loin s'en faut. On peut manipuler le terme x^2 sans utiliser le fait, et donc sans en percevoir le sens associé, qu'il s'agit d'un produit. Les symboles mathématiques étant avant tout de nature fonctionnelle, on peut très bien les utiliser, les combiner, uniquement en respectant les règles d'utilisation et sans revenir systématiquement, et loin s'en faut, à leur sens d'origine, c'est-à-dire à la définition usuelle ou aux conventions sur lesquelles ils reposent. De plus, les symboles mathématiques, dans le cas de situations-problèmes, renvoient aussi à un objet extérieur au calcul formel proprement dit (x^2 peut renvoyer à l'aire d'un carré de côté x). Nous privilégierons le fait de savoir à quoi renvoie tel ou tel signe et nous nous focaliserons sur son statut en nous référant à un contexte donné (contexte d'interprétation, fortement dépendant de la spécificité de la situation et surtout, de la phase concernée).
Le cadre peircien d'origine (dans l'hypothèse d'une utilisation fine basée sur la totalité des types de signes que l'on peut ainsi distinguer) est trop lourd à mettre en place, dans une perspective didactique, au niveau de l'élaboration ou de l'analyse des séquences d'enseignement. Cela dit, plusieurs didacticiens n'utilisent qu'une partie des potentialités de la sémiotique peircienne (Bloch et Gibel, 2011). C'est un peu ce que nous ferons à ceci près que nous privilégierons toujours les notions de représentation, d'évocation et de contexte d'interprétation. La terminologie peircienne se révélera utile pour éclairer certaines facettes, analyser certaines caractéristiques des productions sémiotiques des élèves et c'est le principal usage que nous en ferons. Néanmoins, les questions de signification donneront lieu à la production d'un double triangle sémiotique, l'un d'eux correspondant au signe triadique peircien. Nous estimons que les notions de représentations cognitives, mais toujours avec un sens social, et de signes triadiques (revisité) ne sont pas incompatibles, ce que d'ailleurs nous nous proposons de montrer dans la suite de notre propos.
Lorsque nous avons traité les notions d'évocation, de représentation, nous avons fait allusion aux combinaisons de signes. En mathématiques, il est fréquent d'avoir à considérer un signe (symbolique) de manière isolée mais au sein d'un énoncé en langue naturelle (énoncé semi-formel). Il renvoie alors à un passage calculatoire ou formel. Il est utilisé dans un mode de désignation ; il peut se voir attaché des référents sensibles, etc… (voir chapitre 3). Chaque signe, qu'il soit fréquemment utilisé ou non en mathématiques, tel que *x*, E ou encore *f*, + par exemple, ne représente rien de précis en soi. Sa nature découle toujours d'un énoncé soit linguistique, soit formel (ou mixte), aussi bref ou concis soit-il. Il suffit de considérer par exemple :

soit f la fonction définie sur R par f(x)= x^2

ou encore :

$$f : R \to R$$
$$x \mapsto x^2$$

Dans la dernière écriture, le *cotexte syntaxique*[54] mathématique (ensemble des signes proximaux) permet d'inférer que x^2 est l'expression algébrique de la fonction *f*.

[54] Le cotexte (ou co-texte) est, en linguistique, l'ensemble du texte contigu au fait de langue étudié, en entendant par texte tout discours, oral ou écrit. (Wikipédia).

Le *contexte de l'énoncé*[55] (ensemble des informations langagières ou semi-formelles d'un exercice, par exemple, ou d'une activité de nature concrète ou non) permettrait éventuellement d'associer des référents sensibles, idéalisés ou semi-abstraits à chacun des symboles impliqués.
Par habitude, le mathématicien ne verbalise pas d'éléments langagiers pour saisir le sens de l'énoncé précédent. Le niveau sémantique de la pensée est ici purement mathématique et non verbal. Il double les symboles qui peuvent malgré tout être oralisés sans activation de signifiés langagiers.
Le signe isolé n'a donc pas d'interprétant immédiat (et univoque) en soi. Il dépend étroitement du cotexte (ainsi que du contexte éventuel), c'est-à-dire des signes linguistiques ou *formels* figurant à proximité.
Dans les exemples mentionnés ci-dessus, on peut, et *uniquement grâce au cotexte*, affirmer que x^2 est l'expression algébrique associée à la fonction *f*. Dans le premier cas, c'est la phrase mixte (et pas seulement l'égalité) qui permet de l'affirmer tandis que dans le second cas, c'est le pattern (formel et global) familier dans lequel figure le symbole x^2.
Certains signes apparemment isolés ne le sont pas véritablement car ils correspondent déjà à une combinaison, celle-ci résultant de l'application de règles syntaxiques algébriques ou en tout cas, très spécifiques. Ainsi x^2 n'est plus véritablement un signe isolé même s'il peut parfois être traité comme tel lorsque l'on fait abstraction de ce qu'il recouvre, à savoir le produit de x par x.
Néanmoins, ce qui nous intéresse est, en fait, le signe symbolique isolé mais en référence à une situation didactique ou à un texte mathématique, c'est-à-dire à un ensemble de signes combinés bien délimité. Le signe symbolique pourra alors, notamment dans le cas d'une démonstration mathématique, d'un échange discursif, de l'analyse d'une proposition ou d'un théorème, donner lieu à un phénomène d'évocation très proche de ce qui serait le cas pour un signe linguistique, à ceci près que le mathématicien a davantage l'habitude de délimiter rapidement le contenu de la représentation.

Dans un exercice de niveau seconde sur les fonctions, le symbole *f* pourra ainsi déclencher chez l'élève, souvent en arrière-plan, mais avec la possibilité d'une remémorisation d'expériences didactiques associées, l'évocation de plusieurs éléments tels que :
- les fonctions de référence correspondant au programme officiel avec tout ce que cela implique de savoirs institutionnalisés, c'est-à-dire,
- les questions de sens de variation, de représentations graphiques,
- les exercices rencontrés antérieurement et portant sur les fonctions etc...

Ceci correspond selon nous à une représentation au sens où nous l'avons défini dans les paragraphes précédents et elle contient des connaissances qui lui sont étroitement attachées.
Dans le cas d'un signe perçu comme isolé tel que x^2 par exemple (en supposant que l'on sache au départ que x est un nombre réel), l'évocation naturelle, correspondant à une représentation sans conteste partagée, fera émerger le fait que, syntaxiquement parlant, il s'agit d'un produit, mais aussi que x^2 est un nombre positif et même, si cela s'avérait

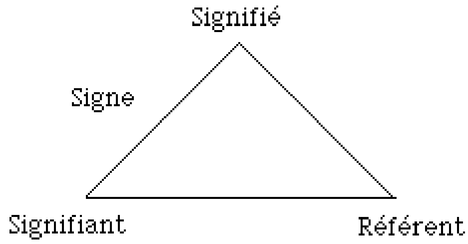
[55] On dira, de même, que le cotexte d'un argument par exemple, est l'ensemble du texte qui traite du même sujet que cet argument, alors que le contexte linguistique est ce qui détermine cet argument : attitude contradictoire de l'interlocuteur, ou au contraire son acquiescement, etc. (article *cotexte* sur Wikipédia)

nécessaire, que c'est un nombre tout simplement. On peut associer cela à la notion d'interprétant immédiat mais nous tenons impérativement à ne pas faire abstraction du sujet pensant dans le cas du phénomène d'interprétation. Nous préférerons donc parler *d'interprétation immédiate* dans le cadre d'une représentation venant naturellement à l'esprit et qui, malgré tout, et l'expérience le prouve, n'est pas systématique.
Par ailleurs, et parallèlement à cette remarque, nous souhaitons également faire la différence entre *la représentation de ce que les individus se font de la notion de sens* et le *sens vécu*. Le sens vécu est le sens intériorisé, lié à la pensée en acte lorsque les chosent *font sens*. Il est perceptible dans le champ de la conscience en étant alors plus proche d'une sensation. Il y a, lorsqu'on essaye de les saisir, oscillation entre sens et sensation. C'est l'attention qui permet de basculer de l'un à l'autre. L'attention apparaît donc comme la clé de voûte des processus interprétatifs car elle permet de distinguer les niveaux de sens et de passer de l'un à l'autre tout en attachant des éléments que la conscience perçoit.
Nous nous autorisons à considérer que notre approche, même si elle mobilise le signe peircien, est davantage centrée sur les processus interprétatifs eux-mêmes (avec une focalisation sur les questions de référence) ainsi que les représentations conceptuelles et nous réservons le recours aux signes iconiques, indiciels et symboliques aux productions sémiotiques des élèves dans le cas de situations particulières. Les phénomènes qualifiés de *déflation interprétative* correspondent donc à un décalage entre l'interprétation attendue par l'enseignant et l'interprétation effectivement réalisée par l'élève. Cette différence d'interprétation ne peut être décelée qu'à travers un décalage entre les productions sémiotiques des élèves et celles que l'enseignant est en droit d'attendre dans une situation donnée, compte tenu du répertoire didactique et représentationnel des élèves (et de la représentation que lui-même se fait de ce dernier).

V.5. Signifiant, signifié et référence potentielle

V.5.a. Accès au sens de l'objet

Dans la pratique mathématique, pendant ou après une phase d'institutionnalisation d'une nouvelle notion, l'enseignant ou les élèves sont amenés à discuter sur l'objet mathématique attaché à un concept, une fois que ce dernier a commencé à être construit.
Le concept de *fonction*, par exemple, est constitué d'un objet particulier autour duquel les élèves vont attacher un certains nombres d'éléments. Leur agencement constitue un réseau de connaissances en rapport direct avec l'objet *fonction*. Du point de vue de l'élève, on pourra ainsi parler de la représentation étendue du concept de *fonction* et elle intercepte d'autres représentations telles que celles de *sens de variation*, celle de *dérivabilité*, etc... Il arrive des moments où la discussion va porter sur l'objet lui-même, lorsque par exemple les élèves veulent accéder au sens-même de celui-ci, de manière directe.
Avant de donner plus de précision sur cette tentative d'accès au sens abstrait, conceptuel de l'objet mathématique, il nous semble intéressant d'examiner en premier lieu ce qui se passe pour un signe linguistique.
Pour cela, nous nous appuyons sur le triangle sémiotique (signifiant, signifié et référent).



Le référent est la chose à laquelle renvoie le signe linguistique. Il appartient à l'univers non linguistique. Cette chose peut aussi bien être un objet physique qu'un concept ou qu'un sentiment, et donc appartenir à l'univers perceptif, cognitif ou affectif du sujet parlant.
On parle de signification pour nommer la relation entre signifiant et signifié et on réserve le terme de référence (ou encore dénotation) à la relation entre signe et référent. Le signifié (dit aussi sens ou sémème) d'un signe est constitué des traits distinctifs sémantiques (sèmes ou unité de sens) et ce sont eux qui vont permettre de repérer le référent correspondant à un signe. Le signifiant (la forme sonore ou graphique d'un signe) est composé de phonèmes constitués des traits distinctifs caractérisant la forme d'un signe par rapport aux autres.
Dans la partie expérimentale, nous aurons besoin d'identifier les traits abstraits minimaux (les sèmes) relatifs à *pattern*. Ces traits sont toujours décrits eux-mêmes par des mots mais on essaye de les appréhender de manière abstraite.
Que devient le triangle sémiotique dans le cas d'un objet mathématique tel que celui de *fonction*?
C'est ce que nous envisageons de détailler au paragraphe suivant.

V.5.b. Le triangle sémiotique

Nous citons à titre indicatif uniquement quelques sources qui traitent des questions d'approches sémiotiques et de typologie des signes : Hébert (2010), Domenjoz (1998), Klinkenberg (1996), Morris (1938, 1946), Peirce (1978), GROUPE µ (1992), Eco (1988), etc… Nous proposons de décrire dans ce paragraphe une approche sémiotique particulière des signes. Nous convenons de distinguer : le signe linguistique dont le signifiant est le mot écrit ou verbalisé (y compris en pensée) et le signe mathématique (symbole ; légisigne selon Peirce). La question des dénominations des différents composants sémiotiques du signe est délicate. Elle nous oblige à nous positionner de façon précise face aux différentes théories sémiotiques. Nous rappelons que les dénominations pour des termes sémiotiques analogues peuvent entraîner des confusions :

> Les théories du signe triadique sont nombreuses. On utilise souvent un triangle pour représenter visuellement ce type de signe. On parle alors de « triangle sémiotique » (la base de ce triangle est généralement figurée en pointillé pour indiquer que la relation entre la première et la dernière pointe est moins directe que les autres) (extrait du site signo-semio, article intitulé Klinkenberg[56]).

Le triangle sémiotique est utilisé en linguistique, dans une perspective sémiotique. Nous allons nous y référer en retenant comme désignations des composantes sémiotiques les termes *signifiant, signifié* et *référent*. Le signe mathématique va lui aussi intervenir à l'intérieur du triangle en tant que référent potentiel ou actualisé (voir infra). Nous le décrirons parfois en

[56] Article consultable à l'adresse suivante : http://www.signosemio.com/klinkenberg/structures-du-signe.asp

référence à la sémiotique de Peirce en ce qui concerne le recours à la distinction entre types de signes selon les catégories *icone, indice* ou *symbole-argument*. Nous examinerons la question du rapport du signifié d'un mot-concept (le mot fonction par exemple) avec les questions de sens (au niveau analogue à celui du signifié) mais pour le signe symbolique mathématique.

Une notion mathématique est associée à un mot-concept (idée générale abstraite) :

- qui possède un signifiant (le mot *fonction*, par exemple),
- qui aura un signifié abstrait (mise en correspondance orientée 1 à 1 des éléments de deux ensembles avec l'idée de dépendance des seconds par rapport aux premiers)
- et qui possède ou non, un ou plusieurs référents, objectivés ou non.

Pour l'individu, c'est aussi un concept construit en tant que représentation cognitive interceptant de nombreuses autres représentations.
Le mot *fonction* est polysémique. Seul l'un de ses signifiés est de nature mathématique.
La notion de *fonction* peut se trouver particularisée de plusieurs manières et cela, partiellement ou totalement.
Par un symbole tenant lieu de nom, *la fonction f*, tout comme on dirait *Monsieur* X, n'est toujours pas particularisée. La particularisation viendra, soit de l'identification du référent, si lui-même est identifié et particularisé quant à sa nature et aux objets qu'il implique, (la vitesse d'un véhicule précis en fonction du temps, dans des circonstances précises, ou alors celle d'un véhicule quelconque, etc...) mais elle viendra aussi de l'identification précise de la relation liant x et y (si y s'exprime algébriquement en fonction de x par exemple).
La fonction, en tant que classe d'objets, aura des représentants que l'on pourrait qualifier de prototypes (comme en linguistique cognitive). Ainsi, la fonction-carré, la fonction inverse pourraient être considérés comme des prototypes du concept de fonction (représentants très significatifs, fréquemment rencontrés).
La question du sens et de la dénotation (au sens de Frege), pour un signifiant mathématique n'est donc pas chose simple. Néanmoins, elle peut être éclairée en acceptant l'idée de référence potentielle mais aussi de référence ramifiée, (potentielle ou effective), par le biais des symboles intermédiaires impliqués dans son objectivation symbolique ou des notions élémentaires mobilisées lors de l'explicitation de son signifié abstrait (*éléments, ensembles*, dans le cas d'une *fonction*).
Le fait que l'un des référents possibles d'un terme mathématique soit une pure objectivation du signifié n'est pas surprenant puisque les premiers objets mathématiques sont nés dans la perception de relations ou de manipulations idéalisées entre des objets de la réalité sensible (*regrouper* donnera *ajouter*). Il en va ainsi du nombre, des opérations elles-mêmes, de l'objet géométrique (simple) par rapport à l'objet physique (on pensera au fait que, pour les anglais, un tel objet est tantôt un *solide* mais aussi *une forme* puisqu'ils parleront de *solids* ou de *3D-shapes*). Si le référent est absent ou en attente, c'est sans doute que l'on se trouve dans une phase descriptive au niveau macro ou dans une phase où la mathématisation n'a pas encore eu lieu.
Dans le cas d'une notion telle que celle de *vecteur*, en secondaire, le *signifié est composite* car il prend en compte simultanément 3 éléments de nature mathématique : direction, sens et longueur. Il présuppose donc un lien potentiel avec la réalité sensible (direction et sens) et sous-entend donc un recours fréquent à une représentation figurée (graphique).

La notion de *fonction*, quant à elle, sera en général objectivée par un recours à plusieurs *symboles auxiliaires.* Sur la page suivante, nous illustrons de manière détaillée le triangle sémiotique et ses éléments dans le cas du signifiant langagier *fonction*.

Les signifiés sont ceux que la conscience du mathématicien averti est capable de discerner. Gaudin a étudié l'objet fonction du point de vue des conceptions dans le modèle cK¢, en distinguant : conception courbe, conception algébrique, conception analytique. Ainsi, selon Gaudin (2015, p95) :

> Une définition est une description d'un objet *par ailleurs appréhendable par les sens*[57].
>
> Ce n'est pas la définition qui détermine l'objet, mais l'objet qui détermine la définition

Gaudin, dans son étude du concept, prend aussi en compte l'évolution historique (étude diachronique) du concept :

> Nous avons pu constater dans l'histoire du concept de fonction que le processus qui a mené à la distinction de la fonction et de la représentation analytique a été long et s'est accompagné de débats autour de la définition des objets en mathématiques. Elle a nécessité d'envisager des fonctions étranges : ne pouvant pas être représentées par un tracé, continues mais nulle part différentiables ; ces monstres étant des conséquences logiques de la définition formelle de fonction. Ceux-ci mettent en évidence la place des définitions en mathématiques : elles sont des constructions logiques et non des descriptions de certaines caractéristiques des représentations d'un objet. Sfard atteste de la difficulté conceptuelle que représente le processus de réification. La conception objet, à la différence de la conception analytique, comporte des contrôles qui permettent d'attester de la distinction fonction/représentation analytique. Elle mobilise donc des outils de manipulation de l'objet fonction qui se distinguent des manipulations données par les outils analytiques. (ibid, p94)

Les signifiés abstraits peuvent aussi être considérés comme se dégageant suite à des traitements dans des registres séparés (au sens de Duval) et par leur articulation (détermination des éléments qui sont conservés, détermination des informations qui sont perdues).

Dans ce qui suit (voir infra tableau 2.3) nous considérons l'objet fonction en tant que les signifés se sont déjà dégagés et que la représentation autour du mot-concept est conforme au savoir mathématique.

La phrase *« la vitesse est fonction du temps »* peut être interprétable

a) **du seul fait de l'évocation des mots**, de par leur signifiés abstraits et leur articulation

et/ou

b) en tenant compte de la présence d'une écriture symbolique **et en rapport** avec celle-ci. (y= f(x))

et/ou

c) **en lien avec un contexte** composé d'objets de la réalité sensible ou d'objets idéalisés.

[57] C'est nous qui soulignons.

Les idées-maîtresses de notre propos sont donc les suivantes :

- Potentialité de référence inhérente à tous les mots abstraits (et pas uniquement ceux de nature mathématique)
- Signification partielle, en attente, dans le cas d'une absence de référence, lorsqu'on se contente de faire jouer l'évocation ou encore d'agir au niveau de la syntaxe formelle.
- Possibilité de **mise en correspondance au niveau de la pensée** de mots ou de symboles avec des éléments de la réalité sensibles, présents ou absents, ou avec des éléments idéalisés superposés ou attachés à des objets de la réalité sensible (formes géométriques, déplacements, agencements, vitesse d'un objet matériel, etc...).
- En présence d'une écriture symbolique, d'autres signifiés abstraits **peuvent être attachés** aux symboles par le biais des mots-notions utilisés pour les nommer en cas de référence

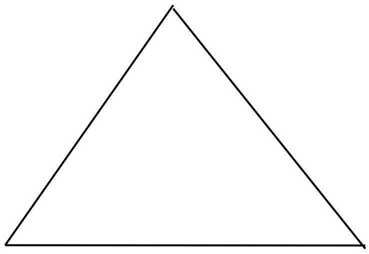
  (x est une objectivation symbolique du temps, x représente le temps, x est associé au temps, x est identifié avec un instant, etc...)
- Possibilité de détachement de la réalité sensible pour travailler sur les symboles en attachant un signifié abstrait et en acceptant des règles opératoires au statut conventionnel : sémantique opérationnelle, c'est-à-dire sans prise en compte de référents sensibles ou idéalisés. Les manipulations syntaxiques font malgré tout sens à l'intérieur d'un système de règles dont l'utilisation est codifiée. L'idéal est que ce système de règles ait fait l'objet d'une légitimation préalable, sans doute en partant d'analogies avec les phénomènes de la réalité sensible.

La prise de conscience de la mise en correspondance sur le plan cognitif des éléments de nature abstraite mobilisés pour l'explicitation du signifié abstrait, d'une part avec les symboles élémentaires intervenant dans le processus d'objectivation symbolique, et d'autre part avec des référents concrets ou idéalisés (objets matériels, physiques ou grandeurs associées à ces objets) dans la réalité sensible laisse donc apparaître des changements d'interprétation possibles et des va-et-vient cognitifs entre ces divers niveaux conceptuels.
L'objet fonction est ainsi un objet complexe du point de vue de sa manipulation sur le plan mental. En effet, il mobilise un signifié abstrait qui, par essence, est une mise en correspondance orientée ; par ailleurs, les traitements dans des registres sémiotiques mobilisent ce signifié à l'intérieur-même de ces registres et c'est par une mise en correspondance mentale des éléments convoqués dans les registres séparés que ce fait le passage d'un registre à l'autre.
De plus (ce phénomène est bien connu), certains signifiés étroitement associés à l'objet fonction ne sont pas conservés : dans la représentation graphique d'une fonction donnée par le biais d'une expression algébrique, le statut opératoire de cette dernière n'est plus visible dans l'objet graphique (courbe représentative) associé. Il est en revanche présent implicitement dans une perspective de construction de la courbe (voir Duval, 1993 et 1995).

<u>Notion de fonction</u>

Accès au sens du mot-concept *fonction*, par explicitation du signifié abstrait et prise en compte d'une référence potentielle ou actualisée

Signifié : mise en correspondance orientée 1 à 1 des éléments de deux ensembles avec l'idée de dépendance des seconds par rapport aux premiers et de telle sorte qu'à un élément du premier ensemble corresponde un et un seul élément du deuxième.



Signifiant linguistique:
le mot *fonction*

Remarques :

1) la référence symbolique peut être simplement suggérée ou décrite en langue naturelle : *la fonction qui va de tel ensemble dans tel ensemble et qui à x associe y*.

2) la deuxième condition liée au signifié ne transparaît pas de manière iconique, ou sur la base d'un ostensif, dans la symbolisation

Référence potentielle mais non nécessairement actualisée

Référent simple ou multiple, sémiotique ou non :

Référent mathématique dans le monde **par le biais d'une objectivation symbolique** duplicable à volonté mais sans modification du signifié.

L'objectivation symbolique se compose d'un nom, lui-même symbolique et implique d'autres symboles de nature mathématique.

$$f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$$
$$x \mapsto y$$

Chaque symbole contient **en puissance** une possibilité d'attachement d'un second signifié abstrait.

Ramification dans la référence : il y a parfois des **référents supplémentaires non-mathématiques** associés à chacun des symboles impliqués :

f représente la vitesse vue comme dépendant du temps, c'est-à-dire la mise en correspondance entre le temps x et la vitesse y à l'instant x.

1er cas :

Le mot *vitesse* intervient alors comme signifiant, avec son signifié abstrait mais sans être attaché nécessairement à un objet de la réalité sensible ou idéalisée. (**l'attachement** à un objet matériel ou idéalisé **est potentiel**)

2ième cas :

Il y a correspondance effective et actualisée dans la réalité sensible : la vitesse **est attachée à un objet qui se déplace effectivement**, **le temps est mesurable** avec un instrument. Il y a alors une nouvelle référence (actualisée).

Tableau 2.3 Le mot-concept fonction et le triangle sémiotique linguistique

Nous revenons sur la question de référence. Nous n'avons considéré, dans les exemples qui précèdent, que des référents univoques (interprétants parfaitement identifiés et relativement simples). Lorsqu'un symbole a plusieurs référents, et cela sera le cas dans nos situations expérimentales, il conviendra de les identifier clairement. Dans nos séances expérimentales, le symbole *n* renverra par exemple tantôt à un nombre de cubes dans un agencement matériel, au nombre de carrés dans une représentation schématique, au rang du nième gnomon, etc... Notre étude se focalise davantage sur les processus de conceptualisation (autour des mots). Le signifiant que nous avons considéré premier est pour nous le *mot*, car c'est lui qui permet une articulation avec les autres notions-phares que sont les représentations cognitives, les concepts et la phraséologie.

D'autres considérations sémiotiques sont possibles (approche basée sur la sémiotique de Peirce par exemple), notamment lorsqu'on entre plus avant dans les écritures formelles. C'est le cas dans l'enseignement supérieur, lorsqu'on est amené à prendre en compte les quantificateurs par exemple, les structures diverses (groupes, anneaux, espaces vectoriels, etc...) et les règles gouvernant les manipulations syntaxiques ainsi que les raisonnements qui vont de pair. Les concepts mathématiques se caractérisent alors, sur le plan cognitif et représentationnel, par un détachement plus marqué, un éloignement plus prononcé à l'égard de la réalité sensible. Ils sont nettement plus enrichis sur le plan des connaissances opératoires qui les mobilisent et se voient connectés aux autres concepts de nature mathématique (et partageant donc les mêmes caractéristiques) dans un réseau beaucoup plus dense.

Considérons par exemple une *fonction linéaire* telle qu'elle est appréhendée par un élève du secondaire. L'adjectif *linéaire* est ici attaché à l'idée de *droite*, de *ligne* par son étymologie et du fait de la pratique en Secondaire (référence forte au registre graphique). En revanche, dans le Supérieur, on pourra être amené à dire par exemple qu'une *fonction linéaire* (au sens où on en parle en Secondaire, par le biais d'une expression figée et en tant qu'elle est définie sur l'ensemble des nombres réels R) est une *application linéaire* sur R, R étant alors vu comme un espace vectoriel sur le corps R. Un même symbole (il sera alors préférable de dire representamen) se verra donc attribué des signifiés abstraits différents (on parlera alors d'objets, du point de vue de la sémiotique peircienne) par le biais d'interprétants mais en restant dans un processus interprétatif intrinsèque aux mathématiques formelles (et pouvant se passer d'une verbalisation intérieure sémiolinguistique). La sémiotique peircienne peut alors devenir intéressante pour décrire les divers interprétants possibles et les phénomènes courants de superposition des signes ou de déflation interprétative chez les étudiants. En revanche, dès que l'on sort, en quelque sorte, de ce domaine, il nous semble qu'il est préférable de s'exprimer en termes de *référents* et de s'appuyer sur le pouvoir évocateur des mots pour expliciter les signifiés abstraits associés à un concept (et qui sont d'ailleurs également impliqués dans la fonction dénotative elle-même).

V.5.c. Le signe mathématique concomitamment aux signes linguistiques

Nous revenons dans ce paragraphe sur la question de déterminer avec une certaine précision ce qui relève de la composante sémiotique relative aux signifiés. Nous avons mentionné (voir supra) la ramification des questions de référence lorsque le signifiant langagier est vu comme premier ; nous pouvons aussi mentionner que le signifié du mot-concept (cas du mot *fonction*) est susceptible d'intervenir dans les processus interprétatifs mobilisant l'écriture symbolique (le reprsentamen d'une fonction, « *f* ») d'un signe mathématique. L'individu qui pense ou s’exprime va donc recourir à des pseudo-signes mentaux qui sont des empreintes psychiques. Nous rappelons néanmoins que c’est le niveau sémantique pur qui est mobilisé lorsqu’une proposition mathématique fait sens ou lorsqu’un énoncé fait sens, sans qu’on se focalise sur les composantes sémiotiques des signes physiques ou des pseudo-signes mentalisés. C’est alors, dans le cas de chacun des deux types de signes (linguistiques et mathématiques) l’évocation qui joue. La question est de savoir si c’est *de la même manière*.

La dimension sémiotique est fondamentale lorsque le signe est produit dans un rapport direct à la réalité sensible mais en mobilisant des signifiés abstraits ou des signifiés purs. Parler de ces derniers présuppose qu’on puisse les percevoir et les expliciter. La dénomination *symbole-argument* (terminologie peircienne) pour un signe qui repose sur une règle explicitable est fortement intéressante pour nous du fait que nous aurons à traiter de *patterns* et que l’un des signifiés de ce mot-concept est précisément celui de *règle*. De plus, les *patterns* seront soit physiques, soit schématiques ou encore algébriques. Nous aborderons la question de *la règle sous-jacente* à un pattern en termes d’explicitation verbale mais aussi schématique. Le sens qui se dégage des manipulations ou qui s’attache aux objectivations physiques engage également un processus interprétatif et ce processus repose parfois sur un niveau de sens qui est celui des signifiés purs. Il dépasse celui de la verbalisation et implique fortement une prise en compte des percepts. Il relève donc indirectement aussi de l’expérience interne (voir la question des expériences mentales pour les preuves, au chapitre 1 II.4.). Nous avons postulé l’existence de ce qui relève d’une faculté humaine, à savoir la capacité à faire osciller l’attention entre des constituants sémantiques de type signifiés, des écritures physiques, des percepts, etc. Nous apportons ici quelques précisions. Nous appelons *perception sémantique*, la capacité d’un individu à percevoir les signifiés d’un mot-concept. Cette perception sera dite *aigüe* lorsque la perception descend jusqu’au niveau des sèmes. La perception sera dite *très aigüe* si elle prend en considération plusieurs mots à la fois en en L1, L2 et leur décalage sémantique en termes de non-recouvrements. Ce phénomène métaphoriquement exprimable en termes de décalage participe lui-même d’une description bipolaire du processus d’appréhension d’une représentation cognitive : *centration* ou *décentration sémantique*. En effet, potentiellement, en référence à une prise en compte idéale des sèmes, le mot-concept semble figé et centré dans un réseau, au milieu de mots sémantiquement proches. Lorsqu’il figure dans un énoncé, ou encore lorsqu’il est pensé par un individu, certains signifiés sont activés et d’autres inhibés. Le mot-concept apparaît donc décentré par rapport à sa position dans l’absolu. De plus, lorsque l’individu passe de la L1 à la L2, en mobilisant un candidat à la traduction, les signifiés activés ou inhibés peuvent varier, ce qui induit un décalage supplémentaire entre le niveau de sens verbalisé en L1 et le niveau de sens en L2 (voir chapitre 3, pour des modèles d’interprétation des niveaux de sens et de conceptualisation avec prise en compte des deux langues).

Ainsi, dans l’expression *see pattern 3,* ce sont plutôt les signifiés de *motif*, d’*exemplaire* ou d’*image* qui seront mobilisés, avec une activation du caractère *statique*.

Dans le cas de l’expression *behaviour pattern*, on pensera à un ensemble de *traits distinctifs comportementaux*, dans une perspective davantage tournée vers le pôle *dynamique*.

Le cas de l’expression *geometrical pattern*, au sein-même de la pratique mathématique, sera étroitement dépendant du contexte et posera donc des problèmes de traduction (voir chap. 5).

La sensibilité aux connotations varie d’un individu à l’autre. Elle est fortement dépendante du vécu et du réseau lexico-sémantique mental d’un individu. En général, cette capacité s’acquiert petit à petit, suite à une exposition dans la durée à la langue.

Au sein d'un calcul formel, le symbole mathématique fonctionne lui aussi selon un principe d'évocation. L'écriture formelle dispense de gérer des éléments de pensée sur le simple plan mental, c'est-à-dire au niveau purement sémantique des signes mathématiques. Lorsque les procédures mentales sont trop complexes, l'objectivation symbolique permet des écritures dans le milieu physique autorise des manipulations idéalisées (voir tableau 2.2). Les écritures physiques statiques, qui continuent d'être interprétées dynamiquement, sont censées correspondre à des signifiés mathématiques purs, au sens parfaitement cerné, et qui dépendent des règles d'utilisation des symboles. Les mots qui sont alors souvent implicites et qui peuvent malgré tout accompagner ces écritures, sont des mots tout aussi parfaitement délimités du point de vue de leur signifié langagier (c'est-à-dire sans connotations : le mot *vecteur* au sein de la pratique mathématique, c'est-à-dire dans un sens strictement mathématique). En général, ces mots sont simplement *oralisés* sans mobilisation des constituants de signification sur le plan de la concience. On pourra oraliser (extérieurement ou intérieurement) par exemple *vecteur u scalaire vecteur v* ou encore *u scalaire v,* sans mobiliser le signifié langagier de *vecteur* (signifié composite : direction, sens et longueur).
En revanche, les mots retenus qui figurent dans les commentaires annexes, pour décrire les étapes, les changements de statut, les légitimations mais aussi les objets mathématiques convoqués (à l'aide de métaphores par exemple) sont certes parfaitement délimités pour un mathématicien aguerri mais il n'en va pas de même dans les situations d'apprentissage. Ces mots ont certes fait l'objet d'une négociation fine, au cours de l'histoire, sur le plan du savoir savant (on parelera ainsi de la *nature* d'une fonction, de la *valeur* d'un terme d'une suite, etc…) mais néanmoins, ils mobilisent des signifiés purs de nature langagière. Ils sont donc immanquablement aussi connotés et culturellement marqués.
Les mots sont indispensables également pour des injonctions : *calculate* T_{100} ou encore *determine the value of* T_{100}, par exemple.
Là encore, ils servent à engager l'élève dans une tâche et même si celle-ci est de nature strictement procédurale, les signifiés convoqués ne sont pas associés à l'écriture symbolique elle-même. En effet, dans l'écriture T_{100}, le rang est sémantiquement déductible du symbole mais pas la valeur. Au passage, la valeur, lorsqu'elle est attribuable, donnera lieu à une explicitation formelle en termes d'égalité : $T_{100} = \ \ldots \ T_3 \ = 6$.

Conclusion du chapitre 2

Les notions d'évocation et de représentations cognitives, comme nous l'avions annoncé dans l'introduction, sont les clefs de voûte de notre exposé, tout comme celle d'idéalisation.
Les conceptions que nous avons exposées ont grandement présidé à l'élaboration et à l'analyse des situations expérimentales. Elles portent sur les questions touchant déjà à la cognition et certaines d'entre elles sont, comme le lecteur aura pu le constater, grandement influencées par la sémiotique vygotskienne, la sémiotique peircienne et celle de Radford.
Pour le chapitre que nous venons d'exposer, nous retiendrons :

- la distinction entre les divers types de représentations, notamment entre représentation mentale (expérientielle et en acte) et représentation cognitive (ou pré-représentation cognitive, lorsqu'elle n'est vue que comme potentielle et située en mémoire).
- l'importance du lien entre représentations cognitives et composante didactique ;

— l’importance des schémas et des modes de lecture possibles selon qu’on les interprète de manière statique ou dynamique, mais surtout dans un contexte mathématique et didactique

— le lien entre les restructurations de connaissances, l’attachement de nouvelles représentations et les modifications du sytème organisateur (*en surface*, c’est-à-dire en termes didactiques et situationnels propres à la TSD, selon Bloch et Gibel) ; point que nous avions déjà abordés au chapitre 1.

Dans le chapitre suivant, nos considérations vont résulter d’une approche plus cognitive. Ceci est incontournable puisque les questions liées au sens, à l’abstraction, au concept impliquent l’individu qui pense.

L’individu qui pense, pense avec une pensée verbalisée, ce qui nous invite à prendre en compte les questions relatives à la langue.

Mais l’individu pense parfois aussi sans avoir à verbaliser intérieurement. Le rôle de la perception active est alors essentiel. Nous ne développerons pas notre présupposition d’un lien existant entre pseudo-sèmes associés aux percepts et les sèmes associés aux mots du lexique mental mais nous examinerons au chapitre suivant les questions de signification pour les mots et pour les symboles mathématiques d’un point de vue sémiotique, en distinguant signifié langagier (réductible éventuellement à un sème) et constituant de signification mathématique, associé à un symbole pris uniquement dans un système de règles codifiées et déculturalisées.

CHAPITRE 3. DIDACTIQUES, LANGUES, CULTURES ET BILINGUISME

Dans ce chapitre, nous souhaitons dresser un bref état des lieux de l'évolution des pratiques d'enseignements d'une L2, des apports des recherches en didactiques des langues et des perspectives qui s'ouvrent quant à l'enseignement de type CLIL-Mathématiques.
Au risque d'être parfois un peu redondant, nous avons décidé de ne pas localiser l'étude des rapports entre mathématiques, d'une part, et langues vivantes, d'autre part, à l'intérieur d'un seul et même chapitre. Il nous a semblé que la reprise de certains éléments, de certaines notions, dans des parties différentes mais relativement à des problématiques, elles-aussi, à chaque fois différentes, garantirait une lecture plus fluide et témoignerait de notre souci constant de prendre en compte la diversité des approches possibles d'une question et l'articulation des concepts et représentations théoriques convoqués à des niveaux divers.

I. Tendances actuelles : recherche d'une cohérence

En matière de didactique des langues, on constate que les écoles de pensée, les théories sont multiples et peuvent conduire à des conflits d'interprétation. Elles restent attachées à des habitudes et pratiques qui ont marqué les époques antérieures et elles sont influencées par la volonté d'intégrer des éléments provenant d'autres champs disciplinaires tels que les théories ou approches psychologiques, les théories d'apprentissage proposées par les chercheurs en sciences de l'éducation ou encore les théories linguistiques (Rolland 2004).
Selon Puren (Puren 2009), dans une perspective historique, les *configurations* didactiques changent ou sont remplacées suite à une évolution des attentes et des besoins sociaux. Ces changements ou ruptures dans l'enseignement des langues seraient selon lui en rapport direct avec les changements idéologiques en matière de progrès social et suivraient de près les domaines du management. Le lecteur trouvera dans (Puren 2007) une chronologie relative à l'influence des idéologies. Puren y distingue plusieurs périodes. La dernière évolution en date est celle de la perspective actionnelle.
Selon Puren, il y a un parallèle manifeste entre les dernières tendances managériales qui s'expriment en termes d'*entreprises orientées-projet*s ou de *management par les compétences*. Les entreprises seraient en train de passer d'un *paradigme de la communication* à un *paradigme de l'action* ou plutôt de la *co-action*. Il en va de même en didactique des langues. A cet égard Puren déclare :

> Alors que l'approche communicative visait principalement l'interaction langagière, et que son agir de référence était *un agir sur l'autre* par la langue (les actes de parole), il devient dans la perspective actionnelle *un agir avec l'autre* (l'action sociale) pour lequel la communication langagière n'est que l'un des moyens, et non plus l'objectif.

On constate également, ces dernières années, une montée de l'éclectisme dans les théories relatives à l'enseignement des langues, éclectisme qui se manifeste jusque dans les manuels scolaires (cf. Rolland 2004, Puren 2007). Pour Rolland, la non-unification du champ de la didactique des langues est due à l'évolution de la notion-même d'apprentissage. Vers les années 1950, l'apprentissage était centré *sur la lecture, la traduction et la mémorisation de vocabulaire et de règles grammaticales*. Vers les années 1960, on *étudie la phonétique et la langue est contextualisée grâce à l'audio-visuel.* A partir de 1980, on observe un recentrage sur l’apprenant et vers 1990, *l’approche communicative intègre la psychologie communicative* (Rolland 2004)[58]. Rolland insiste sur la nécessité désormais de prendre davantage en compte le couple enseignant-apprenant et le couple enseignant-savoir. Il préconise ainsi : « [de] tenter d’augmenter le plaisir d’apprendre en injectant des paramètres relatifs aux comportements, à l’expérience, à l’acuité sensorielle et à l’empathie ».

I.1. Les dimensions affective, socio-culturelle, éthique

Au niveau théorique, nous mentionnerons la nécessité de prendre en compte le *discours affectif* (voir infra). Quant à l’élaboration des situations expérimentales, dans la mesure où celles-ci sont majoritairement des situations a fort potentiel d’adidacticité[59], on peut d’ores et déjà dire qu’elles comportent, au-delà de la difficulté inhérente à toute tâche que l’on souhaite faire accomplir, et en raison de l’idée-même de *défi*, un côté ludique indéniable. Cette notion de *challenge* est étroitement attachée à ce type de situation et à la perception conscientisée ou non de la connaissance nouvelle en train d’émerger.

Par ailleurs, en contexte CLIL[60], au-delà de l’importance d’une centration sur l’aspect interactionnel des tâches à réaliser, les considérations culturelles, les spécificités linguistiques et para-mathématiques, peuvent permettre de susciter un réel intérêt de la part des élèves. Il en va ainsi par exemple lorsqu’il y a prise de conscience de l’existence de conventions différentes dans la pratique mathématique chez les anglo-saxons[61] ou des spécificités au niveau pragmatique (telles que la non-existence de tableau de variations *à la française*[62] …). De tels éléments sont fortement susceptibles d’aiguiser la curiosité des élèves.

La perspective adoptée par Rolland (ibid.) consiste à mettre l’accent sur l’acuité sensorielle, sur la nécessité d’intégrer une approche multi-sensorielle, de renforcer les domaines visuels et auditifs en prenant en considération l’expérience vécue et la composante émotionnelle. Il nous apparaît qu’elle est tout à fait conciliable avec l’approche multimodale (elle-même reposant sur des analyses multi-sémiotiques) et la prise de conscience, en didactique des mathématiques, de l’importance des expériences antérieures dans la construction des savoirs nouveaux, et qu’elle peut donner un éclairage particulier quant à l’idée d’intégration en matière d’enseignement de type CLIL. En nous exprimant de la sorte, nos propos renvoient à l’idée générale que nous avons déjà évoquée et selon laquelle la tendance actuelle viserait à intégrer des approches et des théories multiples en se focalisant désormais sur le ludique, l’émotionnel c’est-à-dire sur le plaisir dans l’apprentissage. Nous pensons néanmoins qu’il serait bon de ne pas oublier la composante *existentielle*, c’est-à-dire comment l’individu (le sujet, l’apprenant) va progressivement se positionner face au monde, quelles représentations il va pouvoir se faire de ses apprentissages disciplinaires (encore trop souvent cloisonnés) en rapport avec sa construction du réel et l’élaboration de son projet personnel. La question ne se poserait donc plus en termes d’influence mais plutôt en termes de rôle effectif joué par l’enseignant sur la *construction de représentations* chez l’apprenant.

---

[58] Les points de vue de Rolland et Puren se rejoignent manifestement sur l’état des lieux de la DLE ou DLC.

[59] Au sens de la TSD, voir supra également

[60] Nous rappelons que CLIL signifie Content and Language Integrated Learning.
Voir pour un état des lieux de l’enseignement CLIL.

[61] (de manière générale, toute configuration, qu’elle se rapporte au numérique, au géométrique est interprétée au sens strict chez les anglo-saxons et au sens large chez les francophones)

[62] Nous entendons par là des tableaux comportant des flèches pour traduire et illustrer le sens de variation de la fonction étudiée.

Nous aimerions également ajouter, mais sans que cela donne lieu à des investigations particulières pour nos travaux, la prise en considération au niveau des recherches en sciences humaines, et en particulier dans les sciences de l'éducation, de thèmes tels que ceux de l'éthique et de l'esthétique. On assiste depuis peu à la manifestation tangible d'une volonté d'insérer la pratique mathématique dans un cadre socio-culturel très élargi en la rattachant explicitement aux autres domaines par le biais d'une véritable problématique, d'une manière qui ne soit pas artificielle ni simplement méthodologique. Cette tendance d'inspiration manifestement socioconstructiviste est nettement visible dans la formulation des programmes de mathématiques (au niveau secondaire) au Québec. Il est même à noter que les nouveaux programmes québécois font de multiples références aux changements ou aux choix de registres sémiotiques ainsi qu'à la relation étroite existant entre la pratique mathématique et la pratique de la première et la seconde langue.

Afin de corroborer notre propos, nous joignons un extrait de la présentation de la discipline (p 1), il donne tout de suite le ton :

> Science et langage universel, la mathématique concourt de façon importante à la formation intellectuelle, sociale et culturelle de l'individu. Elle offre des clés pour appréhender le réel et permet de dégager des modèles et d'effectuer diverses opérations sur ces modèles. Elle fournit à l'élève des outils qui lui permettent de s'adapter à un monde en évolution, de mettre à profit son intuition, sa créativité et son esprit critique, et de prendre des décisions. Elle l'aide ainsi à structurer son identité, à construire sa vision du monde et à développer son pouvoir d'action. Elle le prépare à devenir un citoyen réfléchi et responsable au sein de la société.

Voici à titre d'illustration un extrait représentatif du programme correspondant (livret de 143 pages), il figure sous la rubrique langue (p 9) :

> Une bonne maîtrise de la langue et l'utilisation de certaines stratégies langagières sont essentielles à l'exercice des compétences mathématiques. Il peut s'agir, par exemple, de stratégies de lecture, d'analyse de mots et de phrases, d'écriture, d'écoute, de prise de parole, de révision, de détection et de correction. Elles permettent de comprendre les éléments d'une situation-problème, d'élaborer une solution et de la communiquer. La langue est par ailleurs nécessaire à la formation de réseaux de concepts et de processus mathématiques ainsi qu'à l'émission et à la validation de conjectures. Enfin, le passage d'un registre de représentation sémiotique à un autre est soutenu par les habiletés langagières de l'élève et, réciproquement, ces dernières permettent d'enrichir les éléments visuels à considérer dans l'organisation graphique et textuelle.

Un trait important qui se dégage de ces programmes est d'offrir un espace de liberté plus large et une ouverture effective sur le monde.

Sur le terrain, la position des enseignants de langue vis-à-vis des enseignants CLIL laisse souvent apparaître des *non-dits* en matière de prérogative de l'enseignement de la langue. En ce qui concerne l'image que l'enseignant de langue se fait de sa fonction, de son statut, la coprésence d'enseignants CLIL dans l'établissement est fortement susceptible, indirectement ou implicitement de lui renvoyer une impression de régression de son statut. Même s'il ne le manifeste pas ouvertement, il peut lui être difficile d'assumer cet état de fait vis-à-vis de celui ou celle qui va empiéter sur son territoire en osant introduire dans ses cours des considérations linguistiques, voire métalinguistiques. A cet égard, nous pensons qu'inversement, les enseignants de mathématiques auraient beaucoup de mal à accepter le fait que des enseignants de langues vivantes étrangères se mettent à enseigner les mathématiques en anglais en ayant simplement passé une (imaginaire) certification en mathématiques. Dans le cas d'une hypothétique collaboration, ou d'une collaboration effective, l'enseignant de langue peut difficilement s'auto-imaginer autrement que comme *auxiliaire* de l'enseignant CLIL puisque l'on voit mal pour l'instant comment l'enseignant CLIL pourrait apporter sa contribution relativement à un enseignement traditionnel de la langue seconde. Nous ne proposerons pas d'investigation dans cette voie car cela nous amènerait trop loin du cadre de nos recherches.

I.2. Approche conceptualisante et centration sur l'énonciation

Nous souhaitons dans ce paragraphe proposer quelques pistes de réflexion en matière d'approche conceptualisante de l'enseignement (au sens de Chini) et de centration sur l'énonciation (en références aux théories énonciativistes[63]). Nous estimons en effet, que les concepts issus des théories énonciativistes sont les plus à même de rendre compte des phénomènes d'interaction (verbale ou même multimodale) ayant lieu dans le traitement des situations-problèmes en contexte CLIL.

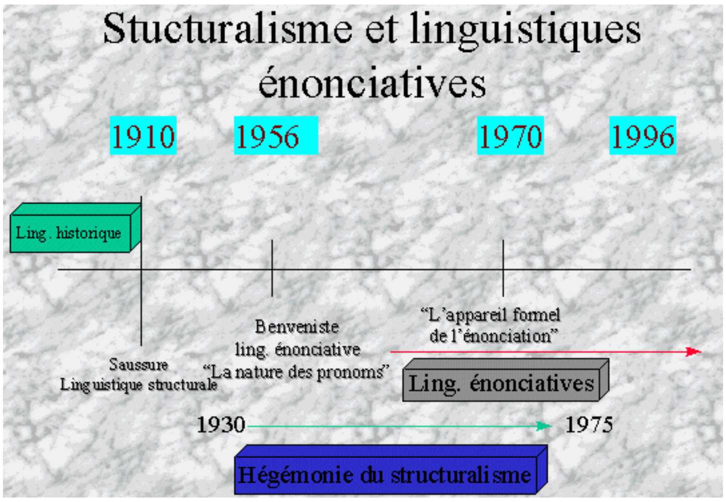


Figure 3.1

Figure extraite de l'article de Gezundhait (Gezundhait, 2010)

En linguistique énonciative, le fait de produire l'énoncé compte autant que l'énoncé lui-même. La langue dans son utilisation effective est donc au centre des préoccupations. Les référents appartenant à la réalité du monde et impliqués par les signes n'apparaissent pas seulement qu'en tant qu'ils sont extérieurs à la langue mais en tant qu'éléments essentiels du discours. Ils sont donc aussi objets de réflexion. Les énonciativistes estiment qu'en présence du référent, le rôle du contexte peut devenir annexe. La place des déictiques devient essentielle dans les situations d'ostension : l'énoncé « *this is a pattern* » en présence d'un motif, d'un schéma, trouvera son sens dans le milieu extralinguistique sans qu'il soit fait appel au contexte linguistique. Cet aspect ne sera pas négligeable lorsque nous examinerons les résultats des séances expérimentales, et en particulier leurs transcriptions.
Les énonciativistes distinguent des formes stables telles que les mots concrets (table, voiture, etc...) et des formes plus instables tels que les pronoms par exemple. La situation discursive passe au premier rang et la pragmatique également.

[63] Nous pensons par exemple à la TOE (théorie des opérations énonciatives) de Culioli, aux travaux de Benveniste, etc…

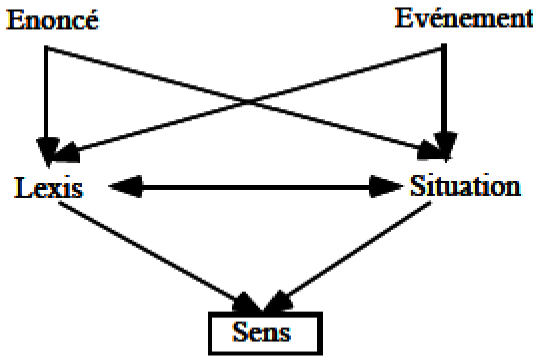


Figure 3.2

Figure extraite de Caelen (1992)

Les conditions énonciatives sont essentielles pour une description pertinente des énoncés. En ce qui concerne la TSD et les notions-phares de milieu, de situation, de référence et de validation, il est clair que chacun comprendra nos motivations à nous positionner du côté des énonciativistes sans que nous ne rejetions pour autant les idées issues du structuralisme. Les énonciativistes ne le font d'ailleurs pas.

Les présupposés, les sous-entendus, les éléments présents implicitement dans les énoncés sont également objets d'étude pour les théories énonciatives. Or, en ce qui nous concerne, l'explicite et l'implicite, y compris au niveau schématique, sont des éléments sur lesquels nous serons conduit à nous focaliser.

Les mots renvoient à et décrivent l'organisation de la réalité du monde. Un même énoncé évoquera des choses différentes en fonction de telle ou elle situation. Le contexte est ici situationnel et non plus seulement linguistique. Il est donc clair que nous allions **aussi** dans ce sens plutôt qu'uniquement vers celui du structuralisme.

Les quelques éléments que nous avons évoqués ici quant à l'énonciation sont inspirés, entre autres, de la lecture de l'article de H. Gezundhait (2010)[64]. Nous rencontrerons des considérations similaires aux questions soulevées par ce type d'approche lorsque nous aborderons, au paragraphe VI, le thème de la reformulation, en nous référant cette fois aux travaux de Pennec (voir Pennec, 2006).

En attendant, nous complétons notre exposé en citant quelques éléments d'analyse comparative que nous trouvons significatifs et qui sont extraits de l'article de Gezundhait :

Question que se posent les structuralistes :	Question que se posent les énonciativistes :
Comment les formes linguistiques sont-elles connectées selon un découpage en phonèmes, lexèmes, morphèmes, syntagmes, etc... ?	Comment les formes linguistiques se mettent-elles en situation et sont-elles prises en charge par des énonciateurs ?

Phrase	Énoncé
Forme syntaxique comprenant au moins un verbe conjugué. (ex. *Je n'aime pas beaucoup le poisson surgelé*)	produit d'un énonciateur au cours d'un acte d'énonciation dans une situation donnée. Il ne s'agit pas forcément d'une phrase (ex. *Moi, le poisson surgelé, bof...)*

[64] Article consultable en ligne à l'adresse http://www.linguistes.com

L'idée d'une approche conceptualisante devrait permettre la prise en compte de la composante cognitive et de la composante discursive des phénomènes d'interaction. Le but étant de permettre une articulation de ces deux composantes au niveau de la pratique en classe. L'enseignant CLIL cherchera à relever, dans le discours produit en L2 par l'élève, *les indices* d'une *adéquation* entre l'énoncé et le traitement cognitif d'une situation mathématique. Il doit donc faire la part de ce qui procède par exemple de difficultés d'énonciation dans la L2 et de ce qui relève d'une mauvaise représentation ou d'un mauvais traitement de la tâche mathématique et/ou cognitive.
Dans la pratique, le problème se pose de savoir si l'enseignant CLIL doit ou non reprendre un éventuel point de grammaire ou alors laisser cela entièrement à la charge du professeur de L2. Les instructions ne mentionnent pas si l'enseignant CLIL est censé ou non, face à des problèmes liés spécifiquement à la formulation en L2, se référer à la grammaire lors d'une phase de remédiation.

II. L'enseignement de type CLIL

II.1. Etat des lieux

Nous avons déjà introduit et conserverons dans la suite de nos travaux l'acronyme CLIL car c'est celui qui est le plus employé et qui tend à s'imposer partout en Europe et, en tout cas, dans les publications internationales. Il signifie Content and Language Integrated Learning (apprentissage intégré d'un contenu et d'une langue, c'est-à-dire d'une matière dans une langue étrangère)[65].
Dans l'édition 2014 d'un manuel de seconde, nous pouvons saluer l'attitude des éditeurs qui ont choisi de consacrer une rubrique à l'enseignement des mathématiques en anglais. Elle s'intitule « No Problem » et concerne une page entière par chapitre. Néanmoins, en y regardant de plus près, on peut relever des erreurs grossières dans les énoncés. On trouvera par exemple[66] :
for every number x "different of" zero, expression pour laquelle, dans un premier temps, on pensera immédiatement à rectifier par "different from". Mais cela ne suffit pas, à nos yeux, car l'anglo-saxon utilisera tout autant, sinon davantage, « l'adjectif » *nonzero*, en disant à cet effet *for every nonzero x*, ce que l'on ne trouve nulle part dans le manuel…
On trouvera également, signe d'un manque de maîtrise de la L2, de la part de l'auteur et/ou des relecteurs :
« how » is point O called. L'anglais dira, du point de vue syntaxique, « *what* » *is it called* et du point de vue sémantique, en référence cette fois à la notation *« how » is it « denoted »*.
Voici un exemple qui tient compte de ces remarques :

***What** is the matrix X **called**, and **how is it denoted** in this case?*

Le résultat produit, quelle que soit l'intention initiale, ne peut être considéré comme satisfaisant, du point de vue d'un véritable enseignement CLIL, c'est-à-dire intégré, si la formulation-même des énoncés n'est pas recevable.

[65] En France on trouve aussi l'acronyme EMILE. Il signifie Enseignement de Matières par Intégration d'une Langue Etrangère. A toutes fins utiles, en Espagne et en Allemagne, on trouve encore les acronymes suivants : AICLE en Espagne (Apprendizaje Integrado de Contenidos y Lengua Extranjeras). Signalons qu'à l'heure actuelle, ils tendent à être systématiquement remplacés par celui de CLIL.
[66] Exercice 78 p 125 ; Ex 77 p 227, etc… (Mathématiques en 2nde, éditions Hachette)

Mais revenons à ce type d'enseignement, désormais largement répandu. Nous considérons que le lecteur trouvera dans la littérature de très nombreux renseignements. On trouve en effet, depuis quelques années maintenant, de nombreuses publications [67]. Les articles qui traitent de l'enseignement CLIL se placent dans une perspective relativement générale et la majorité d'entre eux sont basés sur une approche linguistique, sociolinguistique ou cognitivo-linguistique. Ils traitent certes des rapports entre la deuxième langue (L2) et les contenus de la DNL mais peu d'entre eux s'attaquent aux points beaucoup plus délicats, c'est-à-dire aux *spécificités* de chaque discipline (de chaque DNL). Les publications sont en effet en grande partie[68] le fait des linguistes. La majeure partie de ces études ne prennent pas suffisamment en compte la *spécificité de l'articulation* des éléments linguistiques et des contenus disciplinaires dans les *situations didactiques.* Nous estimons que les disciplines (DNL), et notamment les disciplines scientifiques (et en l'occurrence aux mathématiques), possèdent chacune des particularités : elles ont un mode de fonctionnement originel (dans la L1) et une articulation des *savoirs* (du point de vue des didactiques concernées) qui leur sont propres et qui ne sont visibles souvent que par les tenants de ces disciplines. C'est un des objets de notre thèse de mettre en lumière ces spécificités dans le cas des mathématiques et nous rappelons à cet égard le contexte très ciblé dans lequel ont lieu nos travaux : il s'agit ici de l'enseignement des mathématiques, en anglais, en classes européennes[69], et à travers des situations didactiques expérimentales.
Nous souhaitons néanmoins résumer ici quelques-unes des recommandations méthodologiques relativement aux enseignements de type CLIL. On peut les trouver dans de nombreuses publications[70], celles-ci étant en majorité de tradition anglo-saxonne. Elles sont d'inspiration cognitiviste et il s'agit principalement de ressources destinées aux enseignants. Elles résultent en général d'un travail collaboratif de la part des chercheurs et révèlent une orientation très pédagogique. Ces éléments n'auront qu'un impact relativement réduit sur nos travaux dans la mesure où ceux-ci vont consister à effectuer une analyse didactique fine de l'articulation des savoirs visés, articulation qui, selon nous, ne peut être saisie qu'à travers l'étude méticuleuse des interactions dans des situations élaborées de manière à actualiser une conception de l'intégration plus élargie et plus profonde. Les premières études, en matière d'enseignement CLIL-mathématiques, ont consisté à chercher à définir puis à proposer un cadre de fonctionnement basé essentiellement sur une approche linguistique orientée-tâche (perspective actionnelle). Nous nous proposons d'énumérer les éléments sous forme de concepts-clés dans le cas de la L2 anglais (nous nous inspirons entre autres des ouvrages intitulés Teaching Maths through English, a CLIL approach et CLIL Activities, voir note précédente). Ces points sont récurrents dans les ouvrages traitant d'enseignement CLIL.

[67] Pour le lecteur désireux d'approfondir la question nous proposons les articles, compte-rendu de colloques et publications suivants : le « Handbook » LICI (Language in Content Instruction) téléchargeable en ligne à l'adresse suivante : http://lici.utu.fi. Voir aussi le Digest CLIL / EMILE (2004) préparé par le groupe d'accompagnement de l'immersion linguistique, et les actes du colloque de Venise (2008) intitulé « CLIL e l'apprendimento delle lingue Le sfide del nuovo ambiente di apprendimento ».
[68] Mais pas exclusivement, nous tenons à le préciser.
[69] Nous ne détaillerons pas les spécificités de cet enseignement car le lecteur trouvera également tous renseignements utiles dans la littérature officielle.
[70] Voir par exemple Teaching Maths Through English, a CLIL approach, proposé par University of Cambridge ou encore l'ouvrage CLIL Activities de Liz Dale and Rosie Tanner. (cf bibliographie)

On trouvera ainsi presque systématiquement :

The « 4 Cs » (Content, Communication, Cognition, Culture)

Content-obligatory / content-compatible language

Planning a CLIL lesson	Activating prior knowledge Input and output Wait time Interactive pair or group work tasks Cognitive challenge

Learning objectives

- Subject Content
- Communication
- Thinking and learning skills

Tasks

- Language Support / Scaffolding
- Chunking
- Consolidation (activities)
- Material and Resources
- Cross-curricular links
- Assessment
- Bloom's taxonomy / HOTS and LOTS (Higher Order or Lower Order Thinking Skills)

II.2. Analyse et perspective

Dans le paragraphe précédent, notre propos était simplement de montrer qu'en l'état actuel des recherches en matière d'enseignement CLIL-Mathématiques, on ne relève quasiment jamais de publications prenant véritablement en considération l'*articulation* entre le *caractère interactionnel* de l'activité en classe et le *fonctionnement* très particulier des *connaissances mathématiques*. Pour montrer au lecteur à quel point ce point est peu abordé, nous nous contenterons de prendre deux exemples, tant ils sont significatifs : dans l'ouvrage intitulé CLIL Activities (Dale et al 2012), la part consacrée à chacune des disciplines spécifiques, et donc en particulier celle consacrée aux mathématiques, est réduite à une dizaine de pages environ. Ceci est révélateur d'une approche globale et non véritablement spécifique des disciplines et dans le « Handbook LICI »[71], aucun passage ne mentionne véritablement telle ou telle discipline *en particulier*.

Néanmoins, les interprétations officielles concernant les rapports langues-contenus semblent malgré tout évoluer depuis quelque temps. On peut ainsi noter que la tendance générale au niveau du Conseil de l'Europe est d'insister sur la prise en compte, en matière d'enseignement des mathématiques (ainsi que d'autres disciplines d'ailleurs), des composantes linguistique *et sémiotique* (ce qui n'était pas le cas au début des années 2000) et

[71] Voir notes précédentes et bibliographie.

des valeurs éducatives[72]. L'analyse y est formulée, comme c'était le cas pour le CECRL, en termes de compétences mais l'approche se place au niveau discursif, communicationnel, expérientiel et social. Une distinction est clairement établie, au niveau des situations sociales et privées pour lesquelles les mathématiques jouent un rôle. Cette distinction, relativement à un contexte situationnel donné, porte d'une part, sur la distance entre le problème et l'étudiant et d'autre part, sur la distance entre le problème et les mathématiques impliquées. L'étude se focalise sur l'aspect communicationnel des situations contextualisées décrivant les situations où les mathématiques sont amenées à jouer un rôle, tout en les distinguant selon qu'elles sont à caractère personnel, occupationnel, publique ou scientifique. Il est intéressant de noter l'importance accordée à la composante relative à la maîtrise des *types de discours*, à la composante formelle, à la composante interdisciplinaire et à la composante stratégique. La notion de type de discours est, dans l'article, clairement rattachée au concept de communauté de discours (ce qui n'était pas le cas auparavant). L'auteur fait remarquer également qu'il est vivement conseillé de s'appuyer sur l'expérience ou les capacités (relativement aux types de discours) qu'ont initialement les élèves sans négliger les formes de représentations non verbales. Il mentionne également la difficulté de classifier les types de discours car la plupart des discours ou des textes relèvent souvent de plusieurs types (narratif, descriptif, impératif, persuasif, etc...). Si cet article récent intègre, comme nous l'avons vu, de nouveaux éléments, sa présentation trahit encore *une articulation insuffisante* au niveau des nouveaux centres d'intérêt et des compétences associées. Si le discours ne prend plus la forme d'une énumération de recommandations, en s'appuyant malgré tout, il faut bien le reconnaître, sur une analyse plus fine et plus riche, il ne consiste pas moins non plus en une énumération catégorisée de compétences. Le point fort, la nouveauté viennent des pistes implicitement proposées au travers des analyses.

En résumé, la notion sous-jacente d'*intégration* langue-contenu disciplinaire ne peut être appréhendée véritablement sans une prise en compte effective de l'articulation de toutes ses composantes au niveau interactionnel, situationnel, spécifique et discursif.

En guise de conclusion, nous dirons simplement qu'en matière d'enseignement CLIL-mathématiques, il est impératif que les réflexions didactiques dépasse la simple approche méthodologique ou pragmatique (voire simplement pédagogiques) et *intègrent* les considérations épistémologiques des didacticiens des mathématiques et les considérations théoriques des linguistes. Il n'est pas concevable que le pragmatique précède l'épistémologique et pourtant les faits prouvent le contraire. Il est temps selon nous que cette tendance s'inverse. En matière de recherches portant sur l'enseignement CLIL, ce sont d'abord et majoritairement les linguistes qui se sont tournés vers les DNL scientifiques, soit en tentant d'utiliser leurs propres cadres théoriques, soit en se contentant d'y faire référence dans une optique malgré tout fondamentalement pragmatique. C'est désormais aux didacticiens des disciplines scientifiques, conscients des spécificités de leurs pratiques, d'adapter leurs cadres théoriques de manière à non pas juxtaposer ceux-ci à ceux des linguistes mais plutôt de façon à tendre vers une intégration au niveau théorique en redéfinissant ou élargissant leurs concepts respectifs. Il est clair que, pour que ce projet ne reste pas un vœu pieu, il est nécessaire que les didacticiens des disciplines scientifiques

[72] Items for a description of linguistic competence in the language of schooling necessary for learning/ teaching mathematics (in secondary education) An approach with reference points. (Council of Europe, April 2012). Texte produit par Helmut Linneweber-Lammerskitten (voir biblio)

disposent de connaissances linguistiques suffisantes et soient au fait des théories linguistiques ayant cours. L'inverse serait tout à fait envisageable a priori mais, compte tenu des cultures éducatives des chercheurs, il paraît peu probable que les linguistes aient une maîtrise suffisante des questions d'ordre didactique et épistémologique des disciplines scientifiques. En tout cas, c'est au niveau des équipes de recherche en didactique, au niveau donc du supérieur, que les problèmes de transdisciplinarité doivent prendre véritablement leur origine et s'actualiser dans une collaboration qui ne peut être que productive.

III. Morphologie du discours en contexte CLIL-Maths

Nous examinons les caractéristiques et les types significatifs de discours relatifs à la pratique mathématique, sur un plan général d'abord puis en prenant en compte les spécificités liées à l'enseignement CLIL-mathématiques. Nous n'avons pas pour but de dresser une typologie des discours CLIL ni une étude exhaustive des traits saillants qu'il peut prendre. Nous en examions néanmoins un certains nombre. Nous rappelons que le discours peut être appréhendé selon la forme (morphologie) ou le contenu. Nous mettons l'accent sur la forme par le biais d'un examen des types et sur le contenu en examinant des thèmes mais aussi en ragardant la place des objets mathématiques. Nous nous focaliserons aussi sur certaines facettes particulières, notamment en ce qui concerne l'anticipation ou encore le lien avec les documents ressource lorsqu'on les envisage comme pouvant faciliter l'énonciation ultérieure.

En contexte CLIL, par le jeu d'un questionnement adéquat, l'enseignant peut orienter le discours vers une verbalisation plus langagière que formelle. Il peut en effet par exemple insister sur la légitimité des règles utilisées, sur les conditions de validité des propriétés rencontrées ou encore sur les stratégies adoptées pour résoudre un problème .

En revanche, nous n'examinerons pas l'aspect semi-formel (nous entendons ici semi-symbolique) qu'il peut revêtir et nous ne détaillerons pas les formes que peut prendre un discours trop proche du formalisme dans la mesure où presque tout discours en mathématique comporte cette caractéristique. Il est le propre des discours accompagnant une démonstration ou la résolution formelle, calculatoire d'un problème. Ce n'est pas, en règle générale, cette dimension qui posera problème du point de vue des questions d'ordre sémantique et de la phraséologie. Le discours proche du formalisme repose sur un sens contraint pour les objets qu'il convoque. Il y a peu de place pour une prise en compte de la synonymie, des mots sémantiquement proches ou d'éléments d'ordre culturel. Ce type de discours est donc assez pauvre.

Le discours mathématique en contexte scolaire peut être appréhendé soit du point de vue de l'enseignant, soit du point de vue des élèves, indépendamment de toute problématique liée à un enseignement CLIL. Sur un plan général, le discours des élèves est essentiellement centré sur la compréhension des concepts ainsi que la résolution de problèmes mathématiques, sur la base d'un jeu de questions et de réponses. Celui du professeur vise à développer, à améliorer la compréhension chez l'élève tout en interagissant avec le milieu. Sa caractéristique majeure est d'être assez souvent métamathématique.

Nous ne rappellerons pas ici les diverses formes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, nous nous appuierons sur l'inventaire proposé[73] par Linneweber-Lammerskitten (2012), pour le Conseil de l'Europe et dans une perspective interactionnelle et

[73] Voir Annexe 5 (compléments)

discursive. Dans le cas où le lecteur souhaiterait davantage de précision, nous le présentons en annexe (Annexe 5).
Pour Lerman (2005), le fait d'apprendre à penser mathématiquement se confond avec le fait d'apprendre à parler mathématiquement. Il insiste sur le rôle central du discours au sein des pratiques mathématiques et donc sur le rôle d'instigateur du professeur. Ce dernier devra tenir compte, dans l'anticipation des interactions en classe, de son rôle d'initiation du discours qui va s'engager entre les participants de l'activité en classe.
Ces dernières années, de nombreux auteurs se sont penchés sur les effets plutôt que sur les types de discours mathématique. En ce qui concerne la morphologie du discours mathématique, nous nous inspirons de l'analyse et la classification effectuée par Knott et al. (2008).
Ces derniers distinguent ainsi (et hors de toute problématique CLIL) et uniquement du point de vue de l'enseignant :
- le discours portant sur les conceptions
- le discours affectif.
- la médiation discursive mathématique.
- les tactiques discursives
- le discours final, le discours de clôture (qui est de nature métamathématique).

Nous allons reprendre, détailler et compléter et sans envisager uniquement le discours côté enseignant. Il n'est pas dans notre intention de proposer une catégorisation exhaustive des types de discours[74] mais simplement de mentionner des types de discours relativement fréquents ou des caractéristiques saillantes, en les rapportant à notre problématique.
Les points que nous souhaitons aborder sont les suivants :

- rôle fondamental du questionnement
- discours sur les objets mathématiques
- discours de type méta
- influence des conceptions
- quelques thèmes représentatifs
- discours affectif
- influence sur les processus de conceptualisation
- dimension discursive des démarches heuristiques et de validation

Ensuite nous examinerons en détail les questions de découpage du discours en phases ou en îlots discursifs.

III.1. Le rôle stratégique du questionnement

D'un point de vue didactique, indépendamment de la spécificité de la discipline mathématique, le rôle-charnière joué par le questionnement, par ses composantes discursives à la fois socio-langagière et sociocognitive, est fondamental. Il peut être initié par l'enseignant mais il peut être aussi adressé par un élève en direction d'un autre élève, dans le cadre, par exemple, d'une argumentation ou d'un travail collaboratif. Dans le premier cas, l'enseignant se doit de le maîtriser ce questionnement et de l'orienter de manière à amorcer une réflexion

[74] Un tel projet ne pourrait avoir de sens que sur la base d'une étude à partir d'un large corpus. Par ailleurs, en matière de discours, il paraît impossible de prendre en compte tous les types de discours envisageables a priori et ce, malgré la spécificité de la discipline mathématiques. Même dans un cours de mathématiques, des discours d'un type particulier peuvent avoir lieu occasionnellement et il ne semble pas légitime, si ce n'est de manière très subjective, de se référer à la fréquence d'un type de discours sans fonder son assertion sur une large collecte de données.

chez l'élève, à lui permettre d'approfondir une notion ou un point de raisonnement particulier, ou encore à l'amener à développer ou modifier ses représentations conceptuelles. Mais le questionnement est aussi le moyen d'engager l'élève dans une discussion, un débat, une argumentation. Dans le cas d'une discussion entre élèves, l'enseignant se doit également de garder un certain contrôle en ayant présent à l'esprit l'apprentissage visé et recentrer le débat si nécessaire. Mais avant tout, c'est la *richesse de la situation* qui va garantir un questionnement adéquat. Les élèves, en effet, seront alors davantage impliqués dans les tâches, notamment lorsqu'ils ont la possibilité de se confronter à une situation d'apprentissage de nature adidactique.

Les considérations précédentes s'appliquent aussi en contexte CLIL-Mathématiques. Mais la spécificité de ce type d'enseignement doit amener l'enseignant à faire prendre conscience aux élèves de l'importance pour l'élève de savoir poser convenablement les questions mais aussi d'apprendre à poser les bonnes questions, ce qui en L2 se révèle souvent plus problématique qu'en L1. Cependant, pour satisfaire la première condition, l'enseignant ne peut pas *se contenter* de proposer des modèles « tout prêts » de questions-types. Même si ce procédé n'est pas à rejeter ni même à remettre en question, son efficacité restera très limitée si les élèves ne font pas *l'épreuve de la nécessité* d'un tel apprentissage. Ce n'est qu'à travers la nécessité d'argumenter, de confronter son point de vue à celui d'autrui que le fait de poser des questions précises, toujours contextualisées, en rapport avec la tâche en cours ou la problématique concernée, va apparaître comme nécessaire. C'est d'ailleurs lorsque les élèves s'investissent dans la tâche, en questionnant ou en remettant en questions les stratégies de résolution qu'ils vont réaliser quelles sont, parmi les questions posées, celles qui font progresser la résolution du problème. C'est souvent à cette occasion, et plus spécifiquement lorsque le questionnement va consister en une demande d'information, ou de précision, que l'élève pourra être sensibilisé au fait que la *forme* revêtue par le questionnement peut être aussi importante que son *contenu ou son objet*.

Dans ce paragraphe, nous souhaitons illustrer les modalités de questionnement, en contexte CLIL-mathématiques, qui sont fortement susceptibles d'engager les élèves dans la réflexion. Nous présentons en annexe (Annexe 5), en anglais, une liste de verbes, que Huinker et Freckman (2004) recommandent d'utiliser pour stimuler les fonctions mentales supérieures[75] des élèves, en déclenchant des processus cognitifs spécifiques ainsi qu'une liste (non exhaustive) de questions[76] concernant une incitation au retour réflexif sur la tâche ou facilitant l'anticipation ou l'imagination.

Le questionnement, en tant que pratique discursive, peut aussi être objet explicite d'apprentissage. L'un des rôles essentiels de l'enseignant étant de faciliter l'entrée progressive des élèves dans une communauté de discours mathématiques en L2, il va devoir, si possible anticiper, et en tout cas, appréhender avec un souci didactique focalisé sur l'aspect sociocognitif du questionnement, les occasions où la forme du discours peut devenir objet d'attention, celles où elle peut être mise en comparaison avec d'autres types de formulation ou encore les occasions où elle est susceptible d'être problématisée en rapport avec la tâche.

[75] Au sens de la taxonomie de Bloom (higher levels of Bloom's taxonomy)

[76] Pour plus d'information, consulter la publication canadienne Capacity Building Series, Special Edition n°21, disponible sur le site : www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/inspire/

III.2. Discours et objets mathématiques

L'enseignant CLIL peut fréquemment être amené à centrer son discours sur les objets mathématiques. Il doit le faire non pas comme un chercheur ou un philosophe mais en adaptant son discours au travers d'un choix de termes faisant partis du répertoire de la classe et par un choix pertinent de métaphores.
Nous illustrons notre propos par quelques énoncés relatifs aux objets mathématiques. Ils sont tirés du site de C. Wells et sont manifestement formulés sur un ton léger :

> Mathematical objects are what we talk and write about when we do math.
>
> Math objects are not physical objects, but we think about them and talk about them as if they were.
>
> Mathematicians talk about math objects as if they were physical objects.
>
> Mathematical objects are like physical objects in that our experience with them is repeatable.
>
> A math object is like a physical object in that you can do things to it.
>
> One metaphor for functions is that it is a machine that turns one number into another.
>
> Different mental representations of the same kind of object help you understand different aspects of the object.

L'enseignant doit parfois parler en termes de cas-limites et de catégories : ainsi, il pourra être conduit à expliquer qu'un carré est un cas particulier de rectangle, que l'ensemble qui ne contient aucun élément est un ensemble ou encore parler des *variations* de la fonction *constante.*

III.3. Discours méta

Nous souhaitons dans ce paragraphe examiner les types de discours que l'on peut qualifier de « méta », à savoir les discours métacognitifs et métalinguistiques. Notre approche est motivée par le fait qu'il nous semble nécessaire de déterminer avec suffisamment de précision les registres linguistiques impliqués : doit-on enrichir de manière soutenue le répertoire de formulation[77] en L2 de la classe ou peut-on se contenter de remédiations ponctuelles ? Ces types de discours ont lieu ponctuellement, voire assez régulièrement en mathématiques, le deuxième type, à savoir métalinguistique, étant bien sûr plus fréquent en contexte CLIL.
Nous précisons dans un premier temps comment nous entendons ces termes à travers quelques illustrations.
Considérons par exemple le cas d'un enseignant faisant prendre conscience aux élèves de l'efficacité d'une stratégie particulière de résolution de problèmes (concrets). Cela se produit par exemple à l'occasion de problèmes d'optimisation, le discours portant sur cette stratégie est alors un discours métacognitif de type mathématique. L'élève doit dans un premier temps relever dans le texte les « indices » que la situation correspond bien à un tel problème. Ce discours implique donc également, de manière implicite, une approche sémiotique du problème et pose la question de savoir déterminer de tels indices. Ceci a des répercussions sur l'enseignement CLIL dans la mesure où les tournures et expressions adéquates sont d'un type très particulier.

[77] Voir infra pour une définition précise de ce répertoire en contexte CLIL et au sens de la TSD.

A titre d'exemple, nous citons quelques questions susceptibles d'être posées par l'enseignant dans ce type de situations :

- what makes you think that…,
- it calls to mind that…,
- why can we say that…,
- think of a method we could use in order to…
- we know that such a situation may be solved by…
- what steps are involved in…

L'utilisation des dérivées pour résoudre ce type de problèmes, après avoir déterminé les contraintes et identifié fonction et variable, constitue alors une telle stratégie. Il revient à l'enseignant, en donnant à son discours une orientation fortement métacognitive, de faire évoluer les représentations que les élèves associent aux signes particuliers auxquels ils sont exposés dans ce type de situations. Il s'agit des signes dont la nature est indicielle. Par la médiation du discours métacognitif de l'enseignant, ils vont progressivement devoir déclencher, par une succession d'interprétants (en nous exprimant en des termes liés à la sémiotique de Peirce), la mise en place d'une stratégie.

C'est ce type de discours qui va permettre au sujet de choisir, entre plusieurs interprétants lui venant à l'esprit, celui qui devrait lui permettre de faire fonctionner la connaissance dans la situation. Plus généralement, ces indices portent sur la reconnaissance de types de situations et sont étroitement associés à des connaissances opérantes dans ces types de situations et il revient à l'enseignant de faciliter cette reconnaissance.

Ces derniers seront étroitement associés à la nécessité, et à la possibilité d'identifier les *types* de situations. Par exemple, dans le cas d'un contexte de résolution d'équation, une identité remarquable va permettre de factoriser une expression et contribuer ainsi à la résolution. Mais dans une situation où la dérivation est convoquée, il s'agira de déterminer le signe de la dérivée et c'est la positivité et non l'aspect produit que l'on retiendra. L'enseignant CLIL, dans le cadre d'une analyse a-priori d'une situation, va devoir anticiper les phases discursives métacognitives (comme celles du type précédent) et donc mettre en place un répertoire de formulation en L2 adapté. L'instigation d'une phase discursive métacognitive est à la charge de l'enseignant mais son rôle ne s'arrête pas là. Il doit aussi faire en sorte que les élèves entrent dans ce type de discours en les poussant par un questionnement adapté à indiquer ce qui, dans la situation-problème les a amenés à choisir telle ou telle stratégie, pourquoi ils ont choisi telle procédure plutôt qu'une autre.

Par ailleurs, dans le cas d'une preuve visuelle, à analyser ou à élaborer, le rôle des images et des manipulations mentales associées[78] doit faire l'objet d'un retour réflexif. Le registre convoqué en L2 nécessitera très certainement une consolidation (sur le plan linguistique).

Plus généralement, il nous semble indispensable que le discours métacognitif (en L2) en contexte CLIL fasse l'objet d'investigations particulières. Dans une perspective d'anticipation du déroulement hypothétique d'une activité[79], il va jouer un rôle essentiel dans le cas des phases didactiques comportant, ou débouchant sur, un retour réflexif sur les stratégies rencontrées. Le dispositif mis en place pour le déroulement de ce type de situations devra intégrer cette dimension.

---

[78] Dans une preuve impliquant des cubes-unités en 3 D, la manipulation d'objets matériels (les cubes élémentaires) est, ou non, accompagnée de manipulations similaires (images mentales dynamiques).

[79] Ceci renverrait en quelque sorte à l'analyse a-priori d'une situation intégrée au sens de la TSD (voir infra partie IV).

De manière analogue, le discours métalinguistique nécessitera lui-aussi l'élaboration progressive d'un dispositif reposant sur une terminologie grammaticale minimale et un répertoire local délimité à l'avance dans une perspective socio-culturelle ou socio-langagière contrastée[80]. L'enseignant pourra même être conduit à faire allusion non seulement à un trait linguistique significatif isolé mais aussi, plus globalement, au « registre » spécifique qu'il a utilisé à telle ou telle occasion s'il considère que ce dernier doit faire l'objet d'une attention plus particulière.

Citons, à titre d' exemple, le fait que l'enseignant sera sûrement amené à insister sur la maîtrise des termes relatifs à la *spatialité*, celle-ci étant en effet essentielle pour qu'une communication à propos de preuves visuelles puisse s'engager….Nous examinerons ailleurs quelques-uns des *champs lexicaux* susceptibles de nécessiter une investigation particulière, d'un point de vue de didactique intégrée ou, plus spécifiquement, à l'occasion de la détermination a-priori des conditions minimales de fonctionnement des situations expérimentales envisagées.

Cela doit sous-entendre pour les élèves un encouragement à faire les efforts nécessaires pour s'approprier ce vocabulaire et pour le professeur la mise en place d'une stratégie de consolidation dans une perspective de réinvestissement dans d'autres situations. Il pourra aussi en profiter pour élargir ses considérations métalinguistiques à la phraséologie (expressions figées, collocations, idiomes…).

D'un point de vue interactionnel et situationnel, nous devons aussi envisager le métadiscours[81] car ce dernier a également une place déterminante. Ainsi, pour Sfard, adoptant une approche socioconstructiviste du discours mathématique, « les règles méta-discursives » elles-mêmes sont affectées au cours d'une tâche où l'élève tente de s'approprier un concept mathématique en s'appuyant sur les termes provenant de la langue de tous les jours et qui sont en fait des concepts quotidiens au sens de Vygotski. Sfard définit son cadre d'étude comme étant *communicationnel*, remettant en question, à l'instar de Cole (1996) l'approche acquisitionniste, focalisée sur la recherche d'invariants cognitifs (c'est-à-dire indépendants des situations et de toute considération culturelle) et selon laquelle l'apprentissage ne peut pas se ramener à l'acquisition de schèmes mentaux décontextualisés. Pour Sfard, en matière de discours, l'élève ne part pas de zéro. L'enseignant va pouvoir s'appuyer sur les compétences discursives dont disposent les élèves et que ceux-ci actualisent à travers un discours certes intermédiaire mais qui va progressivement évoluer dans l'interaction situationnelle. Les travaux de Sfard ne portent pas sur l'enseignement bilingue mais son approche en termes d'évolution des règles métadiscursives au cours de l'apprentissage permettent d'envisager le métadiscours en contexte CLIL sous un angle nouveau.

En illustrant son propos par des extraits de conversation sur le thème des triangles ou sur celui des nombres négatifs auprès d'élèves âgés de douze ans, Sfard (2001b) déclare :

> Thus, whatever the topic of learning, the teacher's task is to modify and exchange the existing discourse rather than to create a new one from scratch. If so, we can define learning as the *process of changing one's discursive ways in a certain well-defined manner*. More specifically, a person who learns about triangles or negative numbers alters and extends her discursive skills so as to become able to communicate on these topics with members of mathematical

[80] Ce sera le cas lorsque l'enseignant souhaitera mettre en valeur un trait linguistique ou une pratique saillante dans la culture mathématique anglo-saxonne (ou autre) en les contrastant avec la L1.

[81] Nous distinguons le discours sur la langue (métalinguistique) du discours s'appliquant aux modalités ou règles discursives (métadiscours).

community. The new discourse may also be expected to make it possible to solve problems that could not be solved in the past.

Sfard illustre ce point de vue par cette figure :

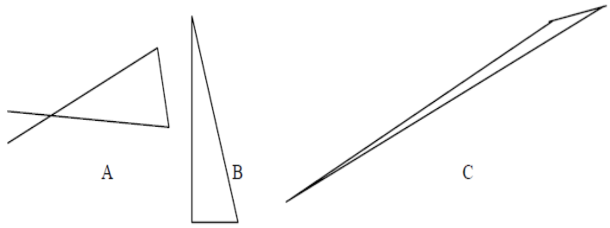


Fig. 1: Triangle or not triangle?

[T32] Teacher: Triangle -- must it be of a certain size?

[T33] Shira: Hmmmm…Yes, a little bit… It must be wide.
What's that? This is not like a triangle – this is a stick!

Figure 3.4

III.4. Influence des conceptions de l'enseignant

Comme premier type de discours, nous considérerons tout discours, qu'il soit produit par l'enseignant ou par l'élève, et portant sur les conceptions, les grandes idées. Du point de vue de l'enseignant, les conceptions concerneront les mathématiques mais aussi la linguistique et les sciences cognitives. Ce type de discours pourra faire apparaître implicitement ou explicitement des considérations épistémologiques, voire ontologiques. Mais la façon dont l'enseignant conçoit la langue en général, tout ce qu'il peut être amené à dire sur l'enseignement CLIL, ce qu'il pense des programmes, des objectifs de l'institution à la fois en mathématiques et du point de vue linguistique et cognitif font partie intégrante de ce type de discours. Dans un enseignement de type enseignement en classe européenne l'enseignant, peut par exemple avoir à justifier ses choix didactiques en matière de contenus et de modalités d'enseignement dans la mesure où il dispose d'une certaine latitude pour organiser lui-même cet enseignement. Mais la possibilité d'exposer des conceptions, voire des représentations ou des projections dans le futur, n'est pas réservée à l'enseignant. L'élève peut, lui aussi être conduit à exposer les siennes et ainsi entrer dans un certain type de discours et prendre position en défendant ou simplement exposant « son point de vue » dans des domaines généraux.
Notons que l'on peut aussi très bien rapprocher ce type de discours assez général, souvent méta-disciplinaire (métamathématique ou métalinguistique) mais toujours en rapport avec les conceptions des énonciateurs, des discours portant sur l'application des mathématiques à des domaines extérieurs aux mathématiques, sous réserves que ces discours conservent une portée générale.

III.5. Histoire des mathématiques et arts : deux thèmes d'étude privilégiés

Nous considérons dans un premier temps les discours relatifs à l'histoire des mathématiques, voire à l'histoire des sciences et des techniques. Ce domaine est fortement susceptible de fournir des thèmes très porteurs pour leur intérêt à la fois linguistique et culturel en contexte CLIL. Les systèmes de numération chez les Babyloniens ou chez les Egyptiens, les références aux pratiques mathématiques des Anciens en liaison avec leurs conceptions philosophiques, l'origine et le développement de l'algèbre dans le monde arabe, la découverte des nombres imaginaires (complexes) à la Renaissance, les travaux de Nicole Oresme (XIVème siècle) en liaison avec le thème mathématique des suites géométriques ne sont que quelques-uns des thèmes qui peuvent donner lieu à un discours où enseignant et élèves pourront confronter ou développer leurs conceptions en la matière. Mentionnons au passage que les documents iconographiques pourront jouer un rôle essentiel et orienter les interactions dans une perspective linguistique et culturelle originale.

[82]

[83]

Portait de Nicole Oresme et Tablette Plimton 322 (voir notes 101 et 102)

Figure 3.5

Néanmoins, l'histoire des sciences ne constitue pas une discipline au niveau du Secondaire, même s'il est conseillé de rapporter occasionnellement les leçons ou les situations-problèmes à ce thème. Une étude systématique dans le cadre d'un enseignement européen (c'est-à-dire en L2), et un tel enseignement est tout à fait envisageable dans l'absolu, constituerait un sujet de recherche en didactique à part entière. Seules quelques séances peuvent, selon nous, donner lieu ponctuellement à un traitement en référence à l'histoire. On peut malgré tout remarquer que l'approche historique de thèmes mathématiques spécifiques peut être l'occasion d'un travail interdisciplinaire avec les enseignants d'histoire et de L2.
Enfin, nous pouvons ajouter que nous avons intégré des éléments d'histoire des sciences à nos séquences expérimentales lorsque cela s'y prêtait (séances sur les nombres figurés[84]).
Un autre domaine susceptible d'entraîner un discours particulier est celui des arts. Les documents iconographiques permettant d'établir un lien entre les mathématiques et l'art ne manquent pas. A titre d'exemple, le thème des solides de Platon a été abordé de multiples façons dans le domaine artistique.
Les œuvres d'Escher ont inspiré beaucoup d'artistes contemporains et on peut signaler la présence sur le net de vidéos reprenant les thèmes traités par cet artiste. Elles sont accessibles en ligne et certaines sont de très grande qualité. Elles peuvent elles aussi servir de support pour une discussion en L2 portant sur les thèmes conjoints de mathématiques et arts. On peut aussi partir d'un des tableaux d'Escher pour introduire le thème des pavages du plan[85] .

[82] Portrait of Nicole Oresme: Miniature from Oresme's Traité de l'espere, Bibliothèque Nationale, Paris, France, fonds français 565, fol. 1r.
[83] Tablette Plimpton 322. La tablette nommée **Plimpton 322** (parce qu'elle porte le nº 322 dans la collection « G. A. Plimpton » de l'université Columbia) est l'un des spécimens le plus connu de ces mathématiques babyloniennes. Cette tablette, dont la rédaction daterait de vers -1800, comporte un tableau de nombres cunéiformes rangés sur 15 lignes par 4 colonnes. Ces nombres peuvent être associés à ce que l'on appelle aujourd'hui des triplets pythagoriciens, c'est-à-dire des nombres entiers a, b et c qui vérifient la relation $a^2 + b^2 = c^2$ donnée par le théorème de Pythagore, comme 3, 4 et 5. (extrait de l'article de wikipedia intitulé Plimpton 322)
[84] Nous avons été conduit à mentionner les conceptions des Pythagoriciens et nous nous sommes référé à la notion de Gnomon (voir infra).
[85] Nous avons reporté en annexe quelques illustrations concernant l'apport des documents iconographiques concernant la place éventuelle de l'histoire des mathématiques ou des œuvres d'art ayant un lien avec les mathématiques afin de montrer les possibilités d'intégration des thèmes respectifs à un enseignement de type CLIL-mathématiques.

III.6. Le discours affectif, l'humour

Côté enseignant, c'est celui qui repose sur son rôle d'animateur, sur ses capacités à encourager, à motiver ses élèves, à les féliciter lorsque cela est mérité. C'est aussi un type de discours où l'intonation et la gestuelle peuvent se révéler très importants. En contexte CLIL, les recours à l'alternance codique pourront parfois être évités en motivant plus que d'habitude certains élèves. Lors des phases présentant une complexité cognitive importante, l'enseignant sera amené à encourager ses élèves sans doute plus qu'à l'accoutumée.

Par ailleurs, nous rappelons (voir partie II) que la prise en compte de l'affectif, de l'émotionnel, du ludique au niveau de l'enseignement, sont des éléments caractéristiques des nouvelles tendances et il est légitime que nous leur accordions une place effective au niveau du traitement discursif. Il est probable que ce type de discours rejoigne parfois aussi des phases où pourront transparaître des considérations esthétiques. Comme chacun sait, les moments ne sont pas rares en effet où les mathématiques tendent vers le *beau.* Il conviendra alors de ménager certains effets de manière à engager les élèves à exprimer leurs émotions. C'est d'ailleurs sans doute aussi un point de convergence transversale à explorer avec les collègues de français ou de langue vivante.

Soit dit en passant, il se trouve que *beau* s'applique à ce qui plaît aux sens. Le fait que certains aspects en mathématiques, certains « patterns » puissent être qualifiés de *beaux* montrent bien à quel point les sens sont impliqués, même à un haut niveau d'abstraction.

En contexte CLIL, la comparaison (en L2) de manuels anciens et récents peut faire l'objet d'une étude. D'un point de vue historique, la dépersonnification des diagrammes qui avait été initiée vers le XVIIème siècle et qui s'est poursuivie jusqu'à nos jours suite à la forte algébrisation, qui a eu lieu dans le cours de l'histoire, a contribué à rejeter les diagrammes pour leur manque de fiabilité dans la plupart des processus de preuve (Alshwaikh 2011). Selon Alshwaikh, Descartes considérait que les sens ne devaient pas interférer avec la pratique mathématique, d'où un recul du rôle joué par les diagrammes.

Afin d'illustrer la dépersonnification progressive des diagrammes, nous proposons (figure 3.6) une figure extraite de la thèse de Jehad Alshwaikh (2011) ainsi que le commentaire l'accompagnant :

> O'Halloran (2004b; 2005) presents an historical account of, among other things, the presence of human figures in mathematical texts, marking the appearance of La Nova Scientia (The New Science) in 1537, written by Tartaglia, as the beginning of the Renaissance and moving forward in time. In the past, human figures, physical objects and the contexts of doing mathematics were depicted in mathematical texts. However, this depiction changed as the human body and the physical context began to be eliminated (to the point where only parts of the human body were participating, e.g. hands and eyes), eventually disappearing entirely and leaving only the mathematical objects (circles and lines) remained. Figure 6-17 shows this historical development.

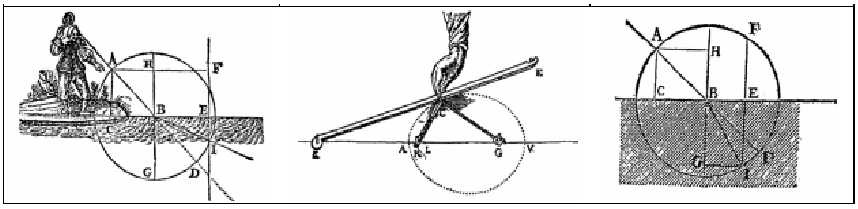


Figure 6-17: Elimination of the human figure in mathematical discourse (O'Halloran, 2005, 43-45)

Figure 3.6

L'élimination des « agents humains » dans l'utilisation des diagrammes, le style de plus en plus impersonnel des textes mathématiques (caractérisés par une sur-utilisation de la forme passive) ont contribué, jusqu'à une période encore récente, à rendre les textes mathématiques très froids, induisant ainsi, jusqu'au niveau discursif lui-même, une *représentation* similaire (froide et anonyme) pour l'ensemble de la pratique mathématique. Cette tendance s'est fort heureusement inversée ces dernières années, au niveau de l'enseignement secondaire.
En ce qui concerne les tournures que le discours peut prendre occasionnellement[86], nous nous proposons d'examiner le cas du ton humoristique. En effet, nous estimons que l'humour est un ingrédient qui, sans être indispensable, nous semble pouvoir jouer un rôle important dans le déroulement d'un cours de mathématiques. Ménager des moments de relatif relâchement, que ce soit sous le ton de l'humour ou simplement d'une évasion passagère nous paraît être une attitude raisonnable si, bien sûr, on en n'abuse pas.
Voici deux extraits de manuel (AS-level Mathematics, CGP, Complete Revision and Practice, 2010). Ils se réfèrent à l'introduction de deux thèmes de révision. Leur ton est léger ou humoristique :

> "Yep, this is a pretty dull way to start a book. A list of definitions. But at least it gets it out of the way right at the beginning – it would be a bit mean of me to try and sneak it in halfway through and hope you wouldn't notice."
> "It's important to make sure you know this stuff like the back of your hand – but unlike the back of your hand you won't have this book in the exam. So here are some practice questions to help you remember it all. We'll start off gently…"

III.7. Modifications conceptuelles et discursives

C'est à travers l'interaction et relativement au contexte et à la problématique de la situation-problème considérée que l'élève modifie progressivement et conjointement sa représentation des concepts impliqués et la structure de son discours. C'est par la confrontation des points de vue, l'intégration des informations avancées par autrui, par son positionnement face aux arguments en faveur ou contre une thèse avancée par un tiers et la sensibilisation aux modifications discursives chez les autres intervenants (élèves ou enseignants), que l'élève parvient à faire émerger les connaissances nouvelles nécessaires à la réalisation des tâches en les explicitant progressivement au travers de modifications successives de son propre discours.

[86] Parler de tournure que pourrait prendre le discours plutôt que de type de discours n'est qu'une affaire de degré relativement à une catégorisation. On parlera aussi du ton adopté par l'énonciateur.

C'est aussi à ce niveau que la forme du discours progressivement modifiée et/ou négociée va pouvoir *tendre* efficacement *vers un langage spécifique académique*. Et c'est uniquement une fois que ces conditions ont été actualisées dans des interactions situées que le discours institutionnel et académique doit légitimement prendre place au travers de l'énonciation de l'enseignant. Cette phase peut d'ailleurs elle aussi, et c'est souhaitable selon nous, donner lieu à d'ultimes négociation visant, dans un souci de vérification, à l'obtenir et/ou garantir l'assentiment général quant au contenu *et* à la formulation finale.
La question se pose alors de savoir ce que devient l'objet de nos propos lorsqu'on les ramène à la problématique CLIL
Les situations expérimentales que nous avons mises en place permettront de voir comment l'enseignant permet aux élèves de cerner un nouveau concept tel que ceux de preuve visuelle, d'extension ou d'hérédité schématiques. Nous regarderons comment les élèves s'approprient les objets eux-mêmes tels que celui de *nombre triangulaire* par exemple lors des phases interactives au niveau du discours lui-même (voir chapitre 7). On sera ainsi amener à voir la distinction entre les notions de triangle au sens de figure géométrique, au sens de forme triangulaire puis ensuite au niveau de la disposition des objets (triangular arrangement).
L'interaction va prendre des aspects propres aux cours de langue vivante dans le cadre de la pédagogie actionnelle. On prendra donc en considération les consignes et la représentation que les élèves s'en font en accordant une place importante à l'explicitation, le métadiscours qui sera produit sur l'action en cours ou sur le résultat d'une action mais aussi les commentaires de nature métalinguistique.
Par ailleurs, il est clair que l'enseignant CLIL sera conduit à quitter la focalisation sur le message au contenu en général spécifiquement mathématique pour se focaliser sur le code en rectifiant des erreurs de nature linguistique, en reformulant lui-même ou en amenant l'élève à le faire. L'objectif de l'enseignement CLIL en termes de savoirs visés étant double (et non pas simplement linguistique) revient à dire que la bifocalisation sera moins prononcée que dans un enseignement classique de langue vivante. De plus, il est clair que les rectifications d'erreurs, si elles interviennent immédiatement après qu'elles se soient produites et si elles sont trop rapprochées, peuvent freiner la dynamique de la tâche en cours. L'objectif premier, en ce sens, reste mathématique. Dans un même ordre d'idées, le discours métalinguistique, lorsqu'il a lieu, ne doit pas non plus entraver le bon déroulement de la tâche.

III.8. Le discours heuristique et de validation

Comme nous l'avons détaillé au chapitre 1, dans la partie consacrée spécifiquement à la didactique, avec une approche qui était alors plutôt axée sur les répertoires, les questions concernant les démarches heuristiques et de validation dans le cadre d'une situation adidactique peuvent donner lieu à un type de discours particulier. C'est, parmi les types de discours cités, celui qui est le plus à même d'empiéter sur le registre formel. Il est probable qu'il nécessitera très certainement la mise en place d'une consolidation pour pouvoir se dérouler convenablement dans la L2. De manière générale, ce type de discours se rapproche, en quelque sorte, d'un discours argumentatif en contexte mathématique. Mais avant d'attendre des élèves qu'ils l'utilisent de façon quasi-autonome (en L2), il va de soi que ces derniers auront été au préalable exposés à maintes reprises dans des situations de cours-dialogués ou, tout au moins, dans des phases interactives avec l'enseignant.

Nous nous référons dans la suite à des *niveaux de discours*. Nous avons placé en annexe[87] un modèle de description de ces niveaux (chez les élèves) un modèle ayant servi d'analyse discursive pour un projet américain de formation d'enseignants dans le cadre d'une école d'été.
En ce qui concerne la Théorie des Situations Didactiques, il est intéressant nous semble-t-il de rappeler ici-même ce que sont les situations adidactiques de formulation et les situations adidactiques de validation :

> **Situation (a-didactique) de formulation (d'une connaissance)**
> C'est une situation qui met en rapport au moins deux actants avec un milieu. Leur succès commun exige que l'un formule la connaissance en question (sous une forme quelconque) à l'intention de l'autre qui en a besoin pour la convertir en décision efficace sur le milieu. La formulation consiste pour ce couple d'actants à utiliser un répertoire connu **pour formuler un message original**, mais la situation peut conduire à modifier ce répertoire. On peut déduire théoriquement et vérifier expérimentalement qu'une **formulation « spontanée »** de connaissance exige que cette connaissance existe préalablement comme modèle implicite d'action chez les deux actants.
> **Situation (a-didactique) de validation (sociale et culturelle)**
> Une situation de validation est une situation dont la solution exige que les actants établissent ensemble la validité de la connaissance caractéristique de cette situation. Sa réalisation effective dépend donc aussi de la capacité des protagonistes d'établir ensemble **explicitement** cette validité. Celle-ci s'appuie sur la reconnaissance par tous d'une conformité à une norme, d'une constructibilité formelle dans un certain répertoire de règles ou de théorèmes connus, d'une pertinence pour décrire des éléments d'une situation, et/ou d'une adéquation vérifiée pour la résoudre. Elle implique que les protagonistes confrontent leurs avis sur l'évolution du milieu et **s'accordent selon les règles du débat scientifique**.

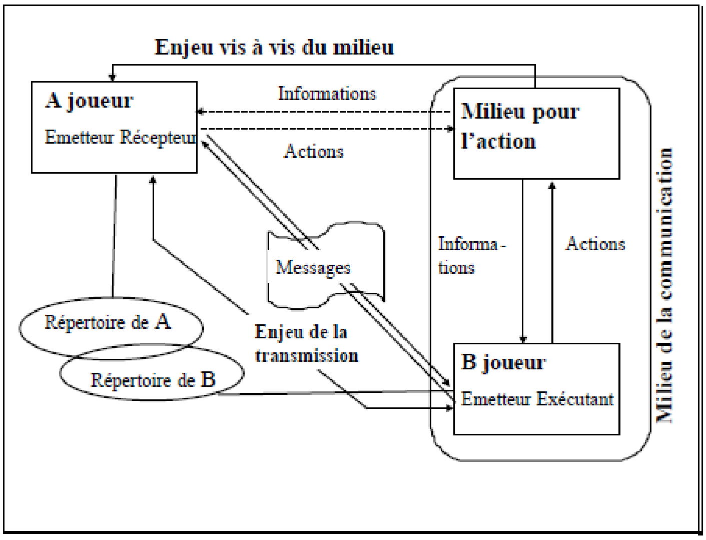


Figure 3.7 situation de formulation (Brousseau, 1998, p106)

En ce qui concerne les phases adidactiques de nos séances expérimentales, nous verrons que, même si le milieu objectif apparaît comme le lieu privilégié pour favoriser la perception

[87] Voir Annexes 5 (compléments)

active et la pensée sans verbalisation, le milieu de référence sera celui de la formulation écrite ou de la validation orale en L2, dans le cas de la présentation des posters, par exemple. Pour que la validation puisse se dérouler convenablement, elle devra être anticipée quant aux schèmes de formulation que l'enseignant aura déterminés à l'avance. L'analyse fine et anticipatrice des processus cognitifs à l'œuvre, va permettre d'élaborer le répertoire phraséologique sur lequel les élèves pourront s'appuyer lors des phases de validation. Nous proposons au chapitre 4 un exemple d'étude en amont. Elle sera certes plus poussée que celle que nous avons effectivement réalisée pour les séances elles-mêmes.

III.9. Phases discursives, anticipation et îlots discursifs potentiels

III.9.a. Définition et caractéristiques

A posteriori, le discours relatif à l'ensemble d'une séance est décomposable en phases qui apparaissent comme autant de moments significatifs, dès lors qu'on les considère d'un point de vue séquentiel, en rapport avec à la nature des interactions, ou encore relativement au contenu des phases d'enseignement (correction d'exercices, activité d'introduction, situations-problèmes, etc…).
En termes d'anticipation, le discours risque de porter sur des questions récurrentes dans la pratique et que l'enseignant apprends à discerner du point de vue des obstacles qu'elles peuvent soulever pour les élèves. Nous nous focalisons, dans ce qui suit, sur des traits saillants.
De préférence et en référence à un découpage de la séance sur le plan didactique, nous parlerons de *phases discursives* tandis que pour des unités discursives plus restreintes ou plus locales, nous parlerons d'*îlots discursifs*.
Nous appelons *îlots discursifs*, des segments du discours. Ils sont soit effectifs, contextualisés, situationnels, soit sont considérés comme potentiels, c'est-à-dire anticipés ou fort susceptibles d'être actualisés de manière similaire dans les faits (III.9.c).
L'îlot discursif est étroitement associé à une zone de focalisation locale. Celle-ci fait apparaitre des questions qui vont donner lieu à des interactions, localement. L'enseignant CLIL doit les anticiper et saisir l'occasion de glisser une phraséologie ciblée (voir paragraphe IV) en incluant des exemples de reformulation.

III.9.b. Des exemples représentatifs

L'îlot discursif peut concerner plusieurs points emblématiques de la pratique mathématique. Les îlots peuvent par exemple être centrés autour des points suivants :

- caractéristiques sémiotiques des symboles

Le symbole a plusieurs constituants sémantiques. Le terme u_n d'une suite numérique, par exemple, a un rang explicite mais une valeur indéterminée, sous-entendue ou encore implicite, etc… L'îlot concerne la manière d'expliciter ces faits d'ordre sémantique.

- explicitation des signifiés

L'élève doit pouvoir saisir efficacement les mots-concepts. Nous examinons en Partie Expérimentale le cas de l'objet Gnomon. Au chapitre 8 (II.3.), les signifiés sont explicités au niveau d'un document-ressource[88]. Ils peuvent l'être au niveau du discours lui-même. Ce type

[88] […] To sum up :

d'îlot discursif est à focalisation sémantique sur les sèmes ou sur les constituants de signification d'un objet mathématique en général.

- mise en relief d'un fait de langue impliquant sens et/ou syntaxe ou d'un fait culturel

Par exemple, il peut arriver que la détermination en L1 ou en L2 d'un syntagme correct se fasse sur la base de considérations sémantiques : *un grand homme* ou *un homme grand*. Nous avons déjà mentionné, ponctuellement, des exemples de faits culturels spécifiques de la L2. Ils peuvent localement, c'est-à-dire à l'intérieur d'une phase de taille importante, être glissés et donner lieu à des îlots (allusion à l'absence de tableau de variation (à la française) dans la pratique mathématique anglo-saxonne, etc…).

- focalisation sur la phraséologie

La manière de parler d'un objet, d'une notion, peut donner lieu à des négociations sur la formulation. L'îlot discursif peut porter sur la recevabilité d'une proposition de formulation et sur la suggestion d'autres formulations. Les questions de sens y sont centrales.

- analyse des consignes

L'îlot portera alors sur des remarques d'ordre méthodologique pour la manière d'analyser tel ou tel type de consignes ; ou encore comment développer des stratégies de résolution.

- réactivation de connaissances

La réalisation d'une tâche particulière, la résolution d'un problème, peuvent donner lieu à un rappel de connaissances. Ce point peut faire l'objet d'un îlot anticipé et prendre la forme d'une évaluation diagnostique locale.

- conseils d'ordre méthodologique

En prévision de l'examen final, l'enseignant peut glisser des remarques verbales ou écrites (pour un document-ressource) incluant des conseils dans l'attitude à adopter. Ainsi, il pourra localement introduire des préconisations telles que :

> In the case of an optimization problem, I know I will surely have to say that …
>
> I will seize the opportunity to say that…
>
> The presence of the word *maximum* in the wordproblem brings to mind the idea of optimization…

- developper des attitudes stratégiques

L'îlot sera constitué sur la base d'expressions telles que :

> starting to tackle the problem;
>
> first approach;
>
> spotting recurrent words;
>
> analyse the context ; etc…

Il pourra prendre la forme suivante :

> […] taking a close look at the problem we can see that it falls into a well-known category of problems. Which one? And why?

A Gnomon has a specific shape.

A Gnomon is a particular arrangement of physical or symbolized objects.

A Gnomon has a numerical value which is the number of objects.

A Gnomon can be enlarged by fallowing a rule.

Ou encore:

> […] if the problem at hand is about functions, and if the wordproblem provides information about inequalities and requires a calculation of limit, I kow I will surely have to use the squeeze rule[89]. […]

- consolider une représentation

L'îlot est alors souvent une phase à par entière. Sa fonction peut par exemple consister à faire énumérer les mots sémantiquement proches, les synonymes d'un mot ou d'une notion.
Voir par exemple l'activité à focalisation sémantique relative au mot-concept *proof* (chapitre 8, II.1.) ; travail basé sur la notion de *module sémantico-conceptuel.*

- retour réflexif sur un phénomène récurrent

La pratique mathématique comporte de nombreux aspects récurrents ou attitudes spécifiques, à caractère emblématique. L'attitude de preuve, la conversion de registre, le changement de statut, et donc d'interprétation, des signes, etc…D'où un très grand nombre d'îlots spécifiques.
On imagine facilement un rappel de conseils quant à l'attidude de preuve, par exemple.

> When proof is concerned;
> When it comes to proof;
> When it comes to proving ;
> If one is to deal with;
> A proof is based on initial conditions : facts, true facts, facts considered as solid, as a ground, …;
> Recognizing a condition in the context created by the wording of the problem ; etc…

- traduction ou code switching

Dans certaines circonstances, l'enseignant effectue un code switching. Il crée localement un îlot discursif en L1. Son but est souvent de fournir une traduction en L1 d'une expression ou d'un énoncé (court). L'îlot peut aussi comporter des remarques grammaticales sur un point précis.

- ilots contingents

La spécificité d'une situation peut donner lieu à la formation d'îlots très particuliers et dont la caractéristique première est de comporter une part importante d'imprévisibilité. En Partie Expérimentale, notre analyse a posteriori a fait apparaitre un îlot portant sur l'instabilité des cubes[90].

III.9.c. Ilot discursif vs micro-énoncé

Lorsque le discours est considéré comme produit, effectué, les îlots apparaissent comme formés spontanément. Cela est dû à la contingence de toute situation, aux différentes tournures que le discours peut prendre et au grand nombre, voire au très grand nombre de formulations possibles pour une simple et même idée.
Lorsque le discours donne lieu à une transcription et une analyse, l'îlot apparaît comme tel au sein d'un découpage en segments et suite à une focalisation particulière sur tel ou tel aspect.
En termes d'anticipation, et dans une perspective d'élaboration de documents-ressources, il nous semble important d'adjoindre à la présentation d'un lexique phraséologique des micro-

---

[89] The squeeze rule : le théorème des gendarmes
[90] Voir chapitre 7, III.2. : […] Notons au passage qu'en termes de répertoire de formulation, il est clair que l'îlot discursif créé autour de l'idée de stabilité (ligne5 et 6, amorce en ligne 4) ou d'instabilité est difficilement reproductible (sous cette forme en tout cas) en L2…

énoncés fortement représentatifs de ce que l'on pourrait être amené à dire à propos de tel ou tel point particulier. Il semble alors intéressant de glisser des considérations métacognitives à cette occasion, en faisant prendre conscience aux élèves de manière explicite de l'importance de pouvoir être capable de parler de telle ou telle chose, de telle ou telle manière (voir supra, les exemples de micro-énoncés relatifs au point intitulé *retour réflexif sur un phénomène récurrent* ; voir infra également)[91].

Les considérations d'ordre métacognitif peuvent concerner a prori tout processus interprétatif dans une perspective didactique. A titre d'illustration, nous présentons un exemple de micro-énoncé de ce type.

Il porte sur la nécessité d'effectuer des va-et-vient entre la consigne d'un problème et la tâche en cours :

> When trying to perform a specific task, we often have to go back and forth between the wording of the problem and the task at hand

On adjoindra alors une traduction des collocations suivantes : *perform a task* ; *to go back and forth between* ; *the wording of a problem* ; *at hand*. On élargira éventuellement l'ensemble précédent par des reformulations ou des extensions.

Nous allons, dans les paragraphes suivants, traiter en détail les questions liées à la phraséologie.

IV. La phraséologie : caractéristiques linguistiques et considérations didactiques

Dans ce paragraphe, nous souhaitons éclairer davantage le rôle et la place de la phraséologie au sein de la langue vue dans son ensemble mais aussi, et surtout, dans une perspective didactique. Nous rappelons ici quelques éléments caractéristiques, ces éléments étant issus de travaux de recherches spécifiquement linguistiques, tandis que nous reprendrons plus loin la question du rôle et de la place qui devrait être, selon nous, ceux de la phraséologie en contexte CLIL-mathématiques.

IV.1. Quelques points essentiels

Nous rappelons, à titre d'introduction, la définition qu'en donne le Petit Robert :

> phraséologie : *« groupe de mots formant une unité et ne pouvant pas être modifié à volonté ». Les catégories suivantes sont ainsi répertoriées : « locution adverbiale, locution conjonctive, locution prépositive, locution adjectivale, locution figurée, locution familière et locution proverbiale».*

La phraséologie est, de manière générale, constituée des expressions propres à un groupe, à un milieu, à une discipline, à une époque. Elle peut être vue aussi comme un recueil de phrases, d'expressions ou de locutions propres à une langue en vue de l'enseignement de celle-ci.

On trouve sur Wikipédia la définition suivante, définition selon laquelle la phraséologie apparaît comme un domaine de la linguistique dont les objets d'étude sont très spécifiques :

> La phraséologie est, en linguistique, l'étude des expressions lexicalisées, telles que les expressions idiomatiques, les locutions et autres unités lexicales composées de plusieurs mots

[91] Voir aussi dans la Partie Expérimentale, paragraohe III.1, le micro-énoncé de type commentaire de figure et relatif au point *sens mathématique ou non ?* du document-ressource étudié.

(souvent appelées phrasèmes), dans lesquelles les parties composant l'expression prennent une signification qui ne peut être expliquée par la seule somme de leurs significations lorsqu'elles sont utilisées séparément.

Depuis les années quatre-vingts, la phraséologie est devenue, en liaison avec des questions de traductologie, un véritable objet de recherche en linguistique. Les notions qui lui sont attachées sont celles d'expressions, de locutions, de collocabilité, de restriction combinatoire, de figement, d'idiomaticité, d'économie en rapport avec la créativité (linguistique) et l'interaction sociale (Pecman2005).

Souvent, le trait principal des unités phraséologiques est celui du figement (c'est le cas pour Gross[92], par exemple), ce figement ayant lieu à des degrés divers. Pour Gross, le fait notable est que des expressions telles que *prendre la tangente* ou *cordon-bleu* se refusent aux transformations syntaxiques.

Ce trait est décrit dans (Pecman, 2004) :

Luc a pris la tangente	*un cordon(-)bleu*
- **la tangente a été prise par Luc*	- **le bleu de ce cordon*
- **qu'a pris Luc ?*	- **un cordon très bleu*
- **Luc l'a prise*	- **un cordon particulièrement bleu*
- **c'est la tangente que Luc a prise*	- **ce cordon est bleu*

Pour chacune des deux expressions précédentes, aucun des éléments ne permet de prédire le sens de l'ensemble de l'expression (on parle de non-compositionnalité du sens) puisque la première signifie

« se tirer d'affaire habilement, s'enfuir discrètement » et la seconde correspond à « bonne cuisinière » (exemple cité dans Pecman, 2004). Pecman rappelle que, toujours selon Bross, *le figement, l'opacité sémantique, la non-compositionnalité et les restrictions syntaxiques vont de pair*.

Pecman nous rappelle que la combinatoire lexicale est « régie par deux principes opposés : le principe de liberté et le principe de contrainte ». La langue dans son ensemble est caractérisée par la distinction entre ces deux principes : libre choix d'un côté, principe d'idiomaticité de l'autre. C'est en général le contexte qui permettra de lever l'ambiguïté sémantique rencontrée de certaines unités lexicales. De manière générale, les unités phraséologiques sont mémorisées comme telles, sont reconnues comme des unités par la communauté linguistique et partagent comme caractéristique le fait de présenter un **certain degré de figement**.

> Les notions de figement et d'opacité sont liées à celle de phraséologie. Elles reposent sur une métaphore qui traduit bien les deux facettes du phénomène linguistique en question : l'huile qui se fige et s'opacifie.
>
> L'opacité empêche la compréhension immédiate, au pied de la lettre, du sens de la phraséologie[93].

Il est désormais assez généralement admis que c'est la langue dans son ensemble qui serait caractérisée par des expressions apparaissant de façon récurrente et présentant un caractère plus ou moins figé :

> Les linguistes se demandent si, dans l'usage réel, ce n'est pas l'inverse, si le mot n'est pas d'abord et toujours pris dans un réseau locutionnel, comme le suggère la façon dont l'enfant

[92] (Voir Gross 1996 pour plus de détails)

[93] Les lexies complexes: phraséologies et collocations (article consultable en ligne à l'adresse suivante : http://www.initerm.net/post/2008/12/03/Phraseologies-et-collocations)

apprend sa langue maternelle, et la difficulté qu'à l'adulte à atteindre l'authenticité idiomatique dans une langue étrangère. Ce sont des séquences entières que le locuteur d'une langue mobilise dans son lexique mental (ibid.).

Il faut néanmoins distinguer, d'une part, les unités phraséologiques figées, opaques (donner sa langue au chat, avoir des fourmis dans les jambes, etc...), dont le sens est non-compositionnel et d'autre part, les collocations qui sont composées de mots co-occurrents, mais sans que cela ne donne lieu à une opacité sémantique (pain blanc, pain sec, etc...).

IV.2. Prise en compte de la phraséologie lors des apprentissages

Nous considérons dans ce paragraphe la répercussion au plan cognitif des carences concernant le lexique phraséologique mental.

Prenons un exemple. Considérons l'expression *présenter un défaut*. Il se peut qu'elle soit parfaitement maîtrisée et donc disponible dans les interactions verbales.

Si ce n'est pas le cas, l'individu qui souhaite attacher l'idée de *défaut* à quelque chose de particulier cherchera dans son lexique mental, de manière en quelque sorte *abductive*, une structure verbale permettant de relier ce à quoi se rapporte le défaut avec le mot *défaut*, comme l'illustre le schéma suivant :

[quelque chose] [?] [un défaut]

L'individu tentera mentalement d'intercaler par exemple :

[recèle], [offre], [contient], [révèle], [manifeste], etc...

Sa conscience linguistique lui permettra de trancher s'il est conscient que lorsque le sujet ([quelque chose]) se rapporte par exemple à un objet matériel on peut utiliser [présente] car l'unité *présenter un défaut* est précisément une expression figée, une expression phraséologique apparaissant comme disponible et parfaitement adaptable.

Il retiendra alors, par exemple, *l'objet présente un défaut*.

Si son niveau de maîtrise de la langue est plus restreint, il se contentera sans doute de la formulation *l'objet a un défaut*.

En anglais, la traduction de la phrase précédente soulèvera malgré tout encore d'autres difficultés. Il faudra ainsi remarquer que, dans le cas d'un défaut physique ou matériel, « *défaut* » se traduira par *defect* ou *flaw* et surtout pas par *default*. Ainsi, en parlant d'un appareil (device), l'Anglais dira *the device has a defect* ou *the device has a flaw* ou mieux encore *the device is defective*.

L'insuffisance du lexique mental au niveau phraséologique induit donc une surcharge cognitive manifeste dans le cas d'une tentative abductive. Ceci est valable pour un apprenant-L2 et la surcharge est d'ailleurs d'autant plus grande que, si l'individu dispose de l'unité phraséologique correspondante en L1, il va vouloir, plus ou moins consciemment, procéder de même en L2 (par transfert).

N'oublions pas, enfin, que si un individu ne dispose pas des unités phraséologiques qui ne se traduisent pas mot à mot, et c'est le cas pour la majorité d'entre elles, l'anglais produit ne sera pas authentique. Il est par conséquent clair que, dans cette perspective, un apprentissage lexical non-phraséologique (listes de mots isolés), est inefficace ou, à tout le moins, très peu efficace.

IV.3. Phraséodidactique et anglais scientifique

Les collocations, les segments préconstruits, constituent un des piliers de la maîtrise d'une langue, et par voie de conséquence, d'une langue étrangère. Pourtant l'enseignement, de manière générale ne prend pas assez en compte cet aspect.

Pour le locuteur natif, leur maîtrise est naturelle, elle résulte d'un très grand nombre de situations ou d'occasions au cours desquelles, depuis l'enfance, le locuteur a bénéficié, souvent de manière spontanée, involontaire, d'une exposition à celles-ci. En revanche, elles sont sémantiquement opaques et leur mémorisation se révèle problématique.

> We now recognize that much of our 'vocabulary' consists of prefabricated chunks of different kinds. The single most important kind of chunk is collocation. Self-evidently, then, teaching collocation should be a top priority in every language course.[94] (Lewis, 2000)

De manière à permettre au lecteur de cerner davantage ce que représente une collocation, nous proposons l'illustration suivante qui présente les types collocations sur un continuum (Conzett, 2000, in Souza Hodne, 2009) :

friendly dog	*strong coffee*	*sibling rivalry*[95]	*throw in the towel*[96]
←	weaker	stronger	→
old car	*heavy smoker*	*mitigating circumstances*[97]	*Stars and Stripes*[98]

Ce schéma permet de se faire une idée de ce que pourrait donner un lexique phraséologique qui inclurait des éléments non spécifique à une discipline (à une DNL, pour ce qui concerne notre problématique).

Cavalla, dans une perspective didactique, pose la question de savoir *comment présenter la forme et le sens de ces éléments afin d'aider à leur mémorisation et leur utilisation à bon escient.* (Cavalla, 2008)

Dans un même ordre d'idées, González Rey, en allant jusqu'à parler de phraséodidactique, considère que les expressions figées sont des « éléments incontournables du discours » et qu'il est nécessaire de les « introduire dans les méthodes pédagogiques au même titre que le reste des items à apprendre dès le début de l'apprentissage ».

Dans le cas plus particulier de la phraséologie scientifique transdisciplinaire, Cavalla partage le point de vue de Gonzalez Rey en regrettant que la question des expressions figées ne soit pas du tout abordée. L'objectif de Cavalla, qui rejoint également la problématique de Pecman, est « *d'analyser certains phénomènes linguistiques de la Langue Scientifique Générale que Pecman (Pecman, 2005) définit comme étant un ensemble de compétences langagières communes à l'ensemble des chercheurs en sciences mais transcendant les spécificités disciplinaires* ».

---

[94] « Nous savons désormais qu'une grande part de notre 'vocabulaire' est constituée de différentes structures préfabriquées. Les plus simples d'entre elles sont les collocations. En conséquence, nous pensons que l'enseignement des collocations devrait être une priorité dans tous les cours de langues étrangères. » (Traduction de Cavalla, in Cavalla 2008)

[95] « rivalité entre frères »

[96] « jeter l'éponge », « abandonner la partie »

[97] « circonstances atténuantes », par opposition à circonstances aggravantes (*aggravating circumstances*)

[98] *Stars and Stripes* : nom du drapeau américain, à traduire par *le drapeau* étoilé ou *la bannière étoilée*

Les travaux de Pecman concernent essentiellement la Traduction Automatique des Langues et reposent sur le postulat de l'existence d'une Langue scientifique Générale mais ses analyses éclairent une facette souvent négligée en didactique des langues. Les recherches de Cavalla et Gonzalez Rey, quant à elles, sont à vocation didactique et sont donc plus à même d'ouvrir des pistes très intéressantes en ce qui concerne l'enseignement CLIL.
Mais nous ne développerons pas davantage ce point, car il risquerait de nous entraîner trop loin de notre problématique, qui reste spécifique au cas des mathématiques.

IV.4. Transversalité et aspects culturels

Il est clair que les tournures idiomatiques, les formes idiomatiques sont des points d'accès privilégiés à la culture à laquelle se rattache la langue concernée. La dimension humaine qui transparaît derrière ces unités phraséologiques particulières est incontestable. Par leur biais, la langue elle-même s'humanise et représente un enrichissement personnel incontestable pour celui qui l'acquiert.

> Too many students learn «book-English» ; too few learn to use *the current phrases* which are common in our daily speech [...] the sources from which the student may draw phrases in common use, frequently colloquial in character, are extremely limited. [...] the foreign student who wishes to speak English fluently will need to have them *at his fingers'ends.*[99]

Pour parvenir à la maîtrise de ces expressions, un entraînement régulier, progressif et méthodique est nécessaire. Les didacticiens préconisent l'enseignement de celles-ci dès les débuts de l'apprentissage d'une L2.
Cavalla regrette qu'elles ne fassent pas l'objet d'un enseignement explicite. Selon elle, *les apprenants ne retiennent pas seuls ces structures et ont besoin d'une mise en exergue de la phraséologie* [100]*pour la retenir*.
De manière originale, elle propose des exercices basés sur la progression suivante :

- avec texte support

- *repérage guidé des collocations sur une partie de l'article : lecture attentive en vue d'une mémorisation des structures collocatives de type : Verbe + Nom*
- *vérification du sens par la réutilisation des structures* ***en contexte***
- *repérage non-guidé des structures collocatives spécifiques*
- *mémorisation : insertion dans des phrases issues de l'article puis* ***dans de nouveaux contextes***

- sans texte support :

- *utilisation d'images support*
- *développement de stratégies de* ***déduction du sens***
- *mémorisation : appariement répétés*
- *réinvestissement dans des* ***contextes variés*** *(issus des corpus d'articles scientifiques)*

Ces exercices sont d'un nouveau type et ouvrent des pistes transversales pour l'enseignement de la L2. Nous avons souligné le rôle prépondérant de la contextualisation et de la problématique concernant l'accès au sens de ces unités phraséologiques, celui-ci étant très dépendant des contextes.

---

[99] Arthur James WORRALL, *English idioms for foreign students* (1ère éd. 1932), London: Longman, 1971. (in Gonzalez-Rey, 2002)
[100] C'est nous qui soulignons.

L'un des objectifs implicite de l'apprentissage de type CLIL, au-delà de l'acquisition de savoirs spécifiques à la DNL, est de permettre l'acquisition de savoirs linguistiques non réduits à l'assimilation d'un lexique nominal centré exclusivement sur la discipline (ce qui serait relativement limité dans le cas des mathématiques) mais de permettre au contraire, grâce à des situations contextualisées et davantage ancrées dans le réel, voire le quotidien, la vie pratique, un accès à un lexique incluant les collocations, les expressions figées, qui soit le plus étendu possible, tout en gardant un lien avec la discipline (même si ce n'est que par le biais du thème d'étude choisi).
A titre d'exemple, l'étude de situations portant sur les **probabilités** peut conduire l'enseignant CLIL-mathématiques à adopter une telle position puisque les activités rencontrées en probabilité s'enracinent **très fréquemment** dans des **expériences de nature concrète**. Le vocabulaire rencontré peut facilement déborder du vocabulaire qui concerne (habituellement) les autres branches, ce dernier étant clairement plus restreint (vocabulaire propre à l'algèbre, à l'analyse ou à la géométrie).
Voici par exemple quelques expressions que nous avons été amené à utiliser lors d'une activité[101] portant sur « le jeu de fléchettes » :

darts : le jeu de fléchettes
playing darts : jouer aux fléchettes
throwing darts at a spinning wheel : lancer des fléchettes sur une cible tournante
a set of darts with metallic points : un jeu de fléchettes à pointe métallique
How many darts fell within a distance of 1/2 for the center?
We begin by throwing some (n) darts at a unit circle dartboard.
The cross marks the places where the darts land.
how to keep track of that : comment noter tout cela
to keep track of your darts score : pour comptabiliser vos points au jeu de fléchettes
We'll keep track of the random variable R, which is the distance the dart lands from the center.

Dans ce type d'activité, pour lesquelles les formulations rencontrées ou utilisées renvoient davantage au réel, à des expériences vécues de manière effective ou faisant partie, en tout cas, des représentations communes, partagées, on peut aussi croiser des passages tels que :

> […] with the darts falling at random anywhere in the circle it should seem reasonable that:
> the probability the dart falls into any particular region r inside the circle is proportional to ratio of the area a of that region to the area of the unit […]

Ils permettent une transition vers des formulations plus mathématiques, tout en restant au niveau linguistique (sans passer par le langage semi-formel ou formel, c'est-à-dire symbolique).
Néanmoins, les activités étant de nature mathématique, on rencontrera également des expressions au contenu propre au thème traité, en l'occurrence celui des probabilités :

following a uniform distribution : suivant une loi uniforme
a random variable taking on a continuous range of values
in the case of continuous random variables, the probability is assigned to a continuous range of the random variable
PDF : probability density function
X is a uniform random variable if its PDF has the form …

[101] Cette activité ne fait pas partie des séquences expérimentales.

Un dernier point concernant l'exemple du jeu de fléchettes, et relativement à la phraséologie : une expression telle que celle que nous avons mentionnées ci-dessus, à savoir *keeping track of the darts score* est, selon nous, l'occasion d'entrer dans une discussion de nature étymologique.

A ce propos, et dans le cas particulier de l'utilisation du terme *track*, il peut être très intéressant, et enrichissant du point de vue culturel, de rappeler l'origine de ce terme.

Nous proposons à titre d'illustration, un passage extrait du Online Etymology Dictionary[102], et concernant l'étymologie de *track* :

> late 15c., "footprint, mark left by anything," from Old French *trac* "track of horses, trace" (mid-15c.), possibly from a Germanic source (cf. Middle Low German *treck*, Dutch *trek* "drawing, pulling;" see ***trek***). Meaning "lines of rails for drawing trains" is from 1805. Meaning "branch of athletics involving a running track" is recorded from 1905. Meaning "single recorded item" is from 1904, originally in reference to phonograph records. Meaning "mark on skin from repeated drug injection" is first attested 1964.
> *Track record* (1955) is a figurative use from racing, "performance history" of an individual car, runner, horse, etc... (1907, but the phrase was more common in sense "fastest speed recorded at a particular track"). To *make tracks* "move quickly" is American English colloquial first recorded 1835; to *cover (one's) tracks* in the figurative sense first attested 1898; to *keep track of* something is attested from 1883. American English *wrong side of the tracks* "bad part of town" is by 1901. *Track lighting* attested from 1970.

Comme on peut le voir à travers les éléments étymologiques précités, le cas de *track* est intéressant, puisqu'il permet d'illustrer le phénomène de présence dans la langue anglaise, de termes issus du vieux français. Par ailleurs, le terme *track* est aussi à rapprocher des termes français (contemporains) *trace* mais aussi *traquer*.

Dans ce qui suit, nous ne détaillons pas les questions techniques de classements des unités phraséologiques[103] mais proposons néanmoins deux exemples de tel classement.

Ils représentent respectivement le modèle dominant, ainsi qu'une extension de ce modèle, dans la classification des unités phraséologiques et il s'inspire de (Pecman, 2004).

idiome pur	idiome figuratif	collocation restrictive	combinaison libre
it's raining cats and dogs	to make a U-turn	to run a deficit	to put on a hat
il pleut des cordes	faire un demi-tour	enregistrer un déficit	mettre un chapeau

On retrouve les éléments de la classification de Cowie (1981) que nous précisons ci-après (extrait de Souza Hodne, 2009) :

> Free combinations (e.g. *drink tea*):
>
> - the restriction on substitution can be specified on semantic grounds [i.e. you can substitute *tea* by *coffee, water, juice*, etc...]
> - all elements of the word combination are used in a literal sense
>
> Restricted collocations (e.g. *perform a task*):
>
> - some substitution is possible, but there are arbitrary limitations on substitution [e.g. you can also say *do a task*, but not *make a task*]

[102] Nous avons déjà fait référence à ce dictionnaire, dans le cas d'une discussion autour du terme *pattern*.
[103] Cf (Pecman, 2004) pour une synthèse très intéressante des modèles de classement des unités phraséologiques.

- at least one element has a non-literal meaning, and at least one element is used in its literal sense; the whole combination is transparent

Figurative idioms (e.g. *do a U-turn, in the sense of "completely change one's policy or behaviour)*:

- substitution of the elements is seldom possible
- the combination has a figurative meaning, but preserves a current literal interpretation

Pure idioms (e.g. *blow the gaff*[104]):

- substitution of the elements is impossible
- the combination has a figurative meaning and does not preserve a current literal interpretation

Pecman propose d'ailleurs une extension du modèle dominant :

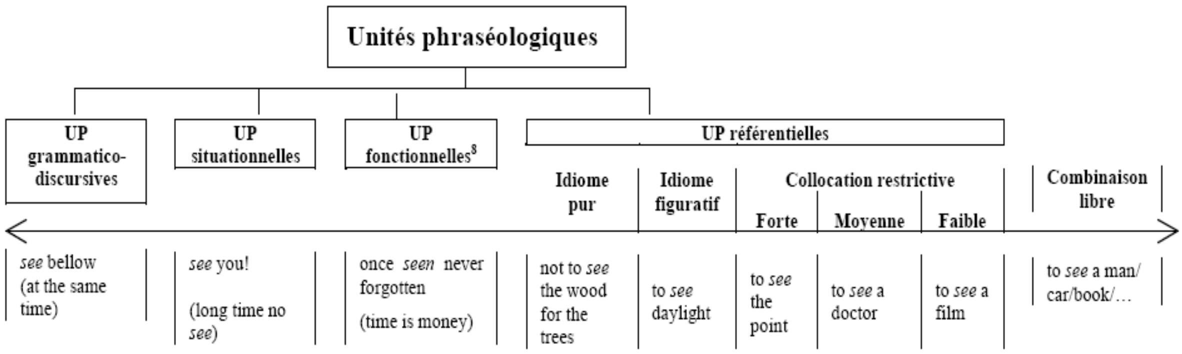


Figure 3.8

Enfin, nous proposons à la page suivante une **maquette**, proposée par Pecman (Pecman 2005), relativement à ce que donnerait l'affichage d'une page d'un dictionnaire phraséologique bilingue[105] (figure 3.9).

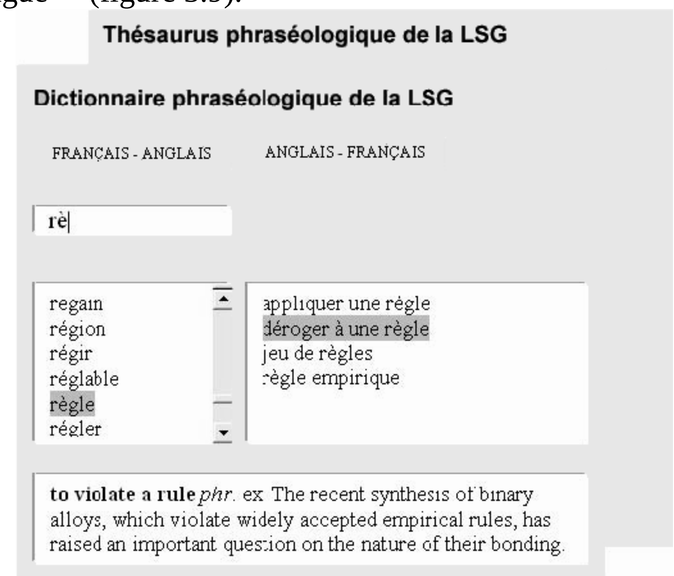


Figure 3.9

[104] « vendre la mèche »

[105] A l'heure actuelle, nous ne savons pas si le projet d'élaboration d'un dictionnaire scientifique général bilingue, mentionné dans (Pecman, 2005), a abouti.

V. Représentations lexicales en contexte monolingue, bilingue et CLIL

V.1. Généralités

Nous avons présenté plusieurs éléments attachés à la notion de représentation en tenant compte de ce qu'elle peut recouvrir lorsqu'on la qualifie de cognitive, mentale, imagée, sémiotique, etc...
Dans ce paragraphe, nous souhaitons nous intéresser davantage aux aspects plus particuliers, plus spécifiques que l'on peut lui rattacher lorsqu'on se réfère à un enseignement de mathématiques de type CLIL (rappelons-le, il s'agit des mathématiques en anglais). Considérons dans un premier temps les représentations physiques d'une part, et les représentations cognitives (imagées ou propositionnelles), d'autre part, que l'interaction, la situation didactique, la réflexion de l'élève vont susciter ou déclencher. Les représentations physiques, lorsqu'elles ont une composante sémiolinguistique, sont différentes du point de vue de la spécificité des syntaxes de chacune des langues et des signes linguistiques utilisés. Les représentations cognitives quant à elles sont, en ce qui nous concerne (les élèves de classes européennes ayant participé aux séances expérimentales ont, presque à chaque fois, déjà rencontré en cours de maths non européen, c'est-à-dire en L1, les notions utilisées) très peu influencées par les conditions linguistiques particulières (le fait que le travail soit effectué dans ou relativement à la L2), sauf si l'activité repose sur une confrontation à des éléments (de nature cognitive ou physique) jamais rencontrés auparavant et qui n'auraient donc jamais été rattachés à des expériences liées à la L1. Si une représentation cognitive est déjà disponible, le travail (l'activité mathématique) en L2 va permettre de faire évoluer la représentation (associée à un concept spécifique par exemple) en créant des connexions via la L2 avec la représentation disponible et cela, en rapport étroit avec le contexte d'utilisation. Pour qu'une représentation ainsi augmentée, ou élargie, et possédant (relativement au contenu qu'elle recouvre) des éléments linguistiques en L2, puisse se révéler efficace du point de vue des restitutions de connaissances ou puisse faire évoluer un savoir (qui reposerait sur elle) vers un savoir plus étendu, il est nécessaire que les éléments linguistiques associés soient bien ancrés en mémoire. Chaque mot associé (en L2) est susceptible de fournir un point d'accès à la représentation sous-jacente. Mais l'articulation entre les productions sémiotiques et les tâches à accomplir, les interactions qui se produisent en liaison avec le milieu matériel[106], celles qui concernent les rapports avec les autres élèves ou avec l'enseignant, repose sur la maîtrise d'un certain répertoire de formulation. Nous avons détaillé au chapitre 2 les notions de répertoires mais nous pouvons dire dès à présent que les représentations disponibles, attachées à des expériences elles-mêmes vécues dans un contexte lié à la L2, doivent pouvoir être délimitées, cernées, de manière à être convenablement sollicitées. Comme toute représentation associée à une connaissance (scientifique ou non) s'enracine aussi dans le quotidien, dans la vie de tous les jours, par le biais de concepts qualifiés précisément de *quotidiens* (au sens de Vygotski), nous disposons là d'un moyen de créer chez l'élève des occasions ou des possibilités d'énonciation, de favoriser une première formulation, même approximative, si tant est que les termes correspondants soient disponibles en L2. Ce type de formulation « intermédiaire » (à rapprocher de l'idée d'interlangue) est suffisante dans le cas d'un discours heuristique, lors des phases interactionnelles relatives à une situation

[106] Voir chapitre 1 pour la notion de milieu (en référence à la Théorie des Situations Didactiques).

didactique, tant que l'institutionnalisation n'a pas encore eu lieu, ou encore tant que la formulation reste à un stade de négociation. Les concepts quotidiens, ou encore, sous-entendant une large fréquentation avec ceux-ci, dans des contextes relativement naturels, reposeront, au niveau des représentations qui leur sont associés, sur des termes linguistiques qui auront le plus souvent été rencontrés en cours de langue vivante, ou à travers un travail personnel ou encore suite à des lectures etc... C'est déjà à ce niveau qu'un travail en collaboration avec les enseignants de L2 paraît être nécessaire, voire fondamental.
Si une représentation faisant partie du répertoire d'un élève (avec tous les éléments d'origine, fixés en mémoire par le biais d'éléments linguistiques et cognitifs liés à la L1 qu'elle comporte) est impliquée dans une situation didactique en contexte CLIL, elle ne débouchera sur une explicitation effective en L2 des éléments-clés, des contenus essentiels, qu'elle contient que si, non seulement le *lexique* associé, mais surtout *les schèmes de formulation* qui lui sont relatifs, sont disponibles en L2. Lorsqu'ils le sont, la pensée verbalisée (et intériorisée) peut se passer d'un recours linguistique à la L1. Nous avons tenté, dans les séances expérimentales, de tester jusqu'où les élèves pouvaient aller sans recourir à la L1 d'un point de vue d'une formulation explicite, et dans le cadre d'une situation visant un savoir non institutionnel (preuves visuelles).
En s'inspirant des travaux d'Abric, nous estimons, voire postulons, qu'il conviendrait d'identifier les termes ainsi que les expressions en L1 (expressions figées ou expressions fréquemment utilisées) directement associés à la représentation d'un concept quotidien, représentation dont le caractère social très marqué permet de considérer comme largement partagée. Ainsi, afin de **faciliter la mémorisation** mais aussi la restitution ultérieure en L2 d'éléments linguistiques ou plus généralement cognitifs associés, il faudrait sans doute déterminer avec un maximum de précision quelle est la liste de tous ceux qui sont impliqués dans la représentation commune correspondante.
En l'état actuel des choses, le cloisonnement des disciplines est tel que l'enseignement des mathématiques est encore trop déconnecté des autres disciplines. La notion-même de représentation partagée, dont certains éléments se trouvent mémorisés en étroite relation entre eux chez la plupart des individus d'un groupe social, permet de faire émerger l'idée de la nécessité d'un travail transdisciplinaire afin de s'appuyer efficacement sur ces éléments, lors des interactions en classe, et principalement lors des questionnements au cours desquels la formulation est initialement négociée (et donc aussi lorsqu'une nouvelle connaissance est en train d'émerger). Les représentations partagées vont émerger naturellement, spontanément, dans la vie de tous les jours mais aussi lors des apprentissages scolaires. Ces éléments fortement enracinés en mémoire et associés par le biais d'une représentation doivent donc donner lieu à un apprentissage linguistique (axé sur le lexique et la phraséologie) en L2 correspondant. Cet apprentissage en L2 devrait, pour être plus efficace, être consolidé, renforcé, dans des disciplines autres que le seul enseignement de la langue vivante seconde. Des thèmes transversaux tels que l'espace, le temps, le mouvement, la logique peuvent donner lieu à une consolidation linguistique en L2 des éléments relatifs aux représentations des concepts quotidiens associés, au travers de projets ou de thèmes d'étude transdisciplinaires. En ce qui concerne les mathématiques, des situations plus concrètes, davantage enracinées dans le monde sensible, matériel, devraient légitimement, dans le cas où elles seraient effectuées en L2, pouvoir donner lieu à une sollicitation d'autres représentations communes associées et permettre ainsi la consolidation linguistique de leurs éléments, ou, en d'autres

termes, faciliter ultérieurement l'accès à ces derniers. Nous revenons en détail sur ce point, dans le paragraphe suivant, lorsque nous évoquerons le modèle lexical RHM.
Par ailleurs, nous estimons que la notion d'analogie est fondamentale dans le processus de restitution des éléments d'une représentation cognitive. Ainsi, dans le cas d'une connaissance scientifique, en l'occurrence mathématique (mais en un sens élargi), les éléments impliqués dans la, ou les, représentations associées seront d'autant mieux restitués que les schèmes de formulation, et les segments linguistiques préconstruits qui les accompagnent, seront déjà disponibles en tant que connaissances issues de la pratique de la L2 dans le cours de langue traditionnel.
A titre d'exemple, il semble très clair que les termes et les descriptions linguistiques, verbales, relatifs aux manipulations idéalisées[107] portant sur des symboles ou des objets géométriques sont analogues à ce que l'on pourrait formuler dans des contextes non-mathématiques (mouvements d'objets concrets en général). On peut aussi s'appuyer sur l'homologie qui existe entre le temps et l'espace d'une part, et la logique d'autre part. Les idées de succession temporelle, d'étapes d'un raisonnement, de nécessité et de conséquence, l'interprétation dynamique de figures statiques, etc…, établissent un pont (basé sur le principe d'analogie) entre temps (et espace) d'une part et logique d'autre part. Par ailleurs, signalons également que la mobilisation des sens, la capacité de percevoir les analogies ou les différences, de distinguer ou regrouper les objets, sont des facteurs favorisant la restitution d'éléments représentationnels. De plus, c'est en accompagnant la représentation (dynamique, simultanée et mentale) d'un déplacement, d'un mouvement quelconque (exprimé, décrit en L2) d'une expérience interne particulière que l'on peut également favoriser la restitution explicite des caractéristiques linguistiques propres aux représentations et les articuler verbalement, explicitement. La perception d'une juxtaposition dans l'espace est similaire à celle de succession (de répétition s'il s'agit d'éléments identiques) au niveau temporel ou de conséquence du point de vue logique. Les schèmes de formulation sollicités sont également proches et sont parfois interchangeables. Les capacités de perception des analogies, des similitudes, le pouvoir de distinction, la mobilisation des sens, permettent de déclencher des schèmes de formulations linguistiques articulant convenablement les éléments impliqués. La fréquence de situations mathématiques qui le permettent est déjà en soi un gain cognitif et linguistique, que ce soit en L1 ou en L2. Si la situation est une situation de type CLIL-mathématiques, le côté positif, le gain cognitif, s'étend à la pratique de la L2 (en cours de langue habituel).

V.2. Lexique et représentations

La question se pose de savoir quels sont les liens effectifs existant entre le lexique en L1, celui en L2 et le concept correspondant en tant que signifié ou en tant qu'objet de nature sémantique, lui-même éventuellement descriptible par voie linguistique.
En premier lieu, nous proposons plusieurs illustrations (elles sont extraites de Cook, 2012) portant sur un terme lexical simple, à savoir celui de *chien*. Il est relativement concret et peut, dans un premier temps être considéré comme renvoyant à un concept qui semble *assez naturellement* **recouvrir** le concept attaché au mot *dog*. Nous verrons par la suite (dans le cas du concept de *pattern* par exemple) que les choses ne sont pas si simples, car un item lexical est, au niveau mental, toujours rattaché à une représentation intégrant des relations lexicales,

[107] Voir les séances expérimentales pour plus de détails.

sémantiques et conceptuelles avec d'autres éléments. Ces éléments apparaissent chacun comme autant de **points d'accès** à d'autres représentation, celles-ci étant considérées comme interconnectées ou se chevauchant (selon la métaphore adoptée).

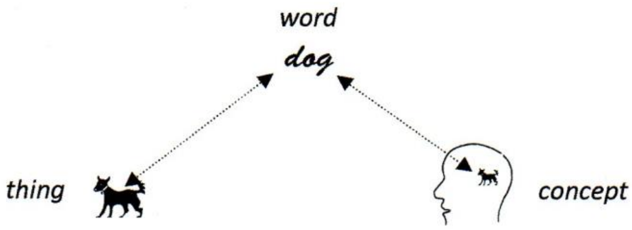


Fig 3 linking things and concepts

Figure 3.10

Ce schéma, analogue à de nombreux autres schémas conceptuels existant dans la littérature liée à la linguistique cognitive, est censé illustrer le fait que le terme lexical *dog* sert d'intermédiaire, (*établit un pont* pour reprendre l'expression de Cook) entre la chose (l'objet réel *chien,* le vrai chien) au *concept* de chien. Nous considérons malgré tout qu'il masque certains phénomènes essentiels. Nous en prenons pour preuve que Cook elle-même se sent contrainte d'insérer la représentation iconique  dans le texte descriptif lui-même. Nous avons néanmoins trouvé de nombreuses choses intéressantes dans l'article et avons trouvé l'image très évocatrice. Selon nous, ce qui fait la valeur d'un schéma, c'est la finesse de la description qui l'accompagne, au-delà de son caractère évocateur, celui-ci dépendant fortement des connaissances et représentations (antérieures) de chacun.
Le point sur lequel nous souhaitons insister est le fait que la perception directe, l'usage des sens devraient avoir leur place sur un tel schéma. Le chien réel peut être perçu comme chien sans passer par le linguistique. Ainsi, la perception (qui peut être visuelle mais pas seulement : un aveugle se contentera du toucher, et l'aboiement d'un chien évoquera, chez celui qui l'entend, la présence de celui-ci avec tout ce que cela peut impliquer au niveau représentationnel) devrait figurer sous forme symbolique comme lien direct entre l'objet réel (figuré par une représentation iconique de chien) et le concept de chien, celui-ci renvoyant, selon nous à l'idée générale de chien et à tous les traits caractéristiques associés.
Les représentations qui suivent servent à illustrer les deux modèles d'interprétations des liens existant entre concepts et items lexicaux, dans le cas d'une co-existence de deux lexiques mentaux : l'un en un L1, l'autre en L2. L'article étant en anglais et son auteure anglaise, la L1 est donc ici l'anglais !

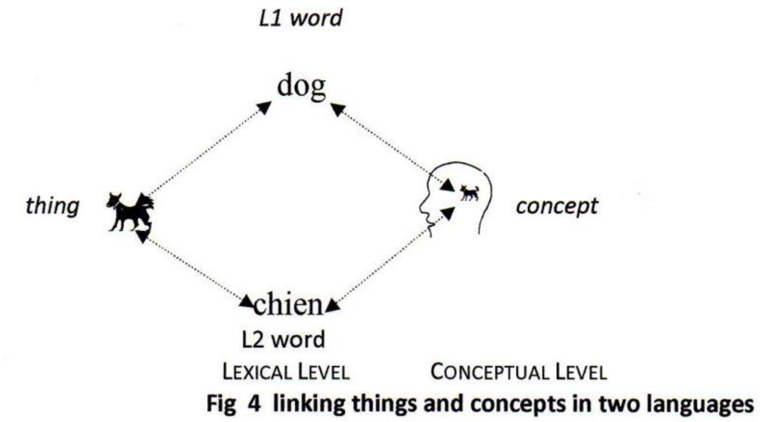


Figure 3.11

La figure ci-dessus correspond au modèle des traits conceptuels (au sens de De Groot). Cook y fait référence en parlant de *concept mediation model*. Selon ce modèle, l'accès entre les termes en L1 ou en L2 se fait *via* le concept.
Il existe un autre modèle qu'elle qualifie de *word association model* :

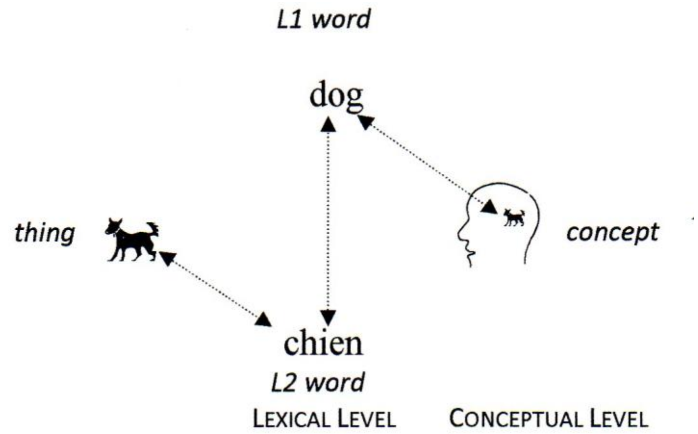


Figure 3.12

Sur ce type de schéma (figure 3.12), la *route* qui va de la chose réelle (nous sous-entendrons qu'elle est perçue effectivement ou sinon, qu'elle apparaît comme étant disponible en mémoire sous forme d'images mentales ou de représentation actualisée ou non) vers le concept en recourant à une activation du lexique en L2 (dans le cas d'un phénomène de pensée sémiolinguistique ou d'une communication effective) **ne peut se passer d'un recours au lexique correspondant en L1.** Mais ce schéma, bien qu'intéressant, et tout à la fois fortement visuel et symbolique, ne dit rien sur ce que recouvre l'idée *d'accès* au concept, ou encore sur le lien entre le terme en L1 et celui en L2 : doit-on le considérer au niveau physiologique, en rapport avec le physiologique ou uniquement de manière imagée, c'est-à-dire sans autre précision, et indépendamment des phénomènes de conscientisation ?
Sur les schémas précédents, les concepts apparaissent comme intériorisés (concept est écrit à l'intérieur de la représentation d'une tête) tandis que les mots sont représentés à l'extérieur ! Nous estimons que cette représentation figurée de l'objet réel, de l'objet perçu dans la réalité sensible, que l'on peut retrouver d'ailleurs juxtaposée au lexique dans des dictionnaires

visuels (en tant qu'illustrés), correspond, au niveau mental, à quelque chose qui tient déjà lieu d'élément de la représentation conceptuelle de l'objet. Le mot n'est pas attaché directement à une image si ce n'est sur une représentation schématisée (et physique). Pour ce qui est des phénomènes de cognition, ce qui reste accessible à la conscientisation ne permet pas d'en déduire quoi que ce soit quant à la modalité selon laquelle s'effectue le lien qui va du terme lexical mémorisé et/ou pensé à la représentation imagée de l'objet au niveau physiologique. Une chose est claire néanmoins, c'est que ce lien passe par un phénomène cognitif, donc de conceptualisation. Les schémas précédents ne sont donc finalement que des invitations à la réflexion, aux discours et aux descriptions fines. Ils servent simplement (pour nous, en tout cas) de point d'appui.

Nous souhaitons néanmoins préciser que Cook est bien consciente des sens différents qui peuvent être attachés à l'item lexical *dog.*

Elle cite plusieurs exemples où le mot *dog* peut faire :

référence à des choses qui échouent, qui n'aboutissent pas : *that record was a real dog*

référence à une constellation : *the dog star*

référence à un instrument muni de mâchoires ou pinces : *iron dog*

Cook insiste par ailleurs sur le fait qu'apprendre un mot signifie bien plus qu'apprendre une seule signification par mot mais que cela implique bien au contraire d'apprendre une multitude de renseignements, d'informations à son sujet : il faut par exemple connaître sa prononciation, savoir l'écrire, être au courant par exemple que *dog* peut aussi être un verbe comme dans l'expression *she dogged his footsteps,* etc...

En ce qui concerne la notion de lexique mental à laquelle nous nous sommes référé, Hilton (Hilton, 2002) propose (voir figure 3.13) un modèle dans le cas d'un lexique monolingue (lexique mental en L1).

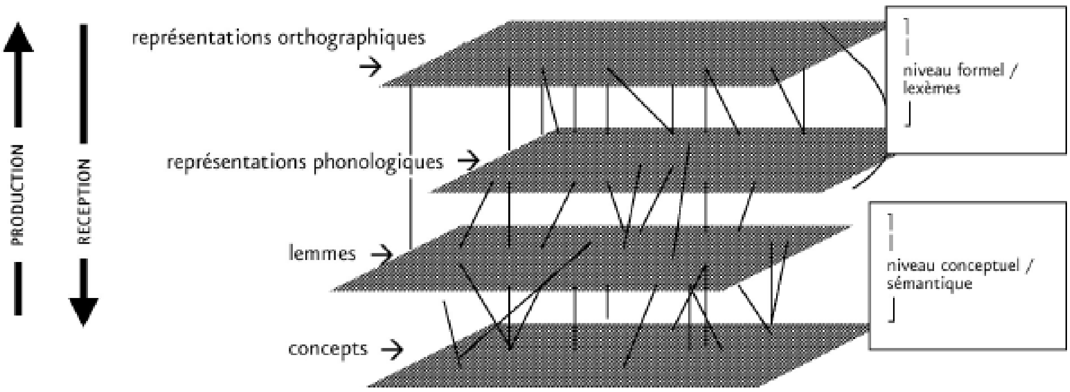


Figure 3.13

A propos de ce modèle, Hilton déclare :

> D'abord, nous voyons que les représentations formelles des mots – phonologiques et orthographiques – sont stockées dans au moins deux réseaux séparés (Brown *et al.* 1984), mais hautement liés, bien sûr, pour une langue alphabétique comme l'anglais (Jackson & Morton 1984 : 569 ; de Groot 1998 : 298). Ensuite, on constate qu'il y a des liens (des **arcs**) entre les unités (les **nœuds**) qui composent chaque plan du modèle, et d'autres ramifications entre ces sous-réseaux. Ici, j'en ai tracé quelques-uns, mais il y aurait des milliers d'arcs entre les niveaux du réseau. Un nœud peut être relié à plusieurs unités d'un autre niveau : un ensemble

phonologique peut avoir plusieurs représentations orthographiques ou plusieurs sens; un concept peut être relié à différents lemmes[108] et ainsi de suite.

Le schéma précédent (figure 3.13) est intéressant également pour le fait qu'il laisse apparaître les phénomènes langagiers de production et de restitution. Lorsqu'il s'agit de produire, l'individu part du réseau conceptuel pour aller vers les formes sonores ou écrites. Lors de la réception, c'est l'inverse qui se produit :

> Les mots écrits ou chaînes phonologiques activent des lemmes, qui activent nos représentations conceptuelles. Les liens entre les unités composant le réseau sont établis dans le temps, par l'activation répétée de deux éléments pendant la communication verbale (ibid.).

Nous avons hésité à présenter le schéma précédent car nous ne souhaitons pas aller trop avant dans les considérations d'ordre lexical et conceptuel. Malgré tout, même si notre problématique concerne la L2, le fait que l'objet premier reste l'objet mathématique et que notre problématique soit de nature didactique, nous contraint à ne pas rentrer dans des considérations trop pointues.

En ce qui nous concerne, nous avons déjà fait allusion à la notion de *schèmes de formulation* lorsque nous avons traité des phénomènes didactiques faisant intervenir l'articulation entre la production langagière (verbalisation), le contenu sémantique des objets impliqués et le caractère interactionnel et contextualisé de la situation didactique. Le schème de formulation est une unité découpée plus ou moins artificiellement mais que l'on peut appréhender effectivement (lorsqu'on regarde sa trace sonore ou écrite) tandis que la notion de lemme reliant un concept à une unité phonologique ou orthographique est quelque chose de plus subtil car le lemme intervient au niveau sémantique (pur).

Malgré le fait qu'un modèle soit toujours une simplification de la réalité qu'il cherche à décrire, il est appréciable à l'aune des caractéristiques qu'il met en lumière. Il nous faut néanmoins reconnaître dès à présent que parler d'*articulation* entre la production langagière, c'est-à-dire la verbalisation, le contenu sémantique des objets impliqués et le caractère interactionnel et contextualisé de la situation didactique, revient à prendre en compte de manière implicite la composante sémantique liée *à la représentation que l'on se fait de la situation* et non pas seulement à celle des objets convoqués au travers de celle-ci.

Ainsi donc, il nous semble indispensable de compléter ce que nous avons évoqué par le schéma suivant (plus explicite et plus simple), issu de l'article de Hilton (2002) :

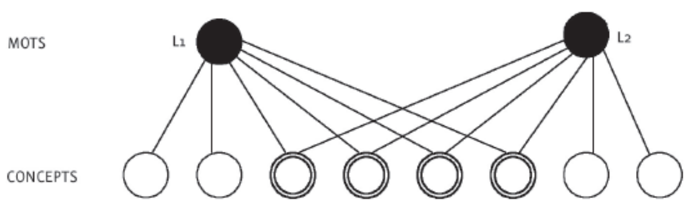


Figure 3.14

[108] Le **lemme**, ou **lexie** ou **item lexical**, est l'unité autonome constituante du lexique d'une langue. C'est une suite de caractères formant une unité sémantique et pouvant constituer une entrée de dictionnaire. Dans le vocabulaire courant, on parlera plus souvent de « mot », notion qui manque cependant de clarté. On construit des énoncés avec des lemmes ; les lemmes sont faits de morphèmes. (extrait de l'article « **Lemme (linguistique)** » sur wikipedia, consultable à l'adresse suivante : http://fr.wikipedia.org/wiki/Lemme_(linguistique)).
Ou encore :
(Linguistique) Forme canonique, considérée par convention comme non fléchie, d'un nom, d'un adjectif, d'un verbe, d'un pronom, présentée comme entrée principale, dans un dictionnaire.
Les adjectifs précieuse *et* précieuses *ont pour **lemme*** précieux. (extrait de l'article « **Lemme** » dans la partie étymologie du dictionnaire ligne wiktionary , consultable à l'adresse suivante : http://fr.wiktionary.org/wiki/lemme)

A propos de ce schéma, Hilton déclare d'ailleurs :

> Une forme lexicale est reliée à différentes unités sémantiques ; dans certains cas, les unités sémantiques sont reliées à des formes dans les deux langues, dans d'autres cas le lien est unique […]
>
> L'activation d'un mot L1 est donc possible, suite à un stimulus en L2, mais le lien entre les deux langues se situe au niveau sémantique. Ces différents modèles du lexique mental L2 schématisent les opérations à deux niveaux seulement – concepts et formes – sans distinction à l'intérieur de chaque réseau […] (Hilton, 2002).

Nous préférons ce modèle, dans la mesure où il laisse apparaître la possibilité de non-recouvrement conceptuel (on emploie également l'expression d'équivalence partielle). Nous détaillerons plus loin en quoi cette modélisation est intéressante pour notre problématique et comment elle peut être reliée à la notion de représentation cognitive.

Ci-dessous, un schéma plus précis, dans le cas L1=anglais et L2= espagnol[109] :

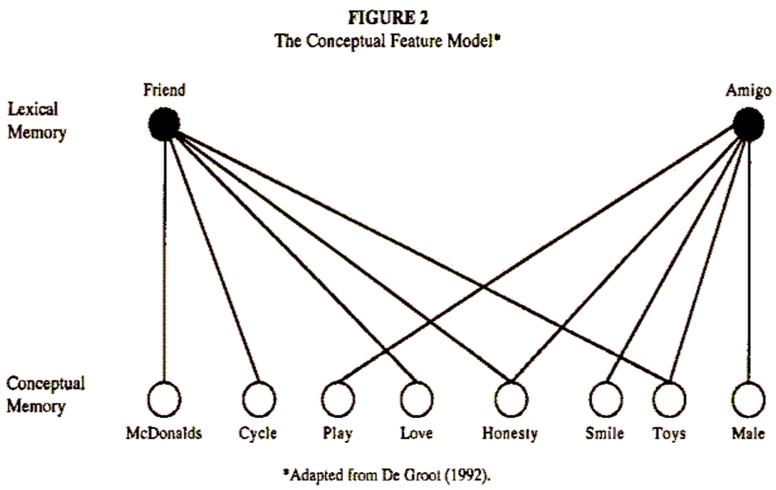


Figure 3.15

Dans son article, Hilton fait également référence à Prince (Prince 1998) en proposant un *échantillon sémantico-lexical bilingue*. Nous le reprenons ici-même puisque nous serons conduit à nous y référer, ou à nous en inspirer, lorsque nous traiterons de la représentation lexicale et conceptuelle de l'idée de *pattern* (voir figure 3.16 et 5.3).

[109] "What'S in a Bilingual'S Mind?: How Bilingual Consumers Process Information", article consultable en ligne à l'adresse: http://www.acrwebsite.org/search/view-conference-proceedings.aspx?Id=8267

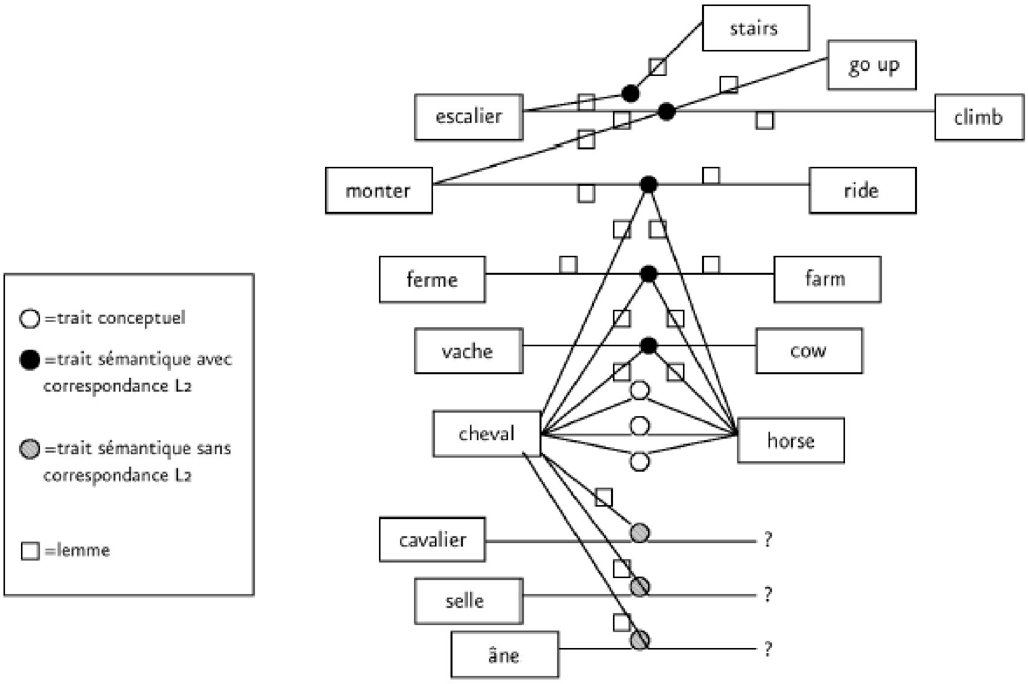


Figure 3.16

Hilton déclare à ce sujet:

> Ce modèle illustre les liens entre concepts, lemmes et graphèmes – une véritable toile d'araignée pour seulement huit mots de la L1. Si l'on y rajoute les représentations phonologiques (ici absentes), on commence à apprécier la complexité des réseaux qui se constituent dans un cerveau humain qui manie deux langues.

Afin d'éclaircir davantage les liens effectifs existant entre le lexique en L1, celui en L2 et le concept correspondant, nous faisons allusion au modèle RHM (modèle hiérarchique révisé), modèle fréquemment retenu en linguistique. Comme de nombre d'entre eux (celui-ci est rattaché à la linguistique cognitive), il repose sur un postulat. En l'occurrence, le modèle RHM présuppose qu'un même niveau conceptuel donné peut être atteint soit par le biais d'un item lexical en L1, soit d'un item en L2. (Midgley 2009)

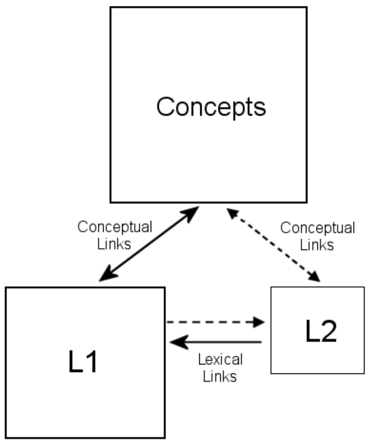


Figure 3.17 : the revised Hierarchical Model (RHM) of Kroll and Stewart (1994)

Pour un élève en cours d'apprentissage de la L2, les connections entre les entrées lexicales en L1 et la représentation conceptuelle sont plus forts que celles existant entre les entrées lexicales en L2 et cette même représentation conceptuelle. De plus, toujours selon ce modèle, l'interconnectivité entre les représentations lexicales est telle que la liaison allant de la L2 à la L1 est, elle-aussi, plus forte. Néanmoins, *pour des mots fréquents, rencontrés tôt dans l'apprentissage, il se crée cependant des liens entre mot et concept assez rapidement, tel que le premier active automatiquement le second sans passage obligé par L1* (Altarriba & Mathis, 1997 in Prince, 1999). Au fur et à mesure que l'apprentissage évolue, l'interconnectivité lexicale s'affaiblit tandis que la liaison conceptuelle entre les entrées lexicales en L2 et la représentation conceptuelle se renforce (Midgley 2009). Tout ceci semble en accord avec la pratique car il est clair que les apprenants s'appuient souvent sur la traduction des termes en L1 pour accéder au sens des termes en L2. La particularité du modèle RHM est de considérer un stockage des items lexicaux en L1 distinct de celui des items lexicaux en L2 en autorisant des interactions entre les deux groupes.
Il existe par ailleurs un autre modèle, appelé Modèle d'Activation Interactive Bilingue (Bilingual Interactive Activation Model or BIA model).

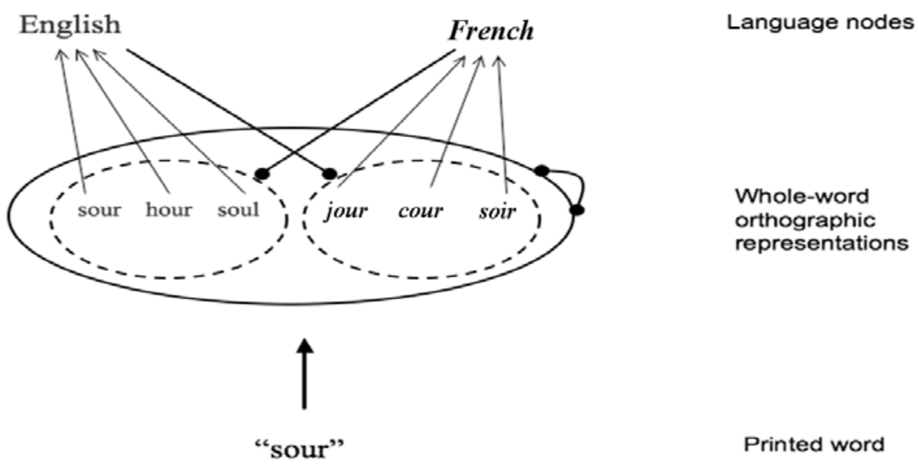


Figure 3.18

The Bilingual Interactive Activation Model (BIA)

Ce modèle apparaît comme complètement intégré et fortement interactif (ibid.). L'intégration a lieu au niveau des lexiques en L1 et en L2. Il existe également un niveau représentationnel englobant deux nœuds langagiers. Ces nœuds langagiers sont reliés à tous les items de chacun des lexiques. Le traitement vertical ascendant est non-sélectif (les termes des deux lexiques sont activés, disponibles) tandis que le traitement descendant consiste à inhiber les termes de la langue non utilisée.

> At the word level all words inhibit each other. Activated word nodes from the same language send activation to the corresponding language node. The activated language node sends inhibitory feedback to all word nodes in the other language. Language nodes collect activation from words in the language that they represent and inhibit active words of the other language". (Midgley)

Dans ses travaux, travaux qui s'inscrivent dans le domaine de la psychologie et des sciences de l'éducation, Midgley choisit de se référer aux deux modèles, dans la mesure où le premier permet de rendre compte des disparités existant entre les lexiques et de leur évolution au cours de l'apprentissage de la L2 tandis que le deuxième modèle illustre et rend compte des processus de sélectivité ou d'inhibition. Nous signalons au passage qu'il s'agit de travaux récents qui reposent sur des études électro-physiologiques portant sur les interactions entre deux langues vivantes. Le second modèle est de nature informatique (computational model).
Les résultats fournis par les recherches en neurosciences auront certainement à termes des conséquences très importantes en matière d'apprentissage d'une seconde langue. En l'absence d'éléments plus précis, plus pointus, on ne peut que s'appuyer sur des modèles représentationnels basés eux-mêmes sur des postulats. Le concept de représentation, en l'état actuel des connaissances semble néanmoins le plus approprié pour rendre compte de l'articulation entre les divers éléments relevant de notre problématique.
Nous avons souhaité mentionner l'existence et l'utilisation des modèles précédents de manière à mettre en valeur le fait que plusieurs termes lexicaux sont activés ou disponibles dès que l'on se focalise sur une représentation conceptuelle associée elle-même, soit à un terme linguistique isolé, soit éventuellement à une expression (phraséologique), soit à une unité sémantique associé à un terme ou une proposition issue du calcul formel mathématique.
Dans le cas d'un terme renvoyant à un objet de nature algébrique (*the square of an expression* par exemple), ou à un objet plus conceptuel (*function, polynomial, etc...),* on peut être amené à rester à un niveau d'utilisation syntaxique, en conservant malgré tout un traitement sémantique concernant les règles d'utilisation ou d'écriture correspondantes (sémantique syntaxique formelle). Lorsque cela s'avère nécessaire, dans le cas d'une activité mathématique (situation didactique ou adidactique), le traitement cognitif des données perceptives, conscientisé ou non, nous conduit à repérer éventuellement des analogies, à reconnaître un type de contexte déjà rencontré et donc à raviver, ou faire venir à l'esprit des représentations ancrées en mémoire. A cet égard, l'analogie fonctionne au niveau sémantique. Elle permet de reconnaître des relations et des « motifs », des structures, des agencements dans la lecture d'un schéma. Elle permet une conversion entre registres sémiotiques, en débouchant sur le linguistique lorsqu'il y a nécessité de communiquer sur la tâche en cours.
C'est une des raisons d'ailleurs qui nous a amené à regarder de plus près, dans le cadre de la partie expérimentale, le concept-même de « *pattern* », en amenant l'élève à construire et/ou à élargir la représentation associée chez lui à ce terme, sans la restreindre au seul cadre mathématique.
La référence à des données étymologiques peut jouer un rôle important en tant qu'élément culturel et dans l'accès au sens d'un mot tel que « pattern » :

> early 14c., "outline, plan, model, pattern;" early 15c. as "model of behavior, exemplar," from Old French patron and directly from Medieval Latin patronus (see ***patron***).
> Extended sense of "decorative design" first recorded 1580s, from earlier sense of a "patron" as a model to be imitated. The difference in form and sense between patron and pattern wasn't firm till 1700s. Meaning "model or design in dressmaking" (especially one of paper) is first recorded 1792, in Jane Austen.[110]

[110] (extrait de Online Etymology Dictionary / accessible à l'adresse suivante: http://www.etymonline.com/index.php?term=pattern)

Chez les anglo-saxons, les contextes d'utilisation possibles sont bien plus nombreux qu'en français où le terme peut, selon le cas, être traduit par motif, structure, schéma, etc… (on parlera de *recurring pattern*, dans le cas de la reconnaissance d'un schéma qui se répète selon un principe algorithmique). C'est alors la perception active qui va permettre d'agir directement au niveau sémantique, en décelant les traits caractéristiques d'un *repeating pattern* (motif répété) ou d'un *recurring pattern* (motif ou schéma associé aux suites récurrentes). Les anglo-saxons peuvent être amenés à parler de "*arithmetic patterns*", comme dans l'extrait de manuel ci-dessous. On peut traduire cette expression par motif récurrent de type arithmétique ou par situations liées aux suites arithmétiques :

> In **arithmetic patterns**, also called arithmetic sequences, students must determine the difference, called the "common difference", between each succeeding number in order to determine what is added to each previous number to obtain the next number.

Ce sont des éléments de l'objet perçu qui fonctionnent comme déclencheurs de la représentation conceptuelle du terme *pattern*.
En ce qui concerne ce que nous avons dit à propos du modèle des traits conceptuels, nous reprenons ce qu'Hilton déclare au sujet des possibilités de visualisation ou d'imagination qui sont attachées aux mots considérés comme concrets :
Les arcs qui relient les noms/les mots concrets au réseau conceptuel sont peut-être renforcés par leur « imageabilité[111] » (de Groot & Keijzer 2000) ; une *représentation supplémentaire (visuelle)* augmenterait leur activation conceptuelle.
Ce qui nous intéresse ici est le fait que la remarque précédente peut selon nous être appliquée à certaines notions abstraites. Des termes abstraits tels que *pattern* ou même *function,* ou encore *number,* ou *algebraic symbol,* sont souvent étroitement associés à des représentations schématiques, des symboles, c'est-à-dire à des *objets représentés physiquement*, visuellement et seraient donc mémorisés et conceptuellement activés plus facilement. Nous considérons de plus que l'implication **de** *tous les sens* (multimodalité), et pas simplement la visualisation, va aussi dans ce sens. Ellis (1996), dans un ordre d'idée très proche suggère que :

> La mémorisation des paramètres phonologiques, orthographiques et prosodiques de la langue relève d'un apprentissage *sensori-moteur*[112] totalement implicite (in Hilton, 2002).

Nous rappelons également que l'apprentissage d'un mot peut avoir lieu soit lorsqu'on nous dit ce qu'il signifie, soit lorsqu'on déduit sa signification lors d'une rencontre avec ce dernier, au niveau pratique, c'est-à-dire dans un contexte particulier. Dans les deux cas :

> Cette acquisition lexicale en L2 se fait par une opération combinée d'*entreposage* de nouvelles formes et d'*appariement* de ces formes au réseau conceptuel (déjà en place, pour nos apprenants adolescents / adultes) […]

Par ailleurs :

> L'entreposage en mémoire des formes de la langue dépend de la *répétition* – de rencontres réitérées avec les formes orales et écrites des mots. (Hilton, 2002)

Dans la pratique expérimentale, nous avons été confronté à ces deux manières de procéder : nous avons donc en général, à la fois donné une définition de certains termes (comme *pattern, match, fit*, par exemple), et à la fois proposé des contextes spécifiques d'utilisation, en insistant sur l'importance de consolider la mémorisation et d'enrichir la représentation conceptuelle, en proposant systématiquement des tournures phraséologiques (en

---

[111] C'est nous qui soulignons.
[112] C'est encore nous qui soulignons.

mathématiques **et** hors contexte mathématique). Afin de ne pas créer de répétition artificielle, nous avons travaillé sur plusieurs séances et présenté plusieurs contextes qui se prêtaient à un réinvestissement de ces termes. Notons par ailleurs qu'Hilton insiste également sur le caractère implicite de l'établissement des liens collocatifs : ils *sont, eux aussi, établis implicitement, par la répétition* (ibid.). Elle déclare plus loin :

> L'appariement des représentations formelles aux unités conceptuelles exige un effort cognitif de la part de l'apprenant – sans cet effort, le mot ne sera pas intégré au lexique mental. L'appariement sémantique est donc une opération d'apprentissage explicite.

Ainsi donc, l'appariement qui reposerait sur une simple traduction en L1 d'un nouvel item lexical (à l'occasion duquel on ne proposerait qu'un terme en L2, sans référence à d'autres emplois, dans des contextes différents et souvent avec des significations différentes), ce que l'on appelle *fast mapping*, ne permet qu'une restitution à court terme. De plus son utilisation dans des tâches sémantiquement complexes se révèle souvent insatisfaisante voire inadéquate. Le traitement cognitif d'une situation donnée et la verbalisation qui en découle doit tenir compte (et c'est là qu'intervient le caractère explicite de ce type d'apprentissage) du non-recouvrement des réseaux conceptuels en L1 et en L2, relativement à un même terme lexical *mais aussi* du non-recouvrement des réseaux lexicaux, relativement à un même concept. A ce propos, Prince déclare (1999) :

> La différence majeure entre L1 et L2 vient du fait qu'en L2 il s'agit d'apprendre une nouvelle forme lexicale pour un concept qui est déjà en place. Par ailleurs, ce processus doit souvent s'accompagner d'un réaménagement du concept de manière à prendre en compte les rapports différents entre concept et mot dans les deux langues. Le mot français *échelle* correspond à deux mots anglais, *ladder* et *scale*, alors que le mot anglais *ball* correspond à deux mots français, *balle* et *ballon*. Si ces exemples s'appuient sur des référents perceptuels relativement faciles à distinguer, il existe de nombreux cas plus difficiles à saisir, par exemple la série *déjà, encore, toujours, jamais* et leurs homologues, mais non équivalents, *already, still, always, yet, ever, never*.

Ce fait est bien illustré, rappelons-le, dans le schéma de De Groot (voir plus haut, Figure 4.7). Ce que nous avons tenté de faire à l'occasion des séances expérimentales et de la chronogenèse générale de notre enseignement, c'est de faire percevoir l'existence de ce non-recouvrement (que nous abordons ici au niveau théorique). A cette fin, nous avons proposé un nombre important de situations et de tâches variées où les termes lexicaux (que nous avons mentionnés comme exemples) et les expressions phraséologiques associées (voir partie expérimentale) ont été utilisés. Mais nous avons surtout joint un complément lexical et phraséologique relatif à des utilisations *dans d'autres contextes* possibles (vie de tous les jours, autres disciplines, etc...).

Nous terminons par un petit extrait de l'article de Prince (1999) à propos des contextes :

> Respecter une variété de contextes est également important. Le mot contexte est à prendre ici au sens large, comme tout ce qui entoure un mot lors de sa présentation. Le contexte linguistique peut consister en un seul mot, relié ou non au mot à apprendre, ou un segment plus long (phrase ou paragraphe). Le contexte cognitif dépend de la tâche à effectuer. Des décisions au niveau de la forme, orthographique ou phonologique, peuvent être bénéfiques, mais pour que la représentation sémantique s'affine, les tâches devront surtout faire intervenir divers types de traitement sémantique : jugements d'associations selon les différentes possibilités sémantiques et collocatives, tâches de reconnaissance et de production, tâches auditives et visuelles.

VI. Reformulation en contexte CLIL

Les questions de reformulation, qu'elles soient motivées par des raisons linguistiques ou des raisons strictement mathématiques, voire par des raisons d'une autre nature, sont au cœur des interactions en classe, d'une manière générale. Elles prendront parfois un aspect plus spécifique en contexte CLIL

En ce qui concerne nos séances expérimentales, la reformulation occupe une place importante car elle apparaît comme un moyen de description redondante des consignes essentielles avant l'entrée des élèves dans la phase adidactique. La reformulation permet alors aux élèves de saisir l'importance de termes centraux, voire cruciaux : *pattern*, *fit*, *match*, etc… ont ainsi tenu une grande place, à la fois du point de vue des objectifs mathématiques, mais aussi des savoirs visés linguistiques. Les reformulations au niveau du contenu des diapositives du document Powerpoint, celles produites par l'enseignant lors des interactions orales sont apparues comme des facteurs essentiels pour ce qui est du bon déroulement des séances.

Par ailleurs, nous avons beaucoup insisté sur la place de la phraséologie dans l'enseignement de la L2. Il est clair que la reformulation apparaît comme un moyen efficace de lever l'ambiguïté lorsque l'élève se trouve en présence d'une tournure collocative ou idiomatique non transparente.

Dans sa thèse, Blandine Pennec (Pennec 2006) analyse le phénomène de reformulation, dans le cas de l'anglais contemporain, sous de nombreux angles. Il est impossible de reprendre tous les éléments apparaissant dans sa thèse qui seraient susceptibles d'avoir des retombées en didactique tant cette dernière est dense. Par ailleurs, la reformulation est un trait essentiel de toute activité linguistique, que ce soit en L1, en L2, ou relativement au simple fait d'expliquer dans tout contexte quel qu'il soit. Il serait donc présomptueux de vouloir en dégager toutes les facettes à l'intérieur d'un seul paragraphe.

Néanmoins, nous estimons qu'il est important que nous mentionnons certains points, en renvoyant le lecteur à la bibliographie si celui-ci désire plus de renseignements.

Dans sa première partie, elle s'intéresse à la signification de la reformulation. Pennec structure son étude autour des questions suivantes :

> - Qu'est-ce que « reformuler » ? S'agit-il de dire la même chose avec des mots différents (c'est-à-dire opérer la ré-élaboration formelle d'un certain contenu) ? Ne fait-on pas nécessairement évoluer ce dont on parle en le présentant sous une autre forme ? (une réélaboration du contenu propositionnel lui-même serait alors opérée).

Ensuite, dans les deuxième et la troisième parties, elle s'intéresse aux procédés : étude des marqueurs et de certaines constructions discursives, en référence à la théorie des opérations énonciatives de Culioli.

Selon Pennec :

> Il n'existe pas de rapport bi-univoque entre les signes et leurs référents extralinguistiques, d'où les difficultés que rencontre le locuteur pour évoquer un référent en une seule formulation. (Pennec, 2006, page 15)

La reformulation apparaît donc comme un moyen de résoudre un certain type de difficultés : les non-coïncidences du dire peuvent en effet ainsi concerner l'énonciateur et/ou le co-énonciateur, concerner la gestion de la polysémie ou de l'homonymie, mais c'est lorsque l'énonciateur éprouve des difficultés *à faire coïncider l'énoncé à la réalité évoquée*, lorsqu'il juge que *la première formulation est défaillante* qu'il recourra à la reformulation.

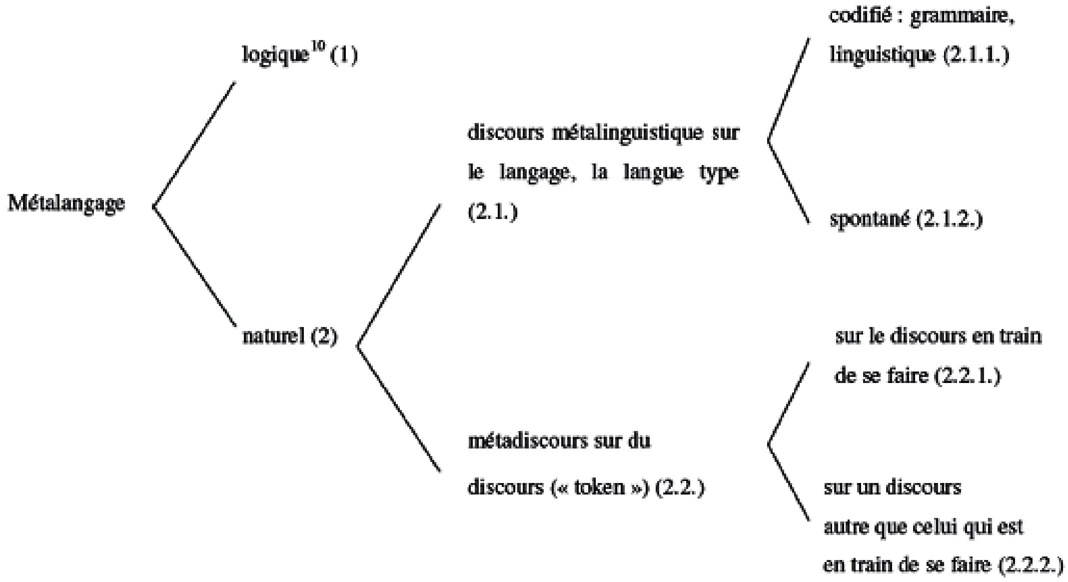


Figure 3.19 : les diverses composantes du métalangage, selon J. Authier-Revuz

Relativement au schéma précédent, Pennec considère que :

> le symbole, pour sa part, est affecté de façon bi-univoque à un objet de pensée.

Elle ajoute ensuite :

> [qu'] il est en conséquence difficile d'imaginer qu'une reformulation puisse être opérée dans un langage formel : ce dernier étant bi-univoque, il n'existe, pour évoquer un objet, qu'une et une seule formulation. (Pennec, ibidem, p.17)

Nous considérons en revanche qu'une reformulation en langue naturelle sera tout à fait envisageable à propos d'énoncés impliquant des symboles mathématiques (formulations mixtes ou semi-formelles). Les travaux de Pennec sont à vocation linguistique et métalinguistique et il n'est pas surprenant qu'elle ait laissé cet aspect des choses de côté ! De plus, il est clair que, compte tenu de ce que nous avons déjà évoqué, un symbole peut avoir un sens lié fortement à l'écriture syntaxique elle-même tout en ayant un référent dans une situation concrète et être simultanément utilisé sur un schéma. L'usage de métaphores et le recours aux reformulations sont donc pratiques quotidiennes en mathématiques. Le contexte d'enseignement CLIL va donc voir la juxtaposition de plusieurs types de reformulations, selon que celles-ci porteront sur la L2 ou sur le contenu spécifiquement mathématique des propositions.

Du point de vue linguistique, la thèse de Pennec apporte un maximum d'éclaircissements sur la notion de reformulation, en insistant sur le fait, entre autres, qu'une reformulation est la reprise d'un contenu propositionnel, contrairement à une simple répétition (celle-ci étant la reprise stricte d'un élément forme).

Le schéma ci-dessous résume les diverses modalités de la reformulation au niveau du discours :

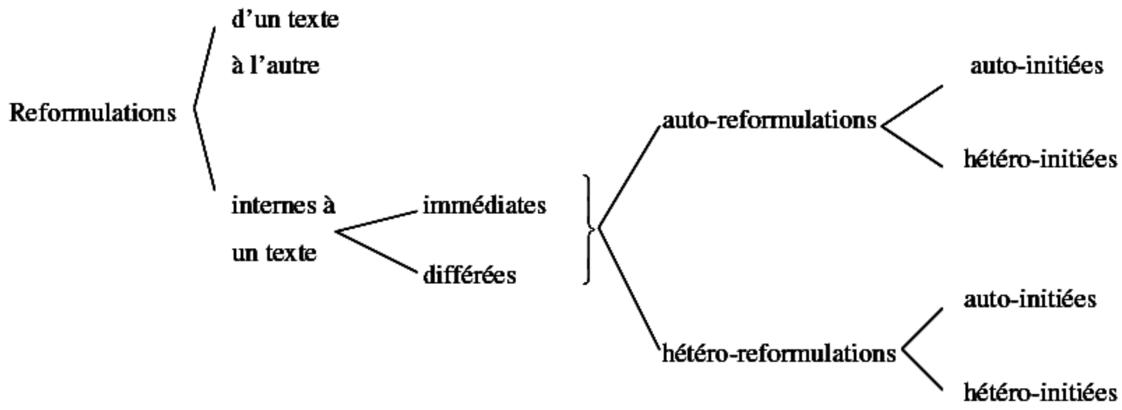


Figure 3.20

Modalités discursives de la reformulation[113]

La paraphrase constitue un type de reformulation. Elle peut être décrite en termes d'équivalence mais pas de synonymie. Pennec rappelle qu'il n'existe pas de vrais synonymes en langue :

> Des synonymes possèdent en effet la même dénotation, tout en présentant des connotations différentes. Prenons par exemple les termes "grin" et "smile" : ils sont reconnus comme synonymes, car ils sont substituables sans que le contenu de l'énoncé soit altéré. Cependant, ils ne peuvent être considérés comme strictement identiques car "grin" évoque un sourire plus large que "smile". Cette impossible identité sémantique est liée à l'une des caractéristiques majeures de la langue : son organisation sous forme de système. Les signes ne se définissent que les uns par rapport aux autres. (Pennec, ibidem, p.39)

Selon Pennec, il existe un seuil de distorsion à partir duquel un énoncé n'est plus perçu comme une reformulation (paraphrastique). C'est le cas lorsque la modification du contenu propositionnel ne présente plus une équivalence assez forte et les segments apparaissent alors comme simplement consécutifs. D'une manière générale, néanmoins, le segment reformulé permet, quels que soient les introducteurs, de reconsidérer le segment source sous un ou plusieurs aspects.

Les modifications de contenu propositionnel, dans la pratique mathématique, sont choses fréquentes. Les discussions sur les objets mathématiques, les tentatives pour les cerner au mieux en en affinant les descriptions et les caractéristiques, ne peuvent manquer d'évoquer les travaux de Sfard sur les modifications discursives au fur et à mesure de l'évolution d'une activité mathématique. Même si la synonymie parfaite n'existe pas, reformuler en recourant aux synonymes permet souvent, par le jeu de l'évocation (au sens où nous l'avons décrit au chapitre 2, c'est-à-dire en rapport avec les diverses notions de représentations) de mieux cerner les concepts.

Les définitions en mathématiques occupent une place essentielle. D'un point de vue linguistique, la définition apparaît comme un procédé parmi plusieurs de reformulation paraphrastique : définir un terme se ramène souvent à décrire les propriétés attachées à la notion. Mais ce n'est pas le seul. La dénomination, par exemple, apparaît comme l'opération inverse de celle qui caractérise la définition. Il y a, dans ce cas, reprise de ce qui vient d'être décrit par un seul vocable. Il ne faut pas oublier non plus l'explicitation. Elle consiste à

[113] Schéma extrait de Pennec (2006)

apporter un complément d'information et de précision et nous savons à quel point ceci est impératif en mathématiques, même si ce procédé n'est pas l'apanage de celle-ci.
Pennec relève une série de traits significatifs quant aux divers modes de reformulation. Il peut s'agir d'une reprise plus conceptualisée du segment initial, d'une récapitulation, d'une synthèse, d'une illustration, d'une interprétation.
A cet égard, et pour éclairer la suite de nos propos, nous rappelons quelques idées essentielles, selon Pennec :

- interpréter consiste à attribuer une signification ;
- illustrer revient à mettre en lumière, par un exemple significatif ;
- synthétiser permet d'exposer, en une qualification totalisante, l'ensemble des points de vue exprimés dans les segments précédents ;
- récapituler consiste à reprendre en énumérant les points principaux ;
- conceptualiser, c'est élaborer des représentations mentales, générales et abstraites.

D'un point de vue didactique, la reformulation occupe une place fondamentale au niveau du discours et des interactions en classe. Elle peut être initiée par l'enseignant lors des phases de négociation de la formulation. Elle se situe dans un espace psychologique partagé dans lequel l'enseignant sera réceptif aux signes que renvoie son auditoire. La reformulation peut dès lors être effectuée en réaction à ces signes ou par anticipation.
Côté élèves, il est clair que l'articulation des segments préconstruits ne repose pas que sur la maîtrise des connecteurs logiques mais est fortement dépendante des capacités de reformulation. Il est donc impératif que l'enseignant soit conscient de cet état de choses afin de proposer, dans les répertoires de formulation actualisés sous forme de documents écrits ou audio, des exemples d'utilisation des marqueurs de reformulation de manière assez fréquente.
L'orientation énonciativiste de la thèse de Pennec donne à ses travaux un regard proche de ce que l'on peut trouver dans les modèles sémantico-conceptuels de la linguistique : on y trouve des descriptions abstraites très fines, notamment quant au rôle fonctionnel des marqueurs dans le discours.
Les traits sémantiques minimaux permettent ici de saisir, au niveau sémantique « presque » pur, le caractère fonctionnel des marqueurs et il revient à l'enseignant de sensibiliser les élèves à ces caractéristiques linguistiques et sémantiques, en liaison avec les conditions ou les possibilités d'utilisation au niveau syntaxique.
Nous proposons ci-après un tableau récapitulatif de la plupart des marqueurs de reformulation étudiés par Pennec avec leurs particularités énonciatives. Il est clair que nous ne pouvons pas rendre compte des analyses fines qu'elle a effectuées dans sa thèse et qui concernent chacun des marqueurs.

reformulation à caractère paraphrastique
in other words, that is, that is to say namely, i.e. l'énonciateur apparaît : "I mean" le co-énonciateur apparaît : "you mean" les séquences apparentées : "it means", "which means", "that means" certains marqueurs ou locutions (tels que "you know", "you see", "or", "well", "yes", "indeed") peuvent être interprétés comme introduisant des reformulations paraphrastiques, bien qu'ils ne soient pas spécifiques de cette opération.

la dimension argumentative : “indeed” la dimension confirmatrice : “yes” et “ok” la justesse en question : “really”, “exactly”, “absolutely"
reformulation à caractère non paraphrastique
“Very” et “much” : l’attribution d’un degré “Really” et “simply” : le recentrage “Extremely” : la surenchère “Too” : l’évaluation négative “I mean” : le « vouloir dire » au service de la rectification “You mean” : le vouloir dire supposé “Well” : un temps d’arrêt “Or” : l’altérité au service de la ré-élaboration “And even” : la surenchère en question “At least” ou l’évocation du minimum L’alternative préférentielle “or rather” L’alternative minorante : “or at least” Les marqueurs de recentrage “In fact” “in point of fact”, “as a matter of fact” et “in actual fact” “in reality” Les marqueurs de synthèse “Altogether” et “on the whole” “all in all”, “all things considered” et “ when all is said and done” “After all” et “finally” Les marqueurs de récapitulation “in brief” et “in a word” “in short”

En conclusion, la reformulation a lieu lorsqu’on souhaite apporter de la précision, atteindre une description plus fine de la réalité ou encore lever des ambiguïtés. Elle sert de repère à l’énonciateur et au co-énonciateur. Elle a lieu dans un espace psychologique où chacun vise une meilleure compréhension de l’objet du discours. Elle permet de déboucher sur, ou se traduit par, des réajustements discursifs. C’est le cas lorsque le locuteur adapte son niveau de langue à son interlocuteur.

Pennec rappelle que :

> Les reformulations participent, en somme, d’un travail de régulation du discours. Ceci s’explique par leur dimension métalangagière : les reformulations sont, en effet, toutes issues d’un regard réflexif porté sur la production discursive antérieure. (Pennec, ibidem, p.328)

Par ailleurs, et à un titre plus qu’anecdotique, loin s’en faut, et en se plaçant à un niveau métaconceptuel, il est clair que le positionnement de notre analyse au niveau de la reformulation résulte d’un choix d’approche parmi d’autres. Nous aurions pu examiner, sur un plan cognitif, les processus de réinterprétation ou la question de l’explicitation en mathématiques. Nous avons fait un choix que nous assumons. Il est motivé par l’accent que nous avons mis sur le discours lui-même. Nous rappelons, au passage, que nous avons déjà

bien abordé par ailleurs la composante cognitive des phénomènes didactiques. En revenant à la notion de délimitation conceptuelle et au caractère inévitablement « fluctuant » de celle-ci, nous mentionnons, pour terminer ce paragraphe, une des remarques finales de Pennec :
Tout en se présentant comme de simples ré-élaborations, de nombreuses reformulations se caractérisent en effet par des rapports extrêmement variés entre les segments source et reformulé. Ce peuvent être : des définitions, des dénominations, des illustrations, des explicitations, des vulgarisations, des confirmations, des justifications, des interprétations, des conceptualisations, des commentaires, des rectifications, des relativisations, des recentrages, des récapitulations, des synthèses. On comprend bien, face à cette grande variété de rapports effectifs entre *S* et *R*[114], l'interrogation de M. Charolles (Charolles 1987, p17) : il remet en question la pertinence même de la catégorie des reformulations, **en raison de contours trop flous**.
Nous insistons à cet égard sur le fait que la notion d'imprécision est liée à un problème plus général de délimitation conceptuelle, de signification d'une catégorie abstraite ou de mot abstrait. Elle est de toute façon incontournable car c'est précisément cette latitude qui permet à toute notion abstraite de pouvoir s'appliquer à des contextes (concrets, semi-concrets ou abstraits) qui, inévitablement, contiennent "du nouveau".

Conclusion du chapitre 3

Nous avons consacré un paragraphe complet à la phraséologie du fait de son importance dans l'enseignement des langues vivantes. D'autres points en rapport avec cette dernière seront également examinés ultérieurement. A ce stade de notre exposé, nous pouvons d'ores et déjà annoncer que la focalisation sur la phraséologie aura été un souci constant au moment de l'élaboration de nos séances expérimentales, comme on pourra le voir sur les documents réalisés, mais aussi tout au long de notre progression. Les apports des linguistes ou pédagogues, quant à l'enseignement de type CLIL, ont également constitué une ressource importante, ce que nous illustrerons lors de la présentation de séances *en amont* (utilisation des techniques de type *consolidating*, *scaffolding*, *warm-up*, *matching*, etc...). Les notions de conceptualisation et d'énonciation prendront également tout leur sens, à l'occasion des séances expérimentales.
Suite aux résultats obtenus dans le chapitre 3, et compte tenu des éléments théoriques que nous venons d'exposer et qui portent sur la phraséologie et les représentations du lexique mental, nous terminerons par des considérations en matière d'enseignement.
Dans un enseignement classique, la perception des signifiés abstraits liés aux objets mathématiques est souvent, voire systématiquement, laissée à la charge des élèves. Il en va de même parfois, mais pas toujours, en cours de langue, pour les signifiés abstraits attachés aux mots de la L2. L'explicitation des sèmes et la prise de conscience de l'oscillation de l'attention, lors des processus cognitifs engagés dans les raisonnements, entre signifiés abstraits et sens référentiels multiples, devrait, selon nous, se voir conférée une place plus importante dans la pratique mathématique. Ceci est d'ailleurs vrai pour les considérations de nature métacognitives de manière plus générale.
Pour les questions de nature linguistique, on peut enfin noter que, dans le cas d'une situation d'immersion linguistique, le degré élevé d'exposition à la langue est ce qui la rend efficace mais les signifiés sont, la plupart du temps, perçus de manière passive.

---

[114] *S* désigne le segment initial et *R* le segment reformulé.

Un enseignement qui prendrait à sa charge l'explicitation des signifiés abstraits, y compris des traits minimaux, c'est-à-dire des sèmes, au moins dans le cas des mots jugés importants, que ce soit pour leur spécificité ou pour la fréquence de leur utilisation, pourrait contrebalancer la faiblesse de l'exposition par une efficacité plus grande lorsque la phraséologie est prise en compte.
La maîtrise de la phraséologie présuppose un effort de mémorisation mais celui-ci est largement valorisé lorsque la perception des nuances de sens, de l'impact des contextes d'emploi est facilitée, ce qui passe selon nous **par une explicitation d'éléments abstraits**.

CHAPITRE 4. LEXIQUE ET SÈMES

Elaborer un lexique phraséologique didactique : un travail en amont sur la base d'analyses sémantiques

I. Sèmes et détermination dynamique du sens

Nous avons montré dans la partie théorique, en associant la dimension cognitive et linguistique, qu'un mot-concept apparaît métaphoriquement comme déclencheur de représentations ou comme point d'attachement à des connaissances mémorisées considérées ou non comme partagées ; et du point de vue sémantique, que la définition d'un objet mathématique colle de très près aux sèmes du mot-concept correspondant. Nous avons, dans la partie théorique également, examiné le cas du mot-concept *fonction*. Nous examinerons le cas d'un concept para-mathématique au chapitre 8 (le mot-concept *preuve*) avec cette fois des considérations fortement didactiques. Le cas du mot-concept *pattern* est très particulier, car, comme nous allons le montrer, ce terme possède de nombreux signifiés et se voit associé à une phraséologie très riche. Le mot-concept *pattern* relève à la fois du lexique mathématique mais peut être envisagé comme concept para-mathématique ou encore comme relevant de domaines extra-mathématiques. Sa richesse sémantique lui confère donc un statut particulier et sa prédestination à un emploi fréquent dans la pratique mathématique mérite un examen minutieux. Les résultats de l'étude de la notion de *pattern* vont être immédiatement réinvestis au sein-même des situations expérimentales (chapitre 5, 6, 7 ; nombres triangulaires, carrés, somme des cubes, etc..).

L'analyse sémantique que nous allons effectuer dans ce chapitre et qui concerne le mot-concept *pattern*, s'apparente à une analyse sémique. Nous insistons sur le fait qu'elle sera réalisée à des fins *didactiques* pour *rendre optimales* les conditions de réalisation de nos séances expérimentales.

L'analyse effective, avant la réalisation des situations proprement dites, n'a pris en compte qu'une partie de la phraséologie recensée dans ce chapitre. Ce type d'analyse représente un travail qui nous a semblé nécessaire pour illustrer ce qui peut, ou devrait selon nous, être effectué en amont de la réalisation de situations intégrées. Notre objectif est de coller au plus près du sens de *pattern* en prenant en considération toute la richesse sémantique, lexicale et phraséologique du, et autour, du mot-concept.

A titre indicatif, nous rappelons ou précisons qu'une analyse sémique poussée correspond à une décomposition du sens d'un mot en unités de sens élémentaires. Le sème est une **unité minimale de signification**. On l'appelle aussi **trait sémantique** ou encore **trait sémantique minimal**. Un sème est tel que les seules valeurs possibles sont : positif(+), négatif (-) ou sans objet ($\pm$).En informatique, le sème correspondrait à une variable booléenne.

Nous donnons ci-après un exemple du champ sémantique du terme [siège] avec une récapitulation dans un tableau des traits définitoires et de leurs valeurs concernant les termes du champ relatif au mot-concept [siège].

	siège	long	à dossier	à pieds	à bras	pour plusieurs personnes	peut servir de lit
banc	+	+	±	+	±	+	–
canapé	+	+	+	+	±	+	+
chaise	+	–	+	+	–	–	–
divan	+	+	–	+	–	+	+
fauteuil	+	–	+	+	+	–	–
tabouret	+	–	–	+	–	–	–

Tableau 3.1 : analyse sémique de plusieurs mots du champ sémantique de [*siège*]

Ce tableau peut ensuite être restreint en fixant pour chaque terme du champ lexical le minimum de traits indispensables pour le différencier de tous les autres[115].
Des considérations plus précises du strict point de vue de la sémantique lexicale sont possibles si l'on rapporte les sèmes aux autres concepts, à savoir ceux de sémantème et de virtuème[116] :

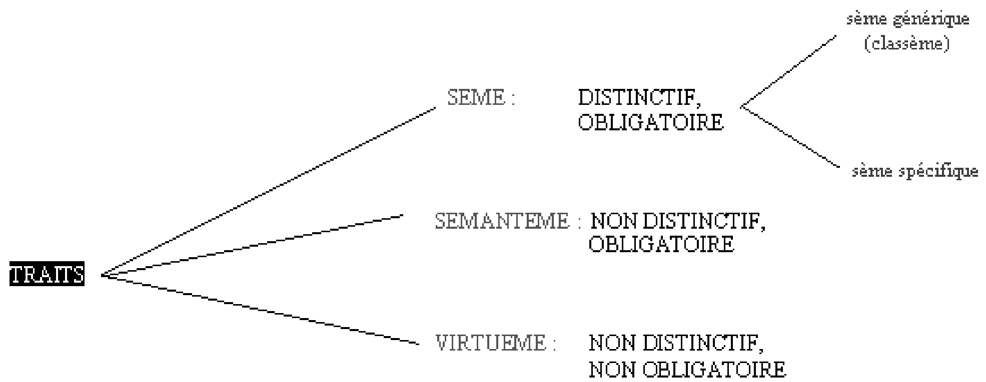


Figure 4.1 les traits sémantiques

On peut ainsi mieux situer ces concepts à travers un exemple (ibid) :

> Masque : objet qui cache le visage lors de fêtes costumées
> - objet non animé (classème)
> - qui cache les yeux (sème spécifique)
> - et qui cache le visage (sémantème)
> - lors de fêtes costumées (virtuème)

Nous précisons ci-après, toujours en référence au site linguistes.com, la notion de classème et de traits distinctifs d'un mot-concept :

> Seuls les traits distinctifs feront l'objet d'une analyse sémique en relation avec un champ sémantique d'unités. Les traits non distinctifs renvoient à la référence dans le monde et non plus à un champ d'unités linguistiques.

---

[115] Le lecteur trouvera une analyse complète et une présentation par arbre à l'adresse suivante : http://www.home.uni-osnabrueck.de/bschwisc/archives/champ.pdf
[116] Figure extraite du site linguistes.com
http://www.linguistes.com/mots/lexique.html

Les **classèmes** sont les sèmes distinctifs et obligatoires qui consistent en une particule de sens fondamentale.

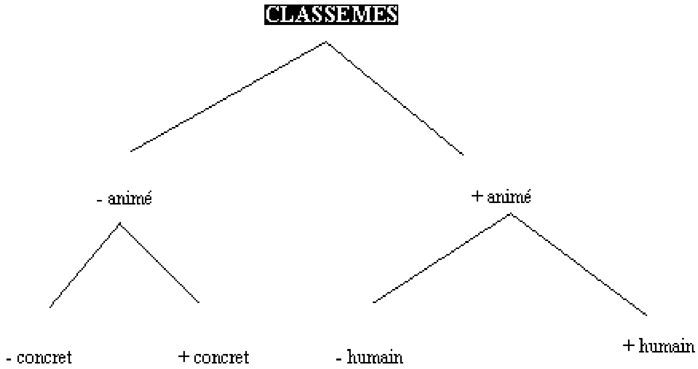


Figure 4.2 : les classèmes (ibid)

Un sémème appartient toujours à un champ lexical. C'est-à-dire qu'il est apparenté sémantiquement à d'autres unités lexicales. Par exemple, le lexème père fera partie du même champ lexical que mère, fils, cousin...

Comme on peut le constater sur les exemples précédents, la plupart des exemples d'analyses sémiques destinées à l'exemplification des concepts concernent des mots *concrets*.

La difficulté est d'évaluer les sèmes pour un terme abstrait. Dans le cas de *pattern*, à côté des sèmes de *forme*, de *motif*, de *règle*, etc…, le sème de *structure*, dans son rapport au champ conceptuel des mathématiques (lecture des sèmes selon un filtre conceptuel), et à un niveau élevé de généralité dans les catégories, fait indéniablement apparaître ce dernier comme un *virtuème* dans l'absolu, c'est-à-dire lorsque *pattern* est appréhendé sans rapport exclusif au champ disciplinaire des mathématiques.

Les questions de signification nous ont conduit à aborder la question de synonymie et de polysémie. L'exemple ci-dessous est donc intéressant pour mettre en relief le fait que la synonymie au sens courant est appréhendée d'un point de vue sémantique théorique de manière ciblée et fonctionnelle, c'est-à-dire en rapport direct à une identification préalable des sèmes :

<table>
<tr><td colspan="2">Il s'agit de co-hyponymes qui peuvent se commuter dans un même contexte sur l'axe syntagmatique et qui ont un nombre important de sèmes en commun. C'est le cas pour élève et étudiant :
SÈME</td><td>humain</td><td>en apprentissage</td><td>dans une institution scolaire</td><td>dans un établissement d'études supérieures</td></tr>
<tr><td rowspan="2">**SÉMÈME**</td><td>élève</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td></tr>
<tr><td>étudiant</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td></tr>
</table>

Figure 4.3 : synonymie et sèmes

Les auteurs du site rappellent que :

> Cependant, il est très rare de trouver une synonymie totale de deux termes à l'intérieur d'une langue. Si cela arrive, on a généralement affaire à des différences de registres avec des implications sociolinguistiques. C'est le cas pour "chaussures" et "godasses" qui disposent des mêmes sèmes. Cependant le second sera **ressenti**[117] comme relevant d'un registre familier.

Nous avons souligné le terme *ressenti* car cette utilisation naturelle du terme dans la description des auteurs n'est pas en revanche un fait anodin pour nos propos. Le fait de percevoir les nuances de sens repose, pour nous, sur une *capacité sémantique* et mobilise à la fois sens et sensation de manière subtile, presque non dissociée, lorsque l'individu effectue un processus interprétatif visant l'identification des contenus sémantiques pour eux-mêmes.
Toujours sur le même site, les auteurs précisent :

> C'est la mise en discours qui permettra de désambiguïser et de rendre les unités lexicales monosémiques. De polysémique en langue, le lexème devient monosémique en parole

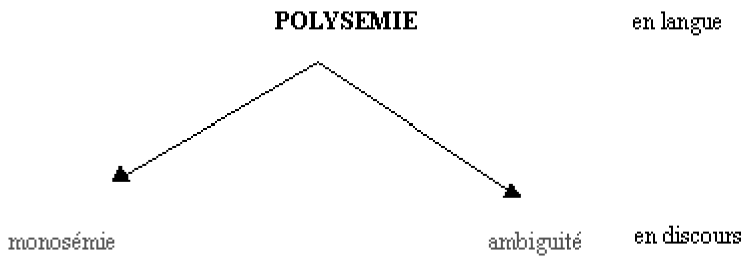


Figure 4.4 sèmes et discours

Comme nous l'avons laissé entendre sur un exemple, dans le cas d'un mot abstrait, la notion de définition sémique est sujette à d'autres problèmes définitoires : l'explicitation sémique d'un mot-concept *abstrait* dépend fortement du *filtre de signifiance adopté* et ce dernier dépend lui-même du *niveau de généralité* où l'on se place pour appréhender le mot-concept. Dans le cas du virtuème de *structure* pour le mot *pattern*, le filtre est celui qui résulte d'un *point de vue* relativement, c'est-à-dire en provenance d'un champ sémantique (en l'occurrence celui des mathématiques). Comme nous le verrons dans le cas du mot-concept *gnomon*, ce mot-concept participe à la fois du concret et de l'abstrait ; posant au passage un problème pour le classer selon une ontologie. C'est tout d'abord une *forme particulière*, donc un *pattern*, mais il est ensuite appréhendé selon un principe d'extension, en tant que véritable *objet mathématique* cette fois. Le gnomon repose donc sur les sèmes de *forme*, de *règle*, d'*extension* mais aussi de *principe*, etc… On remarquera au passage que d'un point de vue de délimitation sémique, si l'on se focalise maintenant sur *forme* et *règle*, on peut vite percevoir que l'énoncé d'une règle implique une *forme* langagière ou une *forme* mathématique (au sens de *formel*), ce qui illustre d'ailleurs en passant le principe d'indétermination sémantique.
Si la notion de gnomon est maintenant envisagée localement selon un autre filtre, en ce qui concerne par exemple non plus le point de vue général en lui-même mais ses *modalités*, on sera conduit à nuancer ou modifier l'explicitation sémique relativement à d'autres notions semi-abstraites elles aussi: *constitution*, *construction* et *représentation* (voir aussi chapitre 8, III.2.c. pour une mise en pratique de ces considérations théoriques). Il s'agit de modalités

[117] C'est nous qui soulignons.

d'appréhension de l'objet gnomon et elles permettent donc de formuler l'explicitation de ses signifiés sous forme articulée, c'est-à-dire au travers d'une définition précise.
Dans la suite (chapitre 5), on verra que l'objet *gnomon* repose, dans sa définition, sur les sèmes précédemment cités et qu'il peut être décrit selon le filtre proposé, de la manière suivante :

> *agencement,* (physiquement) *constitué* de cubes-unités disposés en *forme* de L, (concrètement) *construit* par mise-à-plat des cubes, et *représentable* dans le registre schématique (induisant ainsi un caractère *schématique* à la nouvelle *constitution*), voire transposable (par conversion) vers le registre algébrique, à partir du principe (abstrait) qui le sous-tend (et qui implique à la fois la forme et la disposition des entités qui le constituent originellement au niveau matériel).

La définition d'un objet articule donc *de façon dynamique* les éléments lexicaux retenus comme points de fixation sémantique pour les sèmes eux-mêmes et des modalités qui peuvent varier, du point de vue du filtre catégoriel sous-jacent, ou dans le choix des termes ou des segments préconstruits retenus comme points de fixation lexicale des modalités elles-mêmes ; et éventuellement vis-à-vis d'autres pôles d'appréhension sémantique, définis par des prédicats tels que *abstrait*, *concret*, *physique*, etc…

Notre problématique étant didactique (dans les deux dimensions, mathématique et linguistique), notre travail doit se placer dans le cadre d'une exploitation optimale des ressources lexicales en nous référant ponctuellement à la sémantique lexicale. Nous essaierons néanmoins d'aller jusqu'à la recherche des traits sémantiques minimaux. Nous ferons également allusion, mais de manière très brève, au cas de *match, fit, number*. D'autres éléments très significatifs et de portée plus large sont apparus par la suite. Nous les avons évoqués et y ferons allusion dans la conclusion de la partie expérimentale.
La problématique de l'intégration, et dont il sera question ici, portera donc sur des éléments de nature linguistique (le lexique et la phraséologie) et conceptuelle. Elle concerne une démarche visant à intégrer un certain nombre d'éléments théoriques que nous avons exposés et détaillés, afin d'éclairer ce que peut recouvrir l'idée d'intégration au niveau de la didactique des mathématiques en contexte CLIL. Elle s'appuie sur une analyse de nature sémantique et il est question d'illustrer l'impact que pourrait avoir une perception fine du sens d'un terme en L2 n'ayant pas d'équivalent en L1 quant à l'élaboration de séances pour lesquelles il constitue un terme central au niveau langagier mais surtout conceptuel[118]. Après avoir cerné au plus près le mot-concept *pattern*, il conviendra de montrer quelles sont les ressources disponibles pour élaborer un répertoire phraséologique autour de *pattern* et comment discriminer parmi les expressions recensées celles que l'on retiendra pour nos séances sans perdre de vue qu'une représentation cognitive autour d'un mot-concept se doit d'être construite également dans une perspective transversale (et notamment culturelle).

II. Ressources lexicales, bases de données et analyse sémique

Etant donné que l'un des objectifs de plusieurs séances expérimentales est de maîtriser conceptuellement et linguistiquement (sémantiquement) la notion de *pattern*, nous nous proposons d'entreprendre, dans ce paragraphe, une analyse sémantique puis une recherche phraséologique du terme *pattern*, mais à des fins didactiques.

[118] Ceci concernera à la fois les productions écrites et orales.

En tant qu'item lexical, le terme *pattern* va se retrouver au sein d'un grand nombre de collocations rattachées à des domaines que nous allons spécifier.
En terme de recouvrement conceptuel, le concept de *pattern* recouvre plusieurs concepts en L1 mais il ne lui correspond pas de terme unique ou en tout cas suffisamment proche d'un point de vue conceptuel avec lequel il entretiendrait une représentation partagée (au niveau sémantique) suffisamment large.
Nous examinerons donc en détail les items lexicaux en L1 que l'on peut rattacher à *pattern* (à travers les diverses traductions possibles) et nous étudierons les types de contextes fréquemment rencontrés et impliquant ces items ainsi que la phraséologie (en L2, cette fois-ci) qui les accompagne.
Dans la mesure où *pattern* est fortement attaché à la pratique mathématique, et vu notre problématique, nous examinerons les points que nous venons d'évoquer en rapport avec le domaine mathématique puis avec les domaines connexes tels que la physique, la chimie, l'informatique et enfin avec des domaines plus éloignés.
Les questions (d'ordre didactique) qui nous intéressent sont les suivantes :

- Quelles expressions phraséologiques devrait-on légitimement présenter aux élèves du point de vue de l'exposition à la langue (écrite ou orale) et du point de vue des connaissances visées (linguistiques et conceptuelles) relativement à une séquence d'enseignement ? Il est clair que dans ce cas, ces connaissances devraient donner lieu à une consolidation (production de documents écrits supplémentaires, illustrations liées à des micro-contextes centrés sur les mathématiques ou d'autres domaines).
- Comment faire en sorte que les élèves appréhendent au mieux le concept de pattern ? Comment présenter les traits caractéristiques de ce concept extrêmement riche (il permet de balayer un large éventail de la réalité sensible et/ou conceptualisée) si l'on tient compte de ses caractéristiques non spécifiquement mathématiques ? Jusqu'à quel point doit-on aller du point de vue de la transversalité disciplinaire et du point de vue des caractéristiques socio-culturelles ?

Nous rappelons au lecteur que nous sommes en train d'illustrer, au passage, à travers notre démarche elle-même, les recherches lexicales nécessaires à l'élaboration effective d'un répertoire lexical et phraséologique dans une perspective d'intégration. L'étude sera ainsi davantage focalisée sur les dimensions conceptuelle et linguistique que ce qui se passe dans la pratique en contexte d'enseignement de type CLIL (et relativement à la DNL mathématiques).
En ce qui concerne le concept de *pattern*, on peut entendre concept en un sens cognitif, c'est-à-dire rattaché à la représentation cognitive d'un individu. S'il est natif, et si l'on se réfère à la représentation cognitive comme étant une représentation partagée, le terme de *pattern* évoquera un ensemble de traits caractéristiques que le natif sera fortement susceptible de percevoir, consciemment ou inconsciemment, en étant capable de les expliciter, à sa manière, ou en les saisissant au niveau purement conceptuel. Les ressources que nous allons utiliser participent, quant à elles, de la lexicographie, de la phraséologie et de l'analyse de corpus. Les analyses et les traitements qu'elles impliquent en arrière-plan ont permis de recenser et récapituler ces traits sémantiques pour conduire à la production de classements lexicaux parfois originaux (constitution de synsets relatifs à un terme dans le cas de WordNet). Elles vont permettre de recenser les diverses acceptions du terme, proposer une large gamme d'expressions phraséologiques en spécifiant les types de contextes associés.
Dans un premier temps, nous ferons appel à plusieurs dictionnaires et à quelques ressources lexicales disponibles en ligne telles que le logiciel WordNet.

Puis nous examinerons l'intersection de *pattern* avec plusieurs champs sémantiques. Et enfin, nous regarderons en détail les expressions phraséologiques relatives à pattern et son utilisation dans des contextes d'utilisation mathématique ou en tout cas portant sur des thèmes très proches de celui des mathématiques (logique, schématisation, etc...).
A cet égard, nous proposons ci-après quelques informations obtenues avec le logiciel WordNet.
WordNet constitue une ressource lexico-phraséologique et sémantique monolingue très riche. Il s'agit d'une base de données lexicale produite par l'université de Princeton (laboratoire des sciences cognitives).
Sa conception repose sur des analyses sémantiques très poussées et nous ne discuterons pas ici des questions pointues concernant la lexicographie.
Néanmoins, le lecteur trouvera, en référence au terme de *pattern* (entre autres), une très grande variété de renseignements concernant par exemple les *synsets*, pour ne citer que ces éléments, relatifs à ce concept.
Un synset (synonym set) est un **groupe de mots interchangeables** (dans certains contextes) et dont la caractéristique commune est de dénoter un sens ou un usage particulier.
Comme on pourra le voir ci-après, nous utiliserons directement le cas de *pattern* afin d'*exemplifier ce principe de classement* où les plus petites unités (« les atomes ») sont des synsets.

Ainsi, les synsets fournis par la base de données WordNet en rapport avec *pattern* sont les suivants :

- [form, shape, pattern],
- [practice, pattern],
- [design, pattern, figure],
- [convention, normal, pattern, rule, formula],
- [blueprint, design, pattern],
- [traffic pattern, approach pattern, pattern],
- [radiation pattern, radiation diagram, pattern]

Comme on peut le constater, ils permettent déjà en soi de pré-construire (dans une perspective d'apprentissage de la L2) une représentation cognitive autour du concept de *pattern*[119].

[119] WordNet fournit un autre synset où *pattern* apparaît isolément.
Il s'agit d'un emploi spécifique avec le sens de : a model considered worthy of imitation
"The American constitution has provided a pattern for many republics."

Chaque synset dénote une **acception** différente du mot *pattern*. Celle-ci est **décrite par une brève définition.** Ci-contre, une copie d'écran relative à l'affichage des (premières) données lexicales et sémantiques relatives à la recherche sous WordNet de *pattern.*

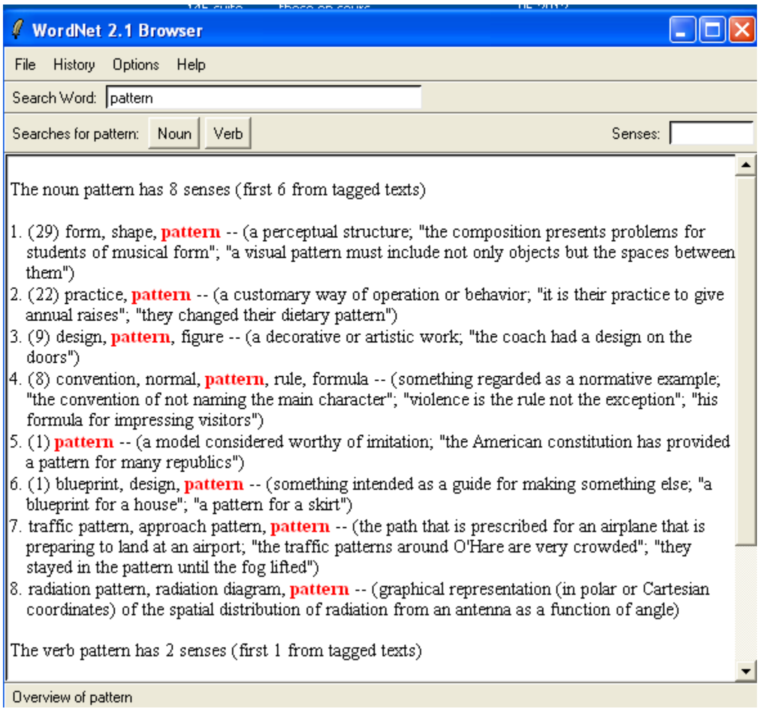


Figure 4.5 : les synsets du mot *pattern* (logiciel WordNet)

Sans entrer trop en détail dans des questions techniques, nous détaillons le principe de catégorisation sémantique sous-jacent à cette base de données[120].

Les synsets *peuvent aussi* (c'est une autre fonction de l'outil WordNet) *représenter des concepts plus abstraits*, de plus haut niveau que les mots et leur sens. WordNet fait ainsi apparaître une organisation (hiérarchique) *sous forme d'ontologies*.

Signalons que le terme d'ontologie qui est utilisé ici, trouve son sens, en quelque sorte, par le fait que l'unité la plus haute dans la hiérarchie conceptuelle est l'**entité** (« entity, something »).

Nous proposons à titre d'exemple, une copie d'écran correspondant au premier sens du concept de *pattern* que WordNet fournit relativement à cette hiérarchie conceptuelle que nous venons d'évoquer :

Sense 1

form, shape, **pattern** -- (a perceptual structure; "the composition presents problems for students of musical form"; "a visual pattern must include not only objects but the spaces between them")

=> structure -- (the complex composition of knowledge as elements and their combinations; "his lectures have no structure")

=> cognition, knowledge, noesis -- (the psychological result of perception and learning and reasoning)

=> psychological feature -- (a feature of the mental life of a living organism)

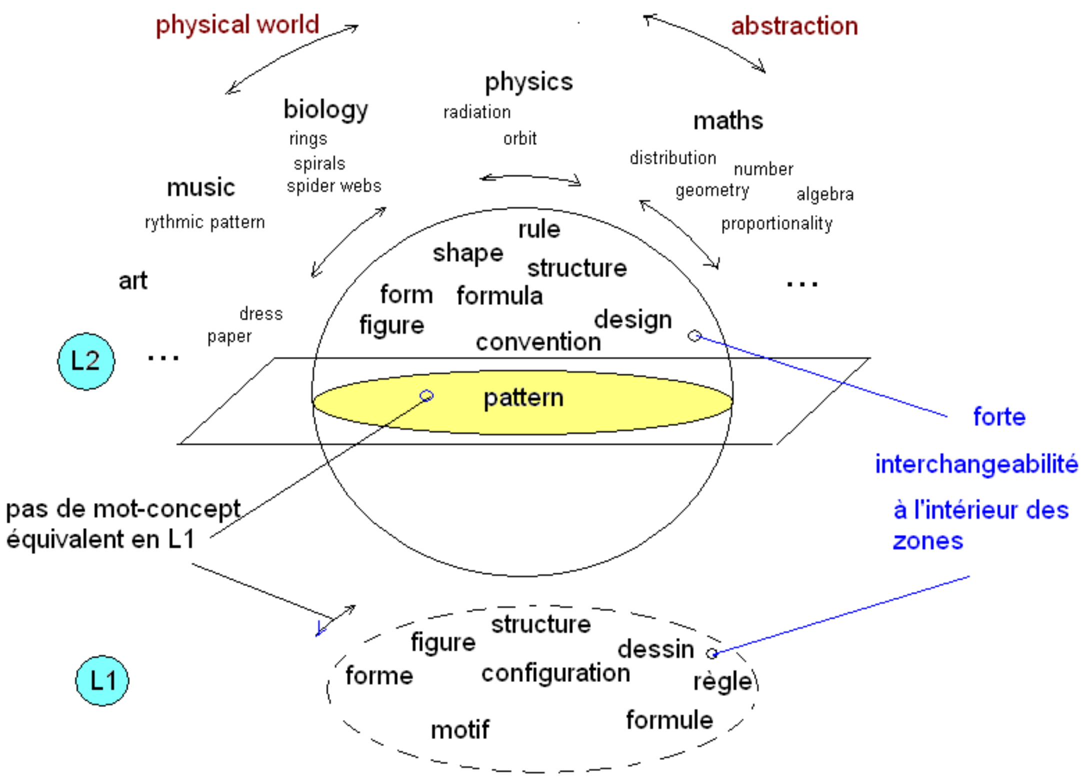
=> abstraction -- (a general concept formed by extracting common features from specific examples)

=> abstract entity -- (an entity that exists only abstractly)

=> entity -- (that which is perceived or known or inferred to have its own distinct existence (living or nonliving))

[120] L'utilisation de WordNet avec des élèves à travers une séance à focalisation linguistique est une possibilité intéressante selon nous.

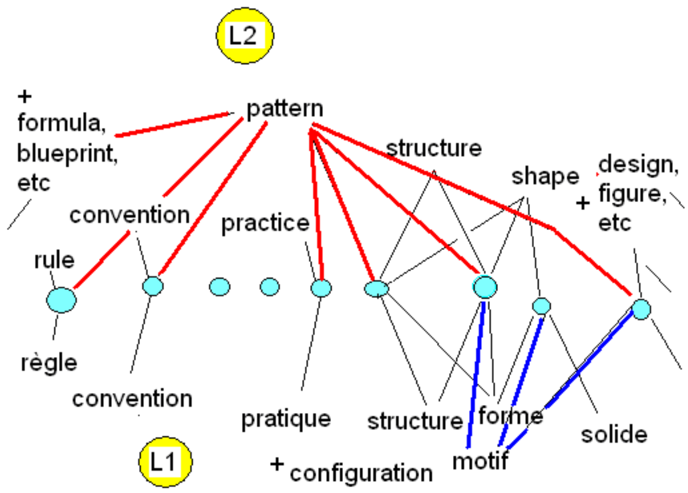
Pour l'instant, les données que nous pouvons obtenir avec WordNet (mais que nous ne pouvons pas énumérer, faute de place) nous permettent de faire le point, indépendamment, pour l'instant, des questions d'ordre phraséologique.
Nous avons rassemblé les synonymes de chacune des listes de synsets et nous avons tenu compte des informations concernant les catégorisations ontologiques ainsi que des thèmes correspondants pour élaborer un schéma (voir ci-dessous, figure 4.6). Il permet de se rendre compte de l'importance de ce concept dans la L2 et surtout de constater que pattern n'a pas, en tant que mot-concept, d'équivalent unique.
Ceci est important, notamment pour un terme tel que celui-là, car il évoque bien plus de choses chez un natif anglophone que n'importe lequel de la liste des items-L1 candidats (partiels) à une traduction ne le fera pour un francophone. Il conviendra dans la suite de cerner au mieux les caractéristiques associées à *pattern*.
Une telle figure tient lieu de méta-représentation conceptuelle. Elle permet d'illustrer un certain nombre de caractéristiques linguistiques attachées à la représentation cognitive d'un individu qui serait **considéré dans l'idéal** comme bilingue. Ces caractéristiques, qui s'actualisent sous formes de mots écrits sur la représentation, sont censées renvoyer à une série d'éléments cognitifs (et représentationnels) non représentés ici et dont nous avons déjà parlé (ceux que vont représenter eux-mêmes, du point de vue de l'évocation, chacun des synonymes potentiels de *pattern,* ces synonymes étant situés à l'intérieur du cercle sur le schéma.



Pas de candidat unique en L1 pour une traduction de *pattern*

Figure 4.6

Néanmoins, interprétés comme éléments lexicaux à retenir pour un apprentissage, les items apparaissant sur la figure et les catégories hyperonymiques, figurant à l'extérieur du cercle, sont autant d'éléments d'une représentation cognitive à construire, en tenant compte du retour réflexif qu'elle implique et qui nous paraît nécessaire.
Par ailleurs, la disposition circulaire, à l'intérieur de laquelle sont regroupés les synonymes de *pattern*, mais sans faire apparaître les synsets correspondants, est volontaire. Elle permet une visualisation et une actualisation schématique, au niveau lexical certes, des éléments attachés *au noyau dur* de représentation du concept (au sens cognitif et représentationnel) de *pattern*.
Autre chose encore : la catégorisation[121] sous forme de dualités du type abstrait / concret ou de distinctions du type mathématique, biologique, physique etc…, ne se justifie que comme interprétation la plus fréquente et uniquement à un niveau global, sans référence à une quelconque contextualisation ou situation spécifique, particulière. Dans la pratique, c'est la focalisation (au niveau conceptuel et cognitif) sur certaines facettes des « *choses* », de manière générale, qui permettra de leur attribuer un caractère concret ou abstrait, psychologique ou physique, matériel ou idéal etc…, comme nous le verrons dans les chapitres suivants, à propos des nombres figurés, entre autres exemples.
Sur le schéma qui va suivre, nous insisterons, cette fois-ci, sur les traits sémantiques, éléments que nous n'avons pas fait figurer sur la figure précédente.
Ainsi donc, à partir de diverses ressources lexicales (dictionnaires phraséologiques, analogiques, bases de données lexicales, en ligne), nous pouvons, en croisant les résultats obtenus, proposer une représentation (partielle[122]) des *traits sémantiques* liant le concept de pattern aux items lexicaux correspondants en L1. Nous nous inspirons pour cela de l'exemple proposé par Prince dans (Prince 1998).



Le mot-concept [pattern] et les items lexicaux de la L1 correspondants

Quelques traits sémantiques

Figure 4.7

Ceci n'illustre qu'une partie de la puissance évocatrice du concept de *pattern* (pour un natif anglophone) et laisse pourtant déjà apparaître un grand nombre d'items en L1 candidats pour

[121] En haut, sur la figure 5.2
[122] Compte tenu de la place disponible mais aussi de notre problématique générale

une traduction. Pourtant nous tenons là un élément important en matière d'apprentissage linguistique.
En effet, le natif (en l'occurrence anglophone) élabore naturellement une représentation autour de la notion de *pattern,* par la fréquentation régulière avec ce terme en liaison avec une grande majorité de contextes d'emploi, contextes qu'il sait également reconnaître par habitude. Le natif est capable d'évoquer, selon le niveau de maîtrise de sa propre langue (la L2), un grand nombre de facettes ou de traits caractéristiques qui sont en fait autant d'éléments attachés à sa représentation cognitive. Le concept associé à un terme aussi fréquemment employé est donc, compte tenu de ce que nous venons de décrire, à rapprocher de l'idée de concept quotidien ou spontané au sens de Vygotski, tandis que les concepts scientifiques résultent quant à eux d'une construction volontaire, motivée, avec l'intention manifeste de les rattacher à un ensemble plus vaste et structuré de connaissances scientifiques. Ces dernières sont des représentations moins subjectives et reposent en grande partie sur une co-construction avec les détenteurs du savoir savant et/ou sur la base de ressources didactiques ou académiques. A cet égard, le modèle de la TSD va nous permettre de mettre en place des ingénieries qui permettront l'émergence de connaissances particulières dès les phases adidactiques et qui se prolongeront en phases d'institutionnalisation par des connaissances inscriptibles dans le répertoire didactique de la classe. Nous détaillerons au chapitre 5 l'ensemble des conditions qui permettront à ces connaissances d'émerger, puis de se consolider lors de la réalisation des situations expérimentales. Pour l'instant, nous nous focalisons sur le lexique, la phraséologie et la composante sémantique d'un mot-concept emblématique, à savoir celui de *pattern*.
Qu'en est-il de la représentation cognitive de l'apprenant de la L2 ?
Plusieurs cas de figure sont possibles. Si l'apprenant séjourne pour une longue durée dans un pays anglophone, ce que nous venons d'évoquer va s'appliquer et des éléments spontanés, formés suite à un contact répété avec la L2, vont venir s'ajouter à une sorte de pré-représentation qu'il aurait commencé à élaborer au travers d'un apprentissage scolaire classique. Si l'apprenant ne bénéficie pas d'une possibilité d'exposition à la L2 élevée, il lui faudra construire sa propre représentation, à la manière où on construit une représentation autour d'une connaissance scientifique liée à une notion particulière.
Cette construction sera d'autant plus efficace qu'il prendra conscience des traits caractéristiques liés à la notion de *pattern.* Parmi eux figurent ceux qui se dirigent vers les items lexicaux candidats à une traduction (nous en avons mentionnés quelques-uns). Mais il y en a bien d'autres. Ce sont ceux qui seraient associés aux mots-thèmes, mots qui renvoient sémantiquement et de manière classificatoire aux thèmes qui vont impliquer l'idée de *pattern*. Or ces traits sont, selon nous, précisément les traits sémantiques que le concept partage avec d'autres items lexicaux qui ne sont plus des candidats à la traduction. Il s'agit de tous les mots-clés autour desquels se délimite la notion de pattern. Le cas du mot-concept *sequence* (L2) (ou *suite,* en L1) en est un exemple[123]. Les suites donnent lieu à toute une série de *patterns* particuliers, et ce, à divers niveau de généralité.

[123] Nous signalons ici-même une occurrence dans le discours théorique sur les mots-concepts lorsqu'on les envisage relativement à deux langues (L1 et L2) du point de vue lexical et sémantique. Le non recouvrement sémantique des termes *sequence* et *suite* nous oblige à laisser à la charge du lecteur le soin de prendre en considération les signifiés implicites mobilisés dans la formulation (*suite* ou *sequence* au sens mathématique dans le cas de l'exemple choisi). L'exemple de pattern est encore plus marquant car il n'a pas de correspondant unique dont le sens sur lequel l'auteur voudrait implicitement se fixer serait déductible d'après le contexte.

C'est ici que les ressources lexicales et phraséologiques peuvent jouer leur rôle. Il conviendra à l'enseignant de faire en sorte que ses élèves développent une conscience linguistique réfléchie, qu'ils développent **une capacité de reconnaissance des contextes d'emploi relatifs à une notion**, en l'occurrence celle de *pattern*. N'oublions pas que c'est linguistiquement que ces contextes seront décrits. Il s'agira donc pour l'enseignant de trouver les mots justes pour les décrire.

Une conscience linguistique élevée de ces phénomènes semble être un pré-requis fondamental, un autre consiste à adapter sa formulation à son public et il est de l'ordre de la pédagogie, dans un sens analogue à celui où on parle de grammaire pédagogique ou scolaire.

Par ailleurs, il est clair que l'on peut résumer nos propos en disant qu'il est indispensable d'avoir présent à l'esprit *qu'un mot doit être proposé avec ses tournures collocatives mais aussi qu'une structure collocative correspond à un contexte d'emploi spécifique.*

Mais revenons aux notions impliquées par l'idée de pattern. Quelles sont-elles ? Ou encore, qu'est-ce que le mot *pattern* est censé évoquer pour un natif anglophone?

Les ressources phraséologiques sont ici d'une grande utilité. Nous nous sommes appuyés sur plusieurs dictionnaires en ligne (Linguee, Wordreference, Larousse, Visuword, Oxford Collocations Dictionary for Students, Visualthesaurus).

Nous proposons ci-après quelques copies d'écran obtenues à partir du dictionnaire Visuword.

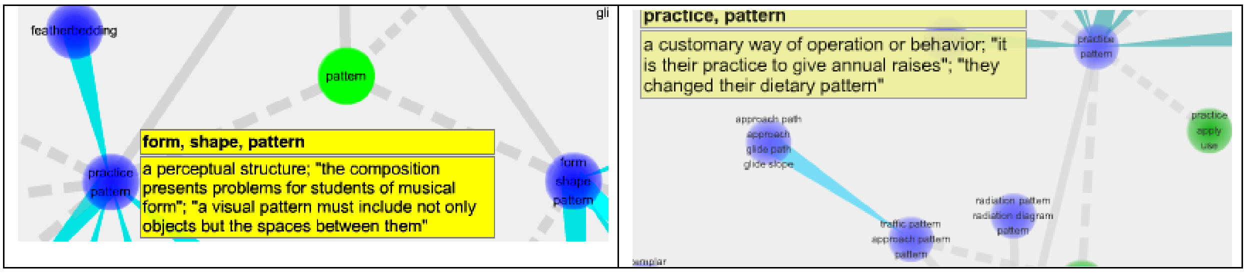


Figure 4.8 : quelques nœuds sémantiques de *pattern* (dictionnaire Visuword)

Au-delà de son caractère convivial et original, le dictionnaire *visuwords* constitue une ressource intéressante pour la phraséologie. Les stuctures phraséologiques (combinaisons de mots du type collocations) apparaissent en lien direct avec les nœuds sémantiques du réseau (voir ci-dessus). Il suffit de cliquer sur un des nœuds pour faire apparaître les renseignements d'ordre définitoire ou phraséologique.

Dans ce qui suit, nous avons schématisé les sens de *pattern* selon un modèle particulier, en nous inspirant de stravaux de Mazaleyrat (2010a, p 315 et suivantes) à propos de l'analyse sémantico-conceptuelle qu'elle a effectué à propos du terme-concept *curieux*.

Ce schéma, compte tenu de la richesse sémantique du mot-concept *pattern*, sera donc plus conséquent (figure 4.9, ci-après).

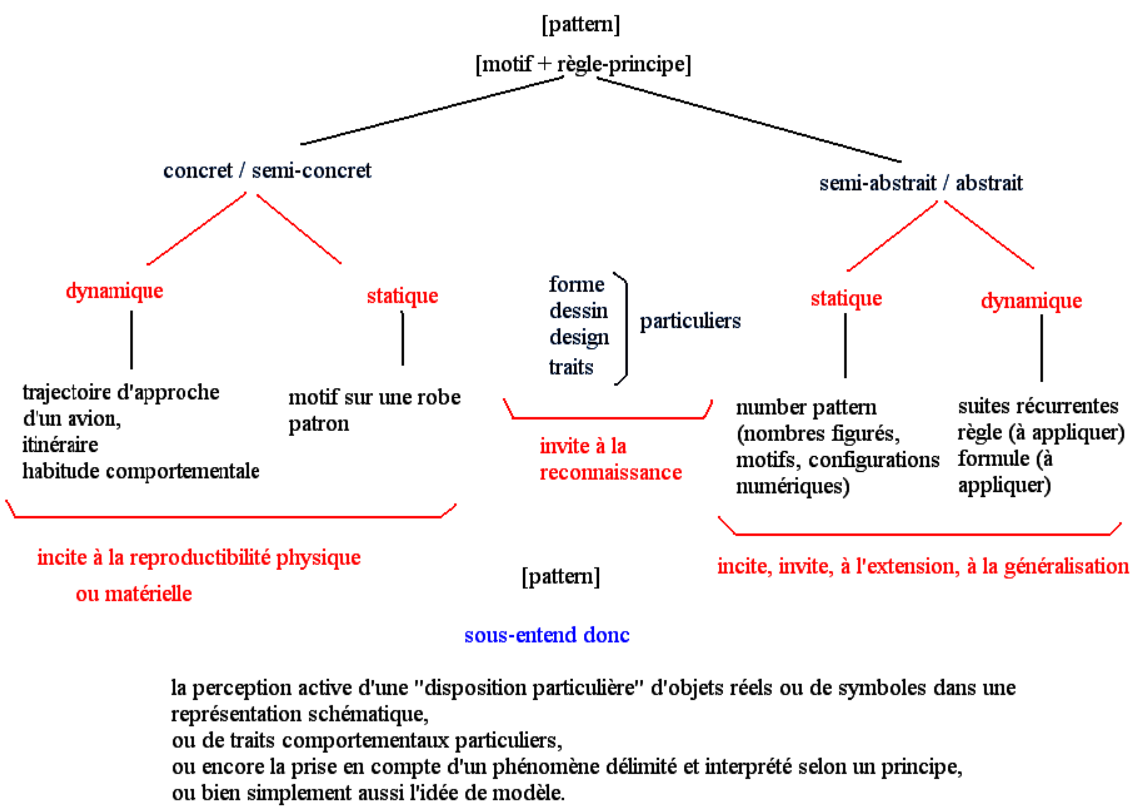


Figure 4.9 : caractéristiques sémantiques du mot-concept [pattern]

Par ailleurs, une analyse diachronique du mot *pattern* permet d'apporter un regard complémentaire, comme on pourra le voir plus loin sur la figure 4.11.

Dans le cas de l'adjectif [curieux], Mazaleyrat avait procédé de la manière suivante :

> Les sens actuels de *curieux* sont le résultat d'une évolution bidirectionnelle de la sémantique de cet adjectif. En révélant qu'ils sont issus d'un même étymon (*curiosus*), l'analyse diachronique indique ainsi qu'ils sont génétiquement reliés. Afin de conclure à la polysémie de *curieux*, nous allons nous placer dans une perspective synchronique puisqu'il reste à déterminer si ses sens ont également reliés sémantiquement.

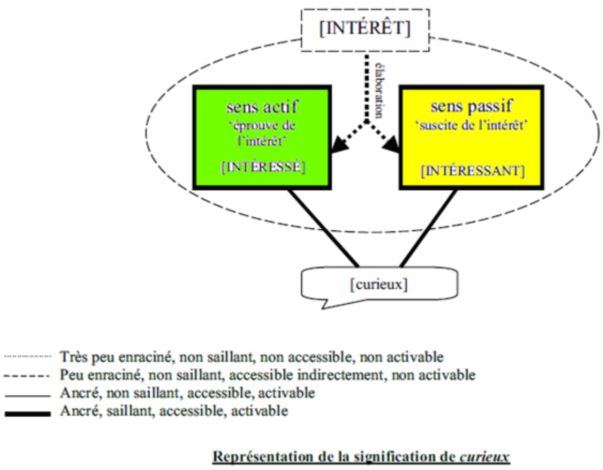


Figure 4.10 : extrait de Mazaleyrat (2010a)

Mazaleyrat, dont les travaux portent sur la polysémie, donne des définitions qu'elle emprunte à plusieurs chercheurs :

> un mot polysémique (un polysème) est un mot qui rassemble plusieurs sens entre lesquels les usagers peuvent percevoir un lien (Nyckees, 1998)

Nous considérons que la notion de *lien* n'implique pas l'étendue. Elle discrétise les pôles sémiques dans ce que nous avons décrit comme une *massivité* du sens. Pourtant, involontairement ou inconsciemment, Nyckees invite à décrire la perception sémantique dans le réseau de signification comme un parcours entre des points de localisation sémantiques mais en quelque sorte d'une manière trop dirigée d'un point à l'autre : *sens entre lesquels les usagers peuvent percevoir un lien*. Nous considérons que le *lien* est une description trop discrétisée en *points de signification* mais que le caractère d'*étendue* permet de voyager entre les zones sans se fixer sur le lien, qui est souvent appréhendé de manière trop *linéaire*.
Un peu avant, Mazaleyrat ajoute une autre définition :

> Rappelons que d'après G. Kleiber (1999, p55), la polysémie caractérise:
>
> (i) une pluralité de sens liée à une seule forme,
>
> (ii) des sens qui ne paraissent pas totalement disjoints mais qui se trouvent unis par tel ou tel rapport.

La notion d'*étendue de signifiance* est ici encore plus présente : […] *qui ne* ***paraissent pas totalement disjoints mais qui se trouvent unis*** *par tel ou tel rapport*.
Mazaleyrat ajoute à ce sujet que « la condition (ii) indique ainsi que deux sens sont apparentés s'ils sont à la fois *génétiquement reliés* et *sémantiquement reliés*.
Elle effectue ensuite une double analyse afin de vérifier si les deux types de liens unissent véritablement les sens deux *curieux* :

> Une étude diachronique nous permettra de décider si les différents sens de *curieux* sont génétiquement reliés, alors qu'une analyse en synchronie s'attachera à déterminer s'ils sont également sémantiquement reliés.

Nous nous sommes donc inspiré de sa démarche et avons procédé de manière similaire. Le recours aux dictionnaires étymologiques classiques du type *etymologyonline*, a permis de dresser, de manière schématisée, l'évolution diachronique du mot [pattern]. (voir ci-dessous figure 4.11, sur deux niveaux)

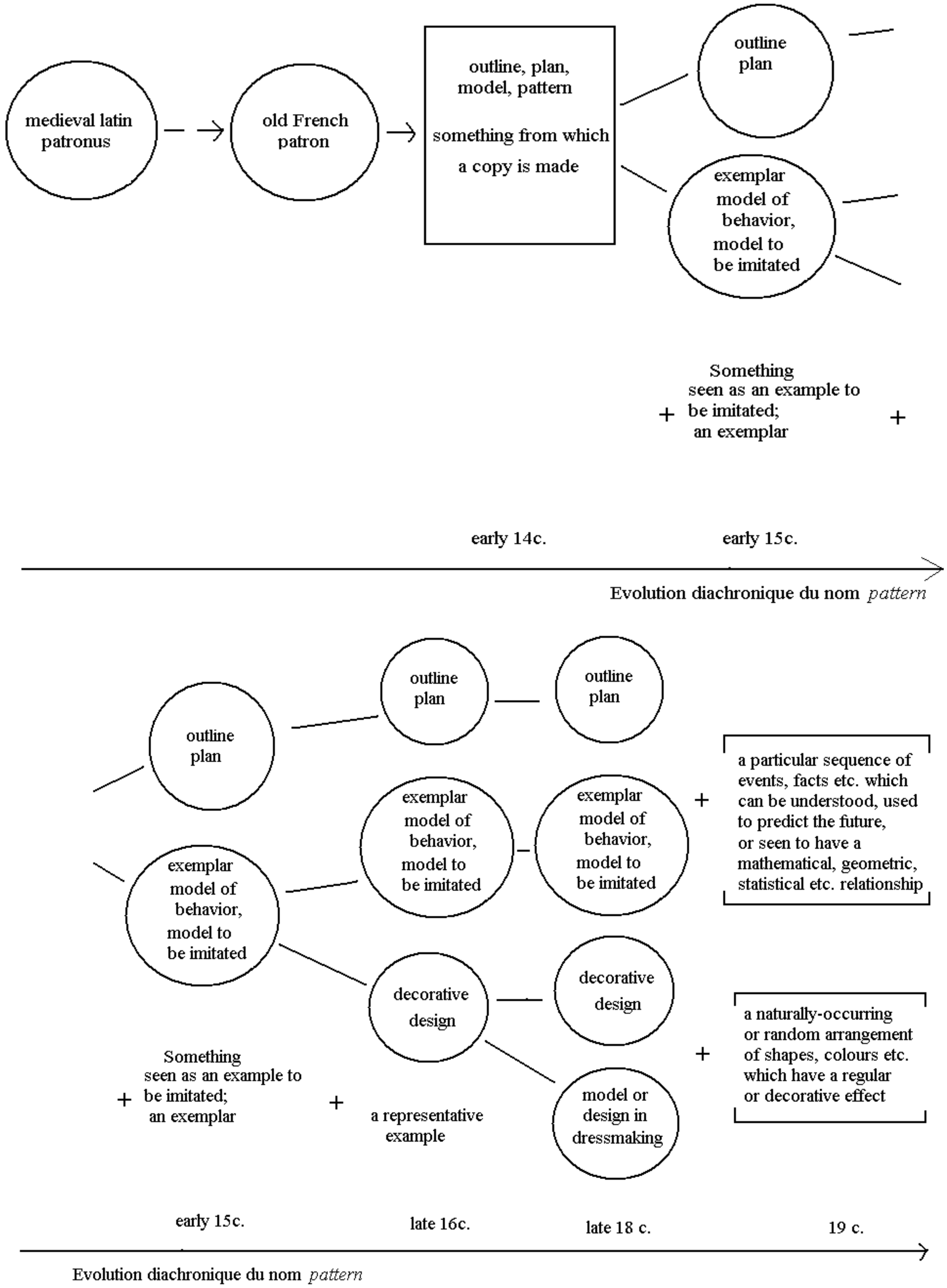


Figure 4.11 : évolution diachronique du mot [pattern]

Compte tenu de l'analyse diachronique et des informations recensées auparavant, mais sans respecter à la lettre le schéma d'analyse conceptuelle opérée par Mazaleyrat, nous pouvons désormais cerner au plus près la base conceptuelle du nom [*pattern*] :

[pattern]

- objet ou phénomène
  concret ou abstrait
- repéré et identifié
  par des traits caractéristiques particuliers
  et/ou des relations internes
- susceptible d'être reproduit physiquement ou abstraitement
  (en tant que règle ou motif)
  ou encore d'être répété dans le temps, d'être récurrent

Il devient clair dès lors que l'on pourra, *sur le plan conceptuel*, d'une manière *naturelle,* dans le cas d'une structure [V pattern], combiner des éléments verbaux (ici cités en L1 mais transposables à la L2 sans contrainte phraséologique particulière) tels que [*déterminer*], [*observer*], [*repérer*], [*reconnaître*], [*reproduire*], [*copier*], [*étendre*], [*suivre*]… avec [*pattern*]. Tous les verbes appartenant aux champs sémantiques des actions impliquant la reproduction, la visualisation, la reconnaissance, etc… vont être des candidats potentiels pour des combinaisons syntagmatiques du type [V pattern].
Ainsi, si l'on tape par exemple ["copy the pattern"] dans la zone de saisie du moteur Google, on obtient comme précision au niveau de l'affichage :

[Environ 380 000 résultats (0,18 secondes)]

Il va de soi qu'il sera intéressant d'activer le lexique phraséologique L2 correspondant mais sur la base conceptuelle précédemment définie. On proposera par exemple :

"We can *determine, observe, notice, detect, copy, reproduce,* etc…, a *pattern*."

Ce qui est à noter, et c'est un fait selon nous intéressant, c'est que l'on pourra, *très vraisemblablement*, combiner [*pattern*] avec tous les mots (verbes, adjectifs, etc...) compatibles avec l'un des sens abstraits, conceptualisés, que nous avons énumérés mais aussi substituer [*pattern*] avec l'un des synonymes cités dans la liste des synsets (voir plus haut) à l'intérieur-même des expressions phraséologiques associées à ces synonymes.
Ainsi, en nous positionnant comme *un apprenant L2 (hésitant)*, il y a de fortes chances de prévoir qu'il soit possible de dire *follow a pattern*, parce que l'on considérera qu'il est question dans le discours ou dans le texte de *suivre une règle*. On notera que ce n'est pas le seul sens possible puisque *pattern* peut s'appliquer à un terme du champ sémantique relatif au *comportement*, entre autres, et dans ce cas, il s'agira plutôt de *suivre un schéma (comportemental*), ou d'*avoir un comportement récurrent*.
Il apparaîtra naturel, également, de concevoir à l'avance que l'on puisse dire, de manière négative, *quit the pattern* parce que l'on dispose déjà, dans son lexique mental, de l'expression phraséologique *quit a bad habit* (expression traduisible par *se débarrasser d'une mauvaise habitude*).
Néanmoins, les choses ne sont pas si simples. En effet, d'un point de vue phraséologique, l'expression *quit a bad habit* est semi-figée et constitue l'expression **dominante**. Si l'on tape *quit a bad pattern*, Google ne fournit cette fois que 7 occurrences[124] !
Cela soulève des questions linguistiques pointues qui dépassent le cadre de nos travaux.

[124] Le fait que l'on rencontre effectivement l'expression *quit the pattern* résulte peut-être d'une stratégie discursive d'évitement d'une redondance avec le mot habit.

Nous terminons ce paragraphe par une note humoristique, en nous référant au champ sémantique du comportement et en illustrant au passage la forte transversalité de l'utilisation de *pattern* :

Figure 4.12 A new behaviour pattern [125]

III. Lexique phraséologique didactique et lexique mental de l'élève

Notre objectif est de montrer divers moyens permettant à l'enssseignant d'élaborer un lexique phraséologique didactique à destination d'une classe, autour du mot-concept *pattern*. Les éléments lexicaux sont censés être distillés sur une ou plusieurs séquences. L'évaluation des connaissances d'ordre lexical et phraséologique considérées comme partagées, à un moment donné, permet d'appréhender les éléments constitutifs du répertoire phraséologique de la classe. Dans le cas d'un élève considéré individuellement, on parlera de lexique phraséologique mental. Il sera interprété comme ressource conceptuelle, intimement lié aux représentations cognitives de l'élève et il devra être considéré comme étant constitué d'éléments lexicaux figurant parmi les autres éléments représentationnels situés autour du mot-concept *pattern.*
Nous ne pouvons présenter ici, faute de place, la liste des informations lexicales et notionnelles que nous avons collectées et analysées[126].
Toujours est-il qu'il ressort de nos investigations que le concept de pattern évoque les points suivants :

- il est attaché à l'idée de motif, de dessin, de patron, de configuration, de structure ;
- il évoque l'idée de reproduction, d'extension, de généralisation ;
- il est en rapport avec les notions de règle, de formule, de convention ;
- il est intimement lié à l'idée de reconnaissance ;
- il implique la notion de perception active ;
- on le trouve associé à des adjectifs ou composés avec des noms tels que : logical, graphical, musical, radiation, structure, paper, traffic, holding, intonation, behavioural, design, etc…, comme dans les expressions *a paper pattern for a dress, the holding pattern* (trajectoire circulaire d'un avion dans l'attente d'une autorisation d'atterrir) ;
- un pattern apparaît comme une solution générique à un type de problèmes fréquemment rencontrés ;
- en musique, en parlant de la batterie ou à propos d'un instrument pouvant jouer une partie rythmique, c'est un motif rythmique de base ;
- en mathématiques, il est associé à un certain type de schémas (souvent reproductibles, extensibles), aux configurations, aux suites (récurrentes), on le rencontre à propos de la proportionnalité (pattern of proportionality), à propos de la notion de distribution ou relativement à des configurations numériques (number patterns) etc… ;

[125] Trad. : un nouveau type de comportement
[126] Le lecteur trouver d'autres exemples et illustrations en annexe (Annexe 5).

- le mot-concept *pattern* peut être rattaché à l'idée d'arrangement, de disposition, et par conséquent aux preuves visuelles.

Compte tenu de la liste élevée mais partielle de termes pouvant être associés à *pattern*, il est clair que ce dernier, en tant que concept, entretient un lien sémantique avec au moins chacun des mots que nous avons cités, lien qui se traduirait par un trait sémantique - ou plusieurs, selon le modèle adopté - sur une représentation analogue à celles que nous avons proposées plus haut (voir figure 4.3).

Nous allons maintenant regarder en détail les expressions phraséologiques collectées et en conserverons quelques-unes. Nous ferons comme si notre choix était motivé par la nécessité de constituer un répertoire minimal pour une séance CLIL mais aussi par notre volonté d'étendre la phraséologie proposée aux domaines non spécifiquement mathématiques. Le fait qu'il s'agisse de telle ou telle séance n'a ici que peu d'impact, étant donné l'importance, que ce soit à l'intérieur ou à l'extérieur des mathématiques, que nous lui conférons, c'est-à-dire un caractère fortement transversal.

Pour élaborer une liste d'expressions phraséologiques, et notamment collocatives, il est possible, en plus de l'utilisation de dictionnaires, d'utiliser un extracteur de collocations, afin de l'utiliser sur un corpus numérisé préalablement délimité.

A titre indicatif, nous proposons un extrait (en anglais) concernant la présentation de l'extracteur [COLLOCATE, version 1.0] quant à son fonctionnement :

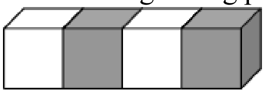
> **Collocate: Identifying collocations in a text**
>
> Collocate is a software program that can be used to identify or extract collocations, or terms, from a text or corpus. Collocations (chunks, lexical bundles, prefabs, etc...) cannot be precisely defined, but Collocate uses statistical analyses (t-score, log likelihood, MI) as well as frequency information in order to present a list of candidate collocations for inspection. There are three main components of the collocation program:
>
> 1. Search for a word (phrase) within a set span (e.g. 4 words). The program lists all the collocations containing the searchword and provides frequency and/or statistical information (Log Likelihood, Mutual Information, t-score).
> 2. Production of an n-gram list (lexical bundles) for the corpus, e.g., a frequency list of all the three word sequences in the text.
> 3. Extraction of collocations from the corpus as a whole (using thresholds and either mutual information or the cost criterion).
>
> This text analysis software is easy to use and the statistics within the program are there simply to provide the user with different view of the corpus data.

Il existe un autre moyen d'obtenir les collocations. Malgré sa simplicité, et la nécessité de les présenter dans des phrases courtes ou des micro-contextes, il reste efficace : il s'agit par exemple de l'utilisation sous Word ou sous n'importe quel autre traitement de texte, de la commande *rechercher*. La délimitation des expressions phraséologiques devient alors une démarche certes subjective mais réalisable grâce aux compétences linguistiques de l'enseignant, à son intuition et à sa conscience aigüe de la seconde langue.

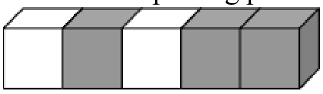
En procédant de manière similaire, et en nous basant sur une ressource web limitée au champ des mathématiques, et que nous trouvons pertinente pour notre étude[127], nous avons obtenu la liste suivante, relative à *pattern* :

[127] Voir par exemple : http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?ID=L157
http://illuminations.nctm.org/lessons/creatingpatterns/CDAPatterns-AS-DescribingPatterns2.pdf

creating a growing cube pattern
color the “growing” pattern that appeared using the blocks below.
discuss with your partner how the pattern will look, after it “grows” one more time
how many connecting-cubes are now in the pattern?
explain how a “growing pattern” is different from a “repeating pattern



Repeating Pattern



Growing Pattern

write a numerical pattern representing the growing pattern;
tell them to look for a pattern;
ask students what they notice about how these patterns grow;
tell students that a number pattern that grows in such a way is called an arithmetic sequence;
asking whether this pattern is growing in the same way as
following the pattern that has been established;
extend the patterns;
choose one of the patterns explored during this lesson;
the concept of pattern rules;
students should have had some experience with extending simple number patterns
using charts to display data, using concrete materials to represent patterns;
representing simple geometric patterns with the aid of a number sequence, a number line, or a bar graph;
describe, extend, and create a variety of numeric and geometric patterns;
make predictions related to the patterns;
growing, and shrinking number patterns;
given a pattern rule expressed in words;
observe the difference between the two growth patterns;
the pattern grows at a constant rate of 4;
the second pattern grows when an increasing amount is added to each term – that is, the growth rate of the pattern is not constant;
seeing a pattern;
model the problem, record results on a t-chart, and develop a pattern rule
can you see a pattern?
interpreting abstract patterns and structures.

Il est aussi possible, pour la constitution d'un document récapitulatif, d'insérer des figures:

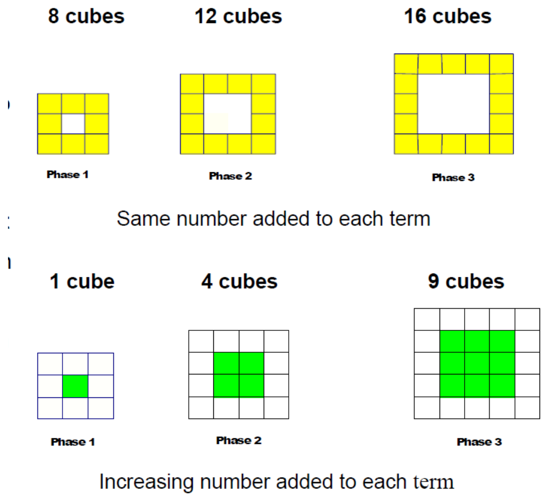


Figure 4.13 les configurations usuelles physiques ou figurées sont aussi des *patterns*

Nous ne proposerons pas de liste transversale (hors du champ des mathématiques) aussi grande, pour des raisons de place, mais nous illustrons notre propos, et notamment la question de répertoire minimal de formulation, en proposant quelques expressions supplémentaires :

determine the pattern of production : déterminer le schéma ou modèle de production ;
determine the pattern produced by diffraction;
an unusual pattern of …: un nouveau type de …
Alcoholics know they cannot drink not even one little sip, or they will *spiral into the pattern* they have fought to break. (idée de "*replonger*")
etc…

Sans entrer dans les détails, la focalisation sur la phraséologie à travers l'utilisation des ressources telles que Visuword, au caractère fortement convivial et ludique (l'image finale proposée par Visuword s'obtient après une courte animation à caractère visuel), la prise en compte des éléments synonymiques que fournit une ressource telle que WordNet, peuvent donner lieu à un traitement didactique de données lexicales. Elle pourra être associée à des recherches en matière d'étymologie et une mise en relation avec le lexique spécifique en mathématiques.

Nous avons testé une partie de ce que nous venons d'évoquer, sans que pour autant cela devienne un objectif de nos travaux. Néanmoins, cela a très bien fonctionné.

Nous ne le présentons pas ici car ceci relève plus, à nos yeux, d'un travail à forte dominante linguistique. Il soulève par ailleurs quelques problèmes que nous nous contentons d'évoquer, à savoir par exemple celui de définir clairement les consignes de manière à ce qu'un éventuel objectif de type classificatoire (comme nous l'avons fait pour *pattern* avec WordNet*)* se révèle cohérent et accessible.

Nous proposons néanmoins en annexe un document que nous avons élaboré et utilisé avec nos classes. Il concerne ce type d'activité. L'exemple fourni portait sur le mot-concept *differentiate*.

Le but de l'activité était d'envisager les rapports qu'il entretient avec les mathématiques et son fonctionnement hors de ce champ[128].

[128] Voir annexe 6, séance à focalisation linguistique.

En ce qui concerne ce que nous avons évoqué quant aux applications didactiques possibles (élaboration d'un lexique à destination des élèves) que permettent les ressources du type WordNet ou Visuword, nous terminerons ce paragraphe en proposant un bref regard sur les termes *match* et *number,*

Signalons que la maîtrise sémantique de *match*, tout comme celle de *fit* et de *pattern*, ont été, quant à leur maîtrise, au sein et à l'extérieur du domaine mathématique, un des objectifs linguistiques associés à nos séances expérimentales.

Les données fournies par WordNet dans le cas de *number* ne permettent pas de regroupement synonymique effectif car *number* n'en a pas ! Ceci illustre le degré élevé d'abstraction de ce concept qui joue un rôle fondamental dans, et à l'extérieur, des mathématiques.

Néanmoins, les résultats sont intéressants lorsqu'on regarde les sens et le fonctionnement du verbe *number*. Le sens de classifier (*classify, sort, enumerate,* etc…) relativement au verbe *number* n'est quasiment jamais soupçonné. Le sens de *number* dans une phrase du type *number the pages of the thesis*, c'est-à-dire au sens de *numéroter*, est généralement mal maîtrisé (au niveau de la production et non de la réception), même pour des élèves de terminale. Il en va souvent de même pour l'expression *add up to.* Pourtant, une phrase du type *the angles add up to 180°* est très usitée en anglais.

IV. Le mot-concept *pattern* en mathématiques

Les patterns sont au centre de la pratique mathématique.

Dans son livre intitulé Nature's Numbers, Ian Stewart va même jusqu'à affirmer que :

> "We live in a universe of patterns"

On trouve facilement, sur internet ou dans la littérature scolaire ou académique, un grand nombre de définitions de *pattern.* Nous nous proposons d'en examiner quelques-unes en joignant quelques-uns des commentaires figurant dans les passages où nous les avons trouvées.

Voici par exemple la définition que l'on peut trouver sur le site *math is fun* :

> "Things that are arranged following a rule or rules."
>
> Example: these tiles are arranged in a pattern.

> Another Example: there is a pattern in these numbers: 2, 7, 12, 17, 22 ... The rule is "start at 2 and add 5 each time"
>
> A Pattern constitutes a set of numbers or objects in which all the members are related with each other by a specific rule. Pattern is *also known as sequence*. There can be finite or infinite number of members in a pattern.

Sur Wikipedia, on trouvera:

> Mathematics is sometimes called the "Science of Pattern", in the sense of rules that can be applied wherever needed. For example, any sequence of numbers that may be modeled by a mathematical function can be considered a pattern. Mathematics can be taught as a collection of patterns.

Voici ce que l'on trouve sur le site mathforum.org :

What is the difference between a pattern and a sequence? The terms appear to be interchangeable[129].

"Pattern" is a vague word without any clear definition; it is used in teaching, to describe a general category of recognition skills.

Patterns might exist in sequences; they can also be found in geometry (like patterns on wallpaper, in two or more dimensions) or in logic (patterns of reasoning), and so on. Not all patterns involve repetition, or even mathematics.

"Sequence" is a specific, clearly defined word used in mathematics. A sequence can be considered to be a particular kind of pattern; but in fact a sequence need not have a pattern in any real sense! The mathematical definition of "sequence" in Merriam-Webster is a set of elements ordered so that they can be labeled with the positive integers

Nous joignons également à notre liste quelques documents significatifs extraits d'un ouvrage consultable en ligne[130]. Nous reviendrons ailleurs sur ce document car il est intéressant à d'autres points de vue (phraséologie, expérience de la nécessité dans une situation intégrée, etc...).

A **recursive pattern rule** is a pattern rule that tells you the start number of a pattern and how the pattern continues.

For example, a recursive rule for the pattern 5, 8, 11, 14, ... is start with 5 and add 3.

A **common difference** is the difference between any two consecutive terms in a pattern. Not all patterns have a common difference.

For example, the pattern

5, 10, 15, 20, ...

+5 +5 +5

has a common difference of 5.

The pattern

1, 4, 9, 16, ...

+3 +5 +7

has no common difference.

An **explicit pattern rule** is a pattern rule that tells you how to get any term in the pattern without listing all the terms before it.

For example, an explicit pattern rule for 5, 8, 11, 14, ... uses the first term (5) and the common difference (3).

To calculate the 20th term,

20th term = first term + [(term number − 1) × (common difference)]

$= 5 + (19 \times 3)$

$= 5 + 57$

$= 62$

Par ailleurs, il nous semble important, ne serait-ce qu'en tant que curiosité mathématique, d'avoir présent à l'esprit l'idée de *number pattern* avec les manifestations surprenantes qui s'y rattachent, notamment au travers des exemples suivants[131]:

129 Extrait du site http:// mathforum.org/library/drmath/view/64445.html

130 Activité correspondant au chapitre 1*Patterns in Mathematics* paragraphe 6 p6 consultable en ligne à l'adresse suivante : http://www.math6.nelson.com/parentcentre/pdf/01-NEM6WBAns.pdf

131 Le lecteur pourra retrouver ces figures, entre autres à l'adresse suivante : http://www.magic-squares.net/number_patterns_index.htm

$$
\begin{array}{r}
0 \cdot 9 + 1 = 1 \\
1 \cdot 9 + 2 = 11 \\
12 \cdot 9 + 3 = 111 \\
123 \cdot 9 + 4 = 1{,}111 \\
1{,}234 \cdot 9 + 5 = 11{,}111 \\
12{,}345 \cdot 9 + 6 = 111{,}111 \\
123{,}456 \cdot 9 + 7 = 1{,}111{,}111 \\
1{,}234{,}567 \cdot 9 + 8 = 11{,}111{,}111 \\
12{,}345{,}678 \cdot 9 + 9 = 111{,}111{,}111
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcr}
1 \cdot 8 & = & 8 \\
11 \cdot 88 & = & 968 \\
111 \cdot 888 & = & 98568 \\
1111 \cdot 8888 & = & 9874568 \\
11111 \cdot 88888 & = & 987634568 \\
111111 \cdot 888888 & = & 98765234568 \\
1111111 \cdot 8888888 & = & 9876541234568 \\
11111111 \cdot 88888888 & = & 987654301234568 \\
111111111 \cdot 888888888 & = & 98765431901234568 \\
1111111111 \cdot 8888888888 & = & 98765432791234568
\end{array}
$$

Figure 4.14 *number patterns*

A titre indicatif, et d'un point de vue cette fois-ci linguistique, mais aussi didactique, voici un des commentaires accompagnant ces figures. Il est intéressant et pourrait donner lieu à un débat sur le thème des *number patterns :*

> Here are some more charmers of mathematics that depend on the surprising nature of its number system. Again, not many words are needed to demonstrate the charm, for it is obvious at first sight. Just look, enjoy, and spread these amazing properties to your students. Let them appreciate the patterns and, if possible, try to look for an "explanation" for this. You might ask them why multiplying by 9 might give such unusual results. Once they see that 9 is one less than the base 10, they might get other ideas to develop multiplication patterns. A clue might be to have them consider multiplying by 11 (one greater than the base) to search for a pattern.

Il est clair que toute tentative de décrire les situations mathématiques, ou autres, au cours desquelles le terme *pattern* apparaîtra avec l'un des sens que les ressources lexicales font apparaître sera inévitablement incomplète, limitée. Mais il existe dans la littérature des textes assez représentatifs des traits linguistiques significatifs (phraséologiques et sémantiques) que l'on peut rattacher à ce concept.

L'un d'eux se trouve être l'article élaboré par l'université de Cambridge[132]. Il s'intitule « Pattern Power » et fournit une grande quantité d'informations, très intéressantes et très diversifiées, et non limitées au thème des mathématiques. Dans une perspective de transdisciplinarité, il constitue un document riche et consistant.

Nous en donnons un bref aperçu dans ce qui suit.

> Mathematics is the study of patterns. Studying pattern is an opportunity to observe, hypothesize, experiment, discover and create. By understanding regularities based on the data we gather we can predict what comes next, estimate if the same pattern will occur when variables are altered and begin to extend the pattern. Practical activities that allow us to construct knowledge for ourselves with all of the ingredients for a meaningful, thought provoking and mentally and physically engaging mathematics curriculum.
>
> […]
>
> Study of pattern integrates both the strands of mathematics and a variety of curricular areas. We can use and extend skills and knowledge of number, measurement, geometry, data collection and statistics, probability and algebraic thinking. It allows us to bring together mathematics with music, visual art and craft, vocabulary building, creative writing and verbal communication, social studies, science and environmental studies, talent and technology. What better way to build a rich, developmentally appropriate curriculum for youngsters?
>
> […]

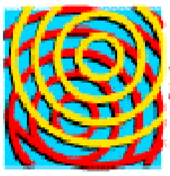
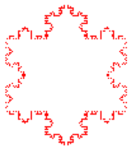
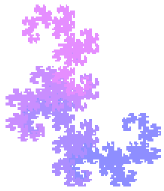
[132] consultable à l'adresse suivante : 'Pattern Power' printed from http://nrich.maths.org/

How do local species compare with a Giant Sequoia from Nevada which, through its rings, was found to be 3500 years old? What important history unfolded during those lifetimes? Why are some rings thicker than others, how can we know about the climate during the years the tree was alive?

Dans ce type de document, on sera amené à rencontrer une phraséologie riche mais surtout extrêmement contextualisée. On trouvera, toujours dans le même article des expressions ou phrases telles que celles-ci :

- ✓ motifs on buildings and in fabrics
- ✓ type of pattern in the leaves of certain plants
- ✓ scales on fish and snakes and fir tree cones
- ✓ spirals start at a central point and coil around
- ✓ as well as examining soccer balls and honeycombs, there are other hexagonal patterns to be explored.
- ✓ pattern created when one or more stones are dropped into a pool
- ✓ what we probably expect to find in a web is a radial pattern
- ✓ we see the same type of pattern in the leaves of certain plants
- ✓ the results of these programs amaze young learners and give them early exposure to the concept of fractals

etc

Enfin, signalons que, d'un point de vue didactique, il est possible de rattacher, aux connaissances antérieures des élèves, les nombreuses informations que nous avons rassemblées autour du mot-concept *pattern*.

Nous proposons ci-dessous un exemple de document (du type carte conceptuelle) que l'on peut distribuer aux élèves. Il permet de rassembler les éléments de nature lexicale, phraséologique, relatifs à *pattern*, dans une perspective transversale et non pas uniquement tournée vers les mathématiques. Il peut jouer le rôle de *consolidation*. Il intègre des éléments de nature conceptuelle (idées de perception, de configuration, de modèle, etc...) et inclut des expressions phraséologiques intégrées à des exemples d'emploi fortement évocateurs et relatifs aux notions thématiques correspondantes.

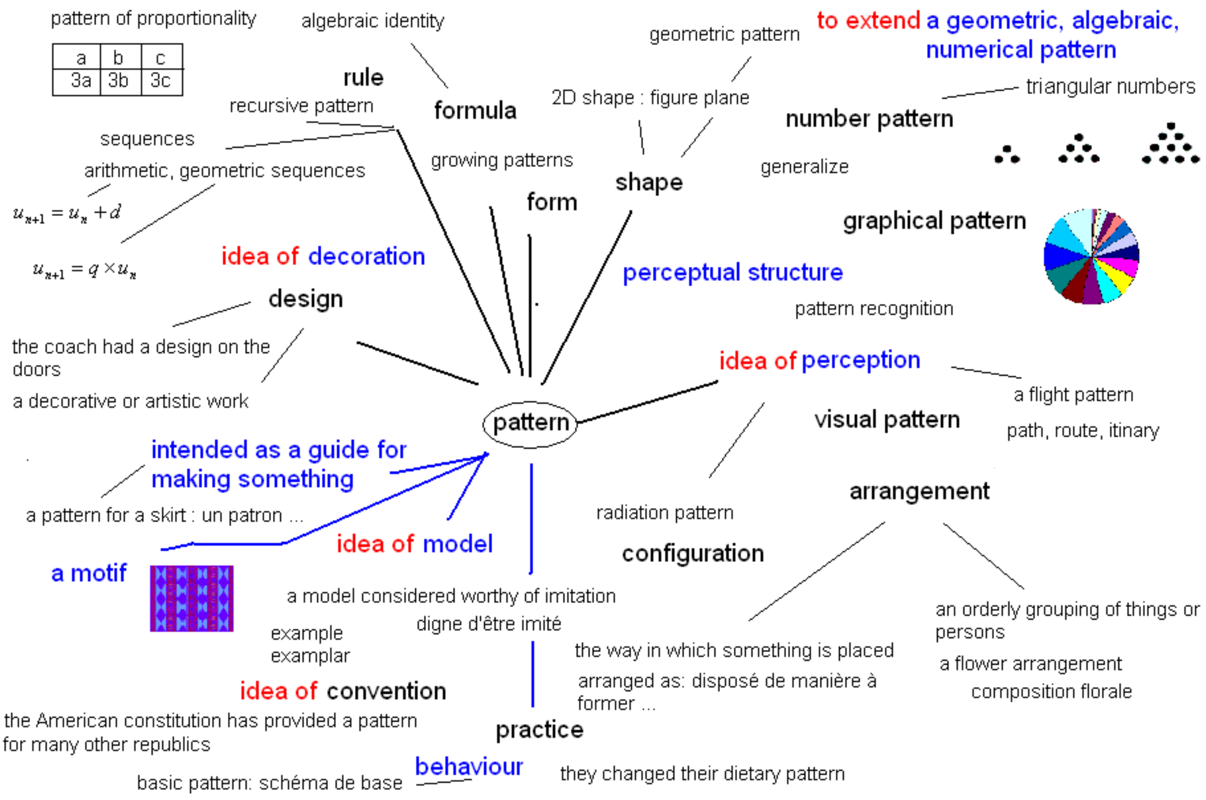


Figure 4.15 représentation autour de *pattern*

Comme on peut le voir aisément, il peut être mis en relation étroite avec le répertoire didactique (lexical, phraséologique, de représentation, etc…, selon la focalisation adoptée) de la classe, dans l'hypothèse où on se positionnerait en référence à nos séances expérimentales (séances sur les nombres figurés, preuves visuelles, etc...) et à la progression que nous avons adoptée.

Nous avons également inclus quelques images, à la fois pour agrémenter le document mais aussi pour insister sur l'idée de visualisation, celle-ci étant au cœur de la représentation cognitive du concept de *pattern*.

Conclusion

Nous pensons avoir illustré de multiples façons les caractéristiques sémantiques du mot-concept *pattern* ainsi que la richesse du lexique phraséologique qui lui est associé. L'étude détaillée que nous avons effectuée dans ce chapitre va prendre tout son sens dans la suite de la Partie Expérimentale, lorsque nous traiterons des nombres figurés, principalement lorsqu'il sera question de définir un répertoire lexical de formulation minimal (dans le but de garantir le bon fonctionnement d'une situation et en même temps l'apprentissage d'un nouveau lexique phraséologique).

En particulier, nous avons mis en relief la dimension culturelle du mot-concept *pattern*, à travers l'étude spécifique des rapports que ce mot-concept entretient avec les domaines non mathématiques, au niveau phraséologique mais aussi cognitif. La *trajectoire d'approche* d'un avion, ou encore circuit d'attente, dans le cas d'un avion qui s'apprête à atterrir, se traduit par *holding pattern*. Le recours au mot *pattern* dans de telles circonstances est bien ancré chez un natif anglophone. L'apprentissage de la L2 doit avoir comme objectif que l'élève soit à même, à terme, d'utiliser des expressions impliquant l'idée de *pattern* de manière naturelle.

A cet égard, nous rappelons qu'il est possible d'extraire des traits conceptuels minimaux relativement à un terme donné. Certes, cette analyse repose pour l'instant sur la subjectivité de celui qui l'effectue. Néanmoins, même si, pour l'instant, on doit encore procéder au cas par cas, cela ouvre des perspectives extrêmement prometteuses en ce qui concerne l'enseignement d'une L2 mais aussi de sa propre L1.

Il est admis, en sémantique, qu'il est possible de décrire par des mots les caractéristiques sémantiques d'un mot-concept. Il est clair que, la plupart du temps, lorsque nous employons un mot, nous n'avons pas à prendre conscience des sèmes qui lui sont associés car ceux-ci sont, de manière générale, directement perçus, ou en tout cas, directement saisis du point de vue du sens. Il en va tout autrement si nous décidons d'appréhender la signification, et les connotations de ce mot dans le but d'en discuter avec autrui, par exemple, ou encore pour *cerner* ce mot-concept, pour déterminer le sens qu'il partage avec d'autres synonymes ou des mots sémantiquement proches. Il devient alors intéressant d'en expliciter les sèmes. Ces descriptions, néanmoins, sont telles que le linguistique se rapproche au plus près du non linguistique, au niveau conceptuel bien sûr. Elles permettent, selon nous, une modification des processus de conceptualisation, en ce qui concerne les rapports entre le linguistique et l'extra-linguistique. La pensée sans verbalisation elle-même s'en trouve modifiée, notre perception active également, et par voie de conséquence notre rapport à la réalité sensible. Il semble clair, en effet, qu'on sera à même de reconnaître un pattern particulier sans forcément activer le pseudo-signe mental correspondant.

CONCLUSION DE LA PARTIE THÉORIQUE

Les cadres théoriques convoqués dans la première partie nous permettent de préciser les objectifs et les modalités de nos expérimentations.

Comme nous l'avons montré et laissé entendre, l'expérience de la nécessité et l'épreuve des objets vont être au centre de celles-ci. Ces dernières ont donc été explicitées au niveau de l'anticipation mais aussi au niveau des analyses a posteriori. Nous montrerons en quoi elles ont été effectivement réalisées (avec la prise de conscience qu'elles sous-entendent).

Nos conceptions en matière de pensée sans verbalisation seront en quelque sorte illustrées par la description des phases initiales des situations adidactiques relativement à une décomposition en divers schèmes. Nous mettrons ainsi en évidence le rôle des schèmes de perception active et d'action : mise à plat des cubes, reconnaissance de *patterns* dans la disposition des cubes, perception de la reproductibilité des actions et de leur extension selon un principe impliquant lui-même fortement la perception active. Il ne faudra pas oublier, à cet égard, que la plupart de ces schèmes s'accompagnent d'une idéalisation conjointe de ces actions, et peuvent même trouver leurs pendants en termes de schèmes cognitifs (idéalisés mais sans être accompagnés d'une verbalisation intérieure).

Le concept de Preuve Visuelle devra être construit progressivement sur plusieurs séances avant de faire partie du répertoire didactique partagé.

Les schèmes que nous avons mentionnés peuvent être vus comme des éléments représentationnels, c'est-à-dire attachés à la représentation cognitive des élèves. Ils viendront s'intégrer aux autres éléments déjà connectés à la représentation, chez l'élève, du concept de Preuve Visuelle.

En termes de connaissance, la notion de Preuve Visuelle viendra s'apparier au concept plus général de preuve dans une catégorisation construite, par opposition aux catégorisations naturelles, et constituera ainsi une connaissance élaborée et institutionnalisée et donc considérée ultérieurement comme inscrite dans le répertoire de la classe.

D'un point de vue linguistique et conceptuel, l'analyse de *pattern* et des termes cruciaux (*match, fit,* etc...) va permettre d'élaborer un répertoire minimal de formulation dont le lexique phraséologique sera distillé, au fur et à mesure de la progression de la séquence, sous forme de segments préconstruits et de collocations liés au thème des séances mais également complétés par d'autres plus ouverts sur l'extra-disciplinaire, dans une perspective transversale (voir partie expérimentale et annexes correspondantes).

Le concept d'abstraction progressive, la prise en compte des niveaux d'idéalisation, la place de l'expérience mentale vis-à-vis de la généralisation, la possibilité d'une lecture sémiotique selon des pôles de pensée interprétative (pôle langagier, verbal, et pôle formel, fonctionnel) vont prendre tout leur sens dans nos analyses (a priori et a posteriori). Nous espérons également faire apparaître que le parallèle entre preuve visuelle et preuve algébrique, dont l'établissement effectif est l'objectif d'une situation revisitée (chapitre 8), est une connaissance réinvestissable.

PARTIE EXPERIMENTALE

CHAPITRE 5. INTRODUCTION DE LA PARTIE EXPÉRIMENTALE

Introduction

La problématique centrale de nos recherches, à savoir d'examiner la nature des rapports qu'entretiennent la L2 et les mathématiques dans une perspective d'intégration au niveau des enseignements et apprentissages, a guidé nos choix lors de l'élaboration des situations intégrées. La notion de situation intégrée a été définie au chapitre1 (III).
Dans un premier temps nous examinons la question de l'intégration des concepts théoriques dans la construction de nos séquences. Ceci nous conduit inévitablement à préciser les concepts convoqués et par suite à définir les enjeux et motiver les choix des thèmes pour l'ensemble de nos séquences.
Dans un deuxième temps, la notion de preuve visuelle, dans sa généralité et en tant que thème retenu, et le recours au gnomon, en tant qu'objet mathématique particulier mais aussi en tant que nouvelle notion pour les élèves concernés par nos séquences, donnent lieu à une étude particulière.
Enfin, dans un troisième temps, nous effectuons une étude épistémologique des concepts que nous avons spécialement développés, à la fois pour des raisons pratiques, liées à la spécificité des preuves visuelles que nous avons choisies mais aussi, et surtout, pour nous permettre par la suite de mettre en relief et valider certaines de nos hypothèses théoriques, à savoir celles portant sur les connaissances émergentes en phase adidactique et sur leur contribution à l'acquisition de véritables connaissances institutionnalisées.
Les questions de signification sont centrales pour notre problématique, tout comme la place des processus raisonnés. La conceptualisation s'appréhendant sur la durée, les questions de signification, lorsqu'on les rapporte aux processus de conceptualisation, nous conduirons à ne pas restreindre les analyses a priori aux seules phases adidactiques.

I. Intégration des concepts théoriques dans la construction des séquences

I.1. Considérations préliminaires, contraintes

I.1.a. Contraintes pour la mise en pratique effective des séances expérimentales

Nous tenons à rappeler les conditions générales dans lesquelles se sont déroulées les séances expérimentales. L'expérimentation a été réalisée dans des classes européennes, de Première et de Terminale. L'enseignement des mathématiques en anglais est limité à une heure hebdomadaire en plus de l'horaire traditionnel de mathématiques, en Première et en Terminale. En Seconde, il n'y a pas d'heure supplémentaire en plus de l'horaire normal. Par conséquent, compte tenu de l'importance des contenus du programme de mathématiques en Seconde, le nombre de séances ou d'activités qui sont effectivement menées en anglais en classe de Seconde reste assez limité. Par ailleurs, en ce qui concerne l'enseignant responsable de la réalisation effective des séances expérimentales, nous rappelons que ses élèves, qu'ils soient en Première ou en Terminale européenne, ont un autre professeur pour le cours de

mathématiques traditionnel. Les élèves ont donc déjà étudié les notions, selon la progression respective de leur enseignant. Nous ne pouvions donc pas envisager une situation d'introduction à une nouvelle notion (en anglais), excepté peut-être au niveau de la Seconde. Par ailleurs, nous positionner au niveau de la Seconde nous aurait limité quant au niveau des démonstrations que l'on aurait pu proposer.
Le volume horaire restreint, pour l'ensemble du cursus européen au lycée, et la préparation des élèves à l'examen final anticipé en Terminale (qui a lieu vers la fin du mois d'avril ou le tout début du mois de mai) sont des contraintes majeures. Le chercheur devra, dans la mesure du possible, choisir des thèmes qui s'intègrent véritablement dans la progression choisie par l'enseignant et conforme aux prescriptions officielles, que celles-ci proviennent des instances nationales ou académiques (les groupes de travaux et les commissions d'élaboration de thèmes et de sujets se réunissent au niveau académique).
La conséquence immédiate est que le travail d'étayage des séances, notamment au niveau d'un accroissement du répertoire de formulations des élèves concernés, sera optimisé dans sa réalisation effective. Ce point sera traité et mis en relief lors des analyses a priori et des analyses a posteriori des séances.
La question de l'évaluation en contexte CLIL est un point très délicat et mériterait à lui seul des travaux de recherche. Il est traité différemment selon les académies en laissant de côté bien des zones d'ombre : comment par exemple juger d'une connaissance lorsqu'elle est purement mathématique, purement langagière ou mixte, lorsque l'on sait que l'enseignant en classe européenne n'est pas formé comme enseignant de langue vivante ? Peut-il évaluer des erreurs langagières syntaxiques ? Comment apprécie-t-il les compétences du cadre européen ? Quelle est la part de subjectivité de ses jugements sur la langue lorsque son niveau est tout juste C1 ? etc…
A titre indicatif, nous proposons en annexe trois exemples de sujets proposés aux épreuves anticipées. Le premier colle de très près au formalisme mathématique et les deux autres sont des sujets *nouvelle tendance*. Nous avons élaboré le deuxième de telle sorte qu'il porte précisément sur le thème des *patterns* tout en partant d'une situation concrète, et pour le troisième, nous nous sommes inspiré d'une propriété classique des tangentes à une parabole (voir Annexe 6, compléments)
La question de l'adaptation des compétences en langue au contexte CLIL dépasse notre cadre de recherche. Ce point est en effet indirectement lié à l'évaluation.

I.1.b. Considérations générales conditionnant le choix des thèmes des séances

Pour l'élaboration de séances expérimentales, nous nous positionnons au niveau des milieux surdidactiques (TSD). Nous sommes donc parti, en ce qui concerne le niveau noosphérien (niveau M3), des idées générales suivantes :

- étude du rapport entre les mathématiques et le réel
- rôle de la perception dans le cadre de la pratique des mathématiques (géométrie perceptive)
- lien entre le concret et l'abstrait, que ce soit du point de vue mathématique ou linguistique
- liens et correspondances entre la géométrie perceptive, la géométrie, l'algèbre et les types de discours associés
- focalisation sur les notions plus spécifiques de généralisation et de schématisation

- identification des capacités cognitives mobilisées lors de pratiques ou activités de type mathématique ou linguistique et favorisation de l'adéquation entre composante cognitive et composante linguistique lors de la réalisation d'une tâche (de nature mathématique ou autre)
- transversalité disciplinaire, culture

Il est clair que des questions viennent naturellement à l'esprit :

- quels contenus mathématiques vont être mobilisés ou être visés comme objets d'apprentissage ?
- quels sont les mots et les expressions en L2 que l'on souhaite faire acquérir aux élèves ?
- quels types de séance peut-on choisir pour permettre à la fois une mobilisation et un apprentissage de contenus mathématiques tout en garantissant l'acquisition d'un lexique phraséologique en L2 conséquent ?
- quel niveau de transversalité peut-on volontairement mais aussi raisonnablement envisager ? (introduction d'un vocabulaire utilisable hors contexte mathématique)

Aux points précédemment cités viennent s'ajouter les contraintes suivantes :

- les milieux doivent permettre aux élèves de réaliser des actions à la fois dans la réalité physique, au niveau schématique et au niveau algébrique
- les milieux doivent être suffisamment consistants pour permettre des rétroactions riches et variées et doivent être tels que ces rétroactions puissent être conceptualisées en rapport étroit avec les consignes initiales
- les milieux sont propices à des raisonnements mathématiques diversifiés (traitement d'informations à partir du milieu matériel, mise en correspondance d'actions concrètes avec des actions idéalisées, manipulations syntaxiques en rapport avec la dimension sémantique de la consigne initiale et des buts annexes émergeant des actions entreprises en phase heuristique
- les situations permettent la mobilisation cognitive de signes langagiers en L2, au niveau des productions écrites et orales mais aussi en pensée sous réserve qu'il n'y ait pas de code-switching mental[133]
- les milieux sont suffisamment riches pour favoriser, et même garantir, l'acquisition et la conceptualisation d'un nouveau lexique en L2
- les milieux permettent aux élèves de raisonner et d'adopter une attitude de preuve mais aussi d'effectuer la validation en L2

Nous avons par ailleurs été conduit à revisiter le thème des identités algébriques. La nouvelle séquence, réalisée début 2015, vise un niveau plus élevé d'intégration. Pour cette séquence en particulier, nous avons en effet cherché à faire en sorte de :

- centrer explicitement la séquence sur la notion de *pattern* pour, entre autre, permettre aux élèves de s'approprier un mot-concept très riche, à la fois du point de vue linguistique et sémantique mais aussi du point de vue purement mathématique (les *patterns* sont partout !) mais aussi, en ce qui nous concerne, de suivre l'évolution de la conception de gnomon chez les élèves ;
- nous focaliser davantage encore sur le thème de la preuve et faire apparaître clairement la dimension objet et la dimension instrument du gnomon ;
- adopter une approche plus sémantique, notamment par le biais d'une phase initiale centrée sur un accès direct aux signifiés du mot-concept *proof* au travers d'une

[133] Basculement de la L2 vers la L1.

recherche par les élèves de mots sémantiquement proches (*truth, justification, legitimation, reality, convincingness*, etc…) ;

- élaborer des documents intégrés en nous appuyant, entre autre, sur la dialectique Concept Quotidien-Concept Scientifique
- expliciter le parallèle entre les preuves visuelles et les preuves algébriques en concevant des documents qui, d'une part, relèvent d'une véritable institutionnalisation et d'autre part, mobilisent les dualités telles que celles concernant les pôles statique-dynamique, implicite-explicite, etc… ;
- proposer un travail à la maison prolongeant les activités faites en classe (homework centré sur une consolidation de la notion de gnomon et son rapport aux identités algébriques mais aussi sur une application dans un nouveau contexte de l'identité concernant la somme des entiers consécutifs)
- délimiter plus finement les répertoires didactiques de fonctionnement des séances en analysant au préalable l'articulation entre schèmes discursifs et schèmes d'action et en listant et catégorisant à l'avance le lexique phraséologique nécessaire au bon fonctionnement de chacune des types de phases didactiques (phases interactives d'introduction, phases adidactiques de recherche et de travail en groupes, phases d'institutionnalisation, interactives ou en temps libre, entre autres).

I.2. Concepts théoriques mobilisés

Les séances expérimentales ont en commun de mobiliser le concept de *spatialité* et celui de *représentation*, le dernier étant un concept central dans notre étude théorique. Ceci résulte d'un choix délibéré du fait que ces notions ont un caractère fortement transversal. Elles se retrouvent en effet à l'intérieur de diverses branches des mathématiques elles-mêmes mais aussi au centre d'autres disciplines : en géométrie et donc aussi en arithmétique et en algèbre arithmétique, en géographie, en histoire mais aussi, au niveau universitaire, en sciences cognitives, en linguistique et plus particulièrement linguistique cognitive etc...
En didactique des mathématiques, on distingue micro, méso et macro-espaces (voir Berthelot et Salin, 1994 ; 2001). Le micro-espace apparaît comme séparateur, comme constitué d'objets et d'espace vides. Les objets sont déplaçables, limités et les formes géométriques sont reconnues (le cercle est reconnu à travers la perception d'un disque). Un objet dans ce micro-espace sensible n'est pas encore considéré comme un ensemble de points. Les déplacements sont effectués sous le contrôle des organes sensori-moteurs. Le méso-espace, quant à lui, est celui de l'espace restreint du type de l'espace domestique. On parlera alors plutôt de lieux et d'objets, de trajectoires dans du vide. La perception est modifiée. Une figure telle qu'un rectangle n'est plus perçue comme telle. Un objet rectangulaire sera perçu à la manière d'un parallélogramme. L'angle droit est ressenti mais n'apparaît plus nécessairement comme il apparaissait dans le micro-espace. La perception passera donc par des représentations imagées différentes avec donc pour corollaire une modification de l'idéalisation de l'espace à cette échelle. Le macro-espace est celui des grandes dimensions, des grands déplacements. Il renvoie à l'extérieur du milieu habituel, à savoir celui de la classe dans lequel ont lieu presque (mais pas toujours, malheureusement ?...) toutes les activités mathématiques. Il est pourtant celui qui permettra de se rattacher aux autres disciplines, de manière idéalisée ou concrète, selon les besoins mais aussi indirectement puisque les frontières ou limites conceptuelles auront toujours une inévitable part d'imprécision. Néanmoins, ce que nous avons mentionné

dans la partie théorique à propos des notions de représentations, d'évocation, de mémorisation, se trouve illustré, ici aussi, car chacune des facettes qu'un individu pourra attacher à la représentation qu'il se fait de l'espace, de manière consciente ou en référence à la mémorisation sur laquelle celle-ci s'appuie, sera susceptible de modifier avantageusement, efficacement son rapport à la réalité.

Du point de vue linguistique, le concept de spatialité et tout ce qu'il implique (notions de mouvement, de disposition d'objets physiques ou imaginaires, etc...) se traduit au niveau discursif par des termes et des expressions qui se transposent aux manipulations idéalisées portant sur les symboles mathématiques ainsi qu'aux représentations mentales associées.

D'un point de vue mathématique et cognitif, le concept de *preuve visuelle*, aussi appelé preuve sans mots, a nécessité une étude approfondie. Ce concept, du fait de la nécessité de contraindre fortement et efficacement les situations à dimension adidactique, nous a amené plus loin que l'objet immédiat de notre thèse. Dans la Partie Théorique, nous avons questionné, d'un point de vue épistémologique, le *statut de preuve* que l'on peut conférer aux preuves visuelles classiques ou relativement répandues (voir Balacheff, 1988 ; Rinvold et Lorange, 2013) et que l'on peut trouver facilement sur internet ou dans certains articles spécifiques. Ces preuves ne contiennent en général un principe de généralisation que de manière implicite. Il nous a fallu examiner au plus près et développer certaines notions telles que celle de *caractère convaincant* d'une preuve visuelle ainsi que celles que nous avons choisi de qualifier d*'implicite et d'explicite schématique* (voir III). Par ailleurs, comme nous l'avonsindiqué en partie théorique, nous avons décidé d'introduire comme néologisme le terme de *convaincance*. Nous serons amené à parler de *convaincance* d'une preuve visuelle, de degré de *convaincance* d'une telle preuve, en faisant remarquer au passage que le problème ne se pose pas en anglais du fait de l'existence du terme *convincingness*. Nous avons introduit également, dans une tentative de comparaison des preuves visuelles et des démonstrations par récurrence, le concept de *principe d'extension d'une figure*, sorte de principe algorithmique d'extension implicitement attaché aux preuves visuelles mais néanmoins explicitable à la fois verbalement et schématiquement. Nous l'avons ensuite rapproché de celui *d'hérédité* et nous avons examiné la notion de généralisation au niveau schématique et sa traduction implicite ou explicite, toujours au niveau schématique.

Le rapport aux objets concrets et les modélisations abstraites par les schémas ont fait apparaître des possibilités *d'abstraction schématique progressive*, ce qui s'est révélé très intéressant du point de vue didactique[134].

Dans tous les cas, nous avons toujours veillé à étudier et cerner au mieux *l'évolution des représentations* par les élèves *des concepts-clés* tels que ceux de preuve visuelle, de schématisation, etc... L'évolution de ces représentations n'est pas directement accessible si on considère celles-ci comme représentations mentales mais elle le devient de manière indirecte par les productions sémiotiques des élèves (énonciation orale ou écrite, production d'écritures symboliques et élaboration de schémas). Nous avons donc procédé de manière minutieuse à l'étude de ces éléments lors de nos analyses a posteriori, ces éléments sémiotiques étant alors supposés fonctionner comme des indices.

Lors des analyses a priori, il va de soi que nous avons veillé à cerner au plus près le répertoire didactique de la classe pour chacune des situations. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur

[134] Nous avons utilisé la schématisation progressive lors de la séquence sur la somme des nombres carrés et à l'occasion de la reprise d'une preuve visuelle 3D.

les techniques ayant fait leurs preuves (techniques développées et proposées par les pédagogues spécialistes de l'enseignement de type CLIL) : activating, scaffolding, consolidating, etc...
Par ailleurs, en ce qui concerne les objectifs linguistiques associés, nous avons, du fait même des notions et des thèmes convoqués, vu émerger des possibilités de centration autour des termes et champs lexicaux suivants :
fit, fit into, match, patterns, growing patterns, concrete/abstract, implicit/explicit et bien sûr *visual proof, proof by induction, inductive step, principle of extension,* etc...
A cet égard, nous signalons que des termes tells que *fit* ou *pattern* sont très usités chez les anglo-saxons mais peu ou mal maîtrisés en général par les élèves français. De plus, la traduction de ces termes pose problème car elle est très dépendante des contextes d'utilisation.
Nous estimons que, du point de vue des savoirs visés de nature spécifiquement linguistique, nous avons réussi à ancrer dans des situations contextualisées et non artificielles des représentations cognitives de termes très usités mais souvent difficiles à traduire.
La mémorisation étant grandement facilitée par le rapport à une expérience concrète en liaison avec des possibilités effectives d'énonciation, nous estimons que des situations similaires mais non nécessairement mathématiques devraient désormais avoir toutes les chances de déclencher des représentations analogues ou, en tout cas, d'évoquer naturellement ou de faire venir rapidement à l'esprit les termes qui leur sont associés.
Nous avons, en outre, constitué un lexique phraséologique se rapportant à ce type de termes. Nous l'avons fait en débordant systématiquement sur des domaines extra-mathématiques de manière à faciliter l'ancrage dans la mémoire. Nous l'avons fait également par souci de conférer ainsi aux activités concernées un intérêt linguistique prononcé en attachant aux termes rencontrés un caractère manifestement extra-disciplinaire du fait de la possibilité de multiples réinvestissements. A chaque fois que nous avons élaboré des séquences, nous avons ensuite déterminé un répertoire minimal de formulation et cela a systématiquement donné lieu à la production d'un document écrit pour les élèves.

I.3. Choix des thèmes et enjeux didactiques des situations expérimentées

Pour un élève, établir des conjectures, agir dans un milieu didactique approprié, valider, démontrer, confronter son expérience à un point de vue officiel lors d'une institutionnalisation par l'enseignant sont autant de moments forts de sa pratique mathématique. Il était donc naturel que nos séances portent sur l'établissement de preuves. A cet égard, la typologie de Balacheff (1988) mentionne plusieurs types de preuves et nous avons détaillé ce point dans la partie théorique. Il nous a paru judicieux, à des fins de recherche en enseignement CLIL, d'envisager pour nos séances expérimentales une comparaison entre plusieurs types de preuves (preuves pragmatiques et preuves algébriques), l'objectif étant que ces preuves soient réalisées dans des milieux différents, en garantissant un rapport effectif à la réalité sensible.
Nous avons finalement été conduit à centrer plusieurs séquences d'enseignement sur les thèmes suivants :

- *nombres figurés* (en particulier les nombres carrés et les nombres triangulaires). Ce thème a été traité en classe de première S européenne du Lycée Louis Barthou en 2012.

- *somme des nombres carrés, somme des cubes* (analyse puis élaboration de preuves visuelles par les élèves. Les séquences ont été menées en classe de terminale S européenne dans le même lycée en 2013 (il s'agissait du même groupe d'élèves).

Ces thèmes ont certes en commun de se rapporter à l'arithmétique mais ont été traités à plus d'une année d'intervalle. Les séances expérimentales que nous avons décidé de mettre en place portent sur des identités algébriques et sur leur traduction sous forme d'identités algébriques.

Nous avons ainsi élaboré et expérimenté trois séances portant successivement sur les nombres triangulaires, la somme des carrés et la somme des cubes. Ces séances s'inscrivent dans des séquences que nous détaillerons dans les chapitres suivants.

Du point de vue strictement mathématique, le savoir ciblé dans les trois situations peut se résumer à l'aide d'identités algébriques, à savoir :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Du point de vue didactique, les activités menées en classe visent l'élaboration, par les élèves, de preuves multimodales, ainsi que la comparaison avec les preuves par induction correspondantes.

Par ailleurs, l'un des objectifs est également de faire prendre conscience aux élèves de l'enracinement dans la réalité sensible des identités algébriques. Cet objectif sera réalisé en tant que sensibilisation, pour la séquence des nombres triangulaires réalisée pendant l'année de Première S, et comme visée explicite pour la séquence réalisée au niveau de la Terminale S.

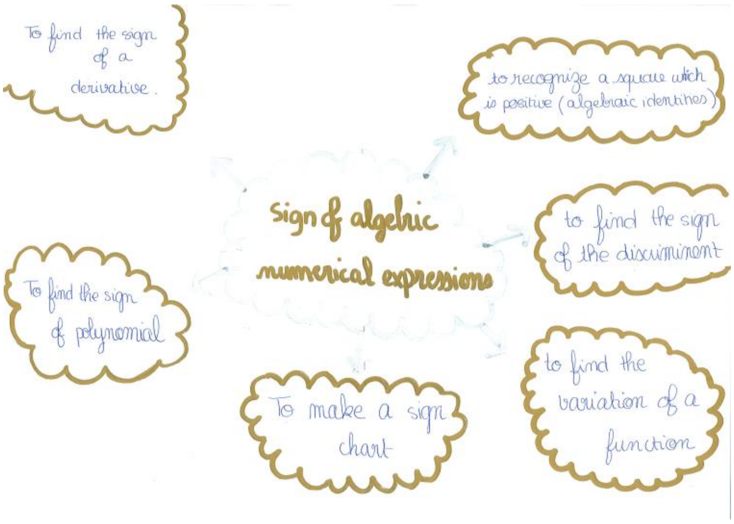
Le rapport au concret, l'abstraction progressive en passant par des figures 3D puis une schématisation des objets physiques, sont à la fois des modalités et des objectifs en termes d'expériences.

Plus spécifiquement, la convaincance et l'expérience de la nécessité relativement aux propriétés arithmétiques seront examinées en tant qu'objectifs explicites et systématiques des phases adidactiques.

Nos recherches ayant évolué entre 2012 et 2013, nous avons donc été plus ambitieux en ce qui concerne la troisième identité algébrique ($\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$) puisque nous sommes allés jusqu'à faire en sorte, au travers de l'élaboration d'une situation suffisamment contrainte, que les élèves établissent **par eux-mêmes** une preuve visuelle de la propriété concernant la somme des cubes. Nous estimons que ceci constitue un véritable défi dans la mesure où la notion de preuve visuelle ne fait pas partie du répertoire didactique des élèves. Il nous a donc fallu établir une introduction de la notion mais surtout penser à consolider toutes les notions associées d'un point de vue à la fois mathématique mais aussi cognitif et linguistique.

Les analyses a priori et a posteriori seront réalisées à la lumière, soit de concepts théoriques développés tout au long des travaux de recherches, soit du travail effectué au chapitre 4 autour

du mot-concept *pattern*, de la prise en compte des *sèmes* pour un mot-concept tel que *proof* ou des *éléments constitutifs de signification* pour un objet mathématique tel que le *gnomon*, de la notion d'activation de dualités (statique-dynamique, implicite-explicite, etc…) pour appréhender mais aussi rendre fonctionnel un concept. La séquence sur la somme des cubes a été revisitée en 2015 dans cet esprit.
Néanmoins, et cela vient en plus de ce que nous venons d'évoquer, nous avons également traité des thèmes se référant à l'analyse (comme, par exemple, celui de l'étude de fonctions paramétrées particulières[135]) ainsi que des thèmes orientés davantage sur la composante linguistique et les techniques déjà proposées par les linguistes-chercheurs dans l'enseignement de type CLIL. Nous avons à cet égard fait élaborer par les élèves une carte mentale autour du thème suivant : *sign of an algebraic expression*[136].



Exemple de carte mentale produite par les élèves

Figure 5.1

Les cartes mentales jouent un rôle important, que ce soit d'un point linguistique, cognitif ou mathématique. Nous rappelons qu'elles permettent de réactiver les éléments mémorisés rattachés à un mot ou une expression-clé, renvoyant elle-même à une représentation conceptuelle. L'élaboration d'une carte mentale faisant déjà partie des activités conseillées par les linguistes, nous nous sommes contentés d'en proposer quelques-unes afin d'illustrer nos propos théoriques mais aussi de permettre au lecteur de se faire une idée plus précise du type d'activités que l'on peut conduire (et que nous avons effectivement menées) avec une classe supposée suivre un enseignement CLIL de Mathématiques en anglais.
En ce qui concerne les thèmes se rapportant à l'arithmétique, nous aimerions insister sur le fait que ce sont ceux qui nous ont demandé le plus de travail. En effet, ils ont donné lieu à l'élaboration de séquences que nous pouvons estimer comme *fortement intégrées*. Par voie de conséquence, il se trouve que ce sont ces séquences qui nous ont donné le plus de satisfaction, à nous-même mais aussi aux élèves qui y ont participé.

[135] Voir Annexe 6 pour l'exemple portant sur la résolution d'une inéquation du second degré paramétrée (Solving quadratic inequations).
[136] Le lecteur trouvera en annexe (Annexe 2) des cartes mentales produites par les élèves et portant sur le thème du signe d'une expression algébrique ou numérique.

Un dernier point mais non le moindre : ces séances ont été élaborées de manière à tenter de voir jusqu'où on pouvait aller, d'un point de vue de la charge cognitive impliquée, sans que les élèves ne basculent sur la L1. Il ressort clairement, comme on le montrera dans les analyses a posteriori, que ceci est certes fortement dépendant de la qualité et du soin apporté à l'élaboration des séances à forte dimension adidactique et d'une délimitation très fine du répertoire didactique, elle-même fortement conditionnée par une réactivation préalable du répertoire de formulation minimal concerné mais aussi des compétences langagières des élèves (en L2).
Pour ce qui est de la construction des séquences elles-mêmes, et donc en ce qui concerne notre travail dans les milieux didactiques M_1 et M_2 à proprement parler, nous en donnerons une description détaillée dans les chapitres suivants.
Nous terminerons en rappelant que notre démarche d'élaboration des séquences est basée sur ce qui correspond à une analyse descendante, en conformité avec la théorie des situations. Cette analyse vise à déterminer et clarifier nos intentions didactiques et elles sont pour nous, et nous insistons sur ce fait, d'ordre mathématique, linguistique et cognitif. On pourrait donc à juste titre la qualifier *d'analyse descendante intégrée*.

II. Preuves visuelles et Gnomons

II.1. Preuves visuelles et expérimentations, considérations préliminaires

Nous avons déjà examiné les preuves visuelles dans la partie théorique. Nous exposons ici brièvement quelques considérations supplémentaires quant à leur place au sein des situations expérimentale.
La notion de preuve visuelle a été abordée dès l'année de première, avec notre classe de première S européenne, à l'occasion de la séquence portant sur les nombres triangulaires. Le concept de Gnomon a alors été simplement évoqué mais n'a pas fait, à cette époque, l'objet d'une étude spécifique. Ce n'est qu'avec la classe de terminale S européenne que nous avons souhaité définir comme faisant partie des savoirs visés les concepts de preuve visuelle et de gnomon.
Les élèves, que ceux-ci soient en première S ou en terminale S, ne sont pas concernés directement par les obstacles relevés par Coulange et Grugeon (2008), leurs recherches visant en effet *à la fois à diagnostiquer des difficultés d'élèves en algèbre et à outiller les enseignants de situations d'apprentissage adaptées aux difficultés repérées* (ibid.). Cependant, les situations expérimentales vont s'appuyer sur des schémas élaborés en grande partie par les élèves eux-mêmes lors des phases adidactiques. Ces schémas doivent faciliter la mémorisation de formules algébriques sans restreindre celles-ci à des énoncés perçus comme de simples énoncés formels, c'est-à-dire dont le sens n'est pas véritablement acquis pour les élèves, ou encore, dont le sens ne repose pas sur une expérience antérieure de la nécessité (Sackur et al, 2005). Les élèves vont donc avoir à revisiter leur rapport à l'algèbre en prenant à leur charge l'élaboration de formules adéquates.
Le concept de preuve visuelle ne fait pas partie officiellement des objectifs institutionnels en matière d'enseignement des mathématiques en France. En ce qui nous concerne, il se trouve que nous avons suivi une formation en histoire des sciences et c'est à cette occasion que nous nous sommes familiarisé avec cette notion. Notre volonté de choisir ce thème comme élément

essentiel de certaines de nos situations expérimentales résulte en partie du caractère historique attaché à cette notion et permet donc un élargissement éventuel transdisciplinaire. Ce point n'a cependant pas fait l'objet d'un savoir visé spécifique car nous avons cherché à mettre l'accent avant tout sur l'articulation ou l'adéquation entre composante cognitive et composante linguistique dans la réalisation de tâches spécifiques. Il nous restait à définir avec précision en quoi consisteraient de telles tâches si nous choisissions comme thème d'étude celui des preuves visuelles.
Nous allons en donner quelques éléments dans ce qui va suivre car nous avons déjà indirectement abordé la question au paragraphe I.2 à propos des concepts théoriques mobilisés spécifiquement pour la réalisation et les contenus des situations expérimentales. Depuis quelques temps, on voit régulièrement surgir sur le net de nouvelles preuves visuelles portant sur divers domaines des mathématiques. Certaines sont extrêmement originales et ne concernent pas seulement l'arithmétique combinatoire. On relève néanmoins sur les forums une grande disparité quant aux avis que portent les internautes « spécialistes » sur le *caractère convaincant* de ces preuves. Toujours est-il que l'on continue de trouver des preuves visuelles plus classiques mais avec des modes d'illustration ou de schématisation renouvelés. Plusieurs articles de recherche récents (voir Alsina et al, 2010 ; Miller, 2012 ; ou encore Rinvold et Lorange, 2011, 2013) portent sur les rapports entre preuves visuelles (concernant des propriétés arithmétiques) d'une part et d'autre part, les notions de multimodalité, de concepts et d'objets mathématiques, ainsi que sur la problématique de l'articulation entre ces preuves et les preuves par induction de type algébrique.
Nous allons examiner de plus près ces aspects afin de rendre optimale l'élaboration des situations expérimentales. Nous précisons que les questions didactiques spécifiquement liées à la nature et à la forme des preuves par induction algébriques (voir Grenier, 2003, 2012), ne donneront pas lieu à un examen particulier car, d'une part les quantificateurs ne sont pas utilisés en secondaire et d'autre part, les élèves qui suivent l'enseignement européen en Terminale S ont déjà, au moment des séances expérimentales, une assez bonne maîtrise de ce type de démonstration. Il en va autrement pour les concepts que nous avons spécialement développés (cf I.2) au niveau théorique pour pouvoir, non seulement établir un parallèle entre preuve visuelle et preuve par induction, sur un plan théorique, mais pour pouvoir aussi en faire un objectif en terme de savoir visé par les élèves. En effet, un de nos objectifs est de proposer un exemple intéressant de connaissances qui soient, certes à institutionnaliser, mais qui sont pourtant non complétement codifiées car situées en marge du savoir officiel curriculaire voire disciplinaire (en l'occurrence, le parallèle entre preuve visuelle et preuve algébrique) et de pouvoir observer leur émergence puis leur consolidation, dans des formulations en L2.

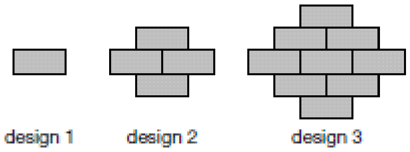
II.2. Expérience de la nécessité en mathématiques centrée sur le concept de « pattern »

Nous avons déjà évoqué à quel point le fait de faire l'expérience de la nécessité et l'épreuve des objets sont essentiels en matière d'apprentissage en mathématiques.
Nous illustrons ici, à travers l'étude d'un exemple d'activité (exemple en L2[137]), ce que peut recouvrir cette idée et ce que le fait de ne pas en être conscient peut avoir pour conséquences.

[137] Activité correspondant au chapitre 1*Patterns in Mathematics* paragraphe 6 p6
consultable en ligne à l'adresse suivante : http://www.math6.nelson.com/parentcentre/pdf/01-NEM6WBAns.pdf

L'activité proposée porte sur le terme des *patterns*.
Elle débute par la donnée d'un « pattern » (entendre ici une succession de schémas particuliers dont on attend une généralisation du principe de construction) :

1. Use this pattern.



Puis vient la première question :

a) How many boxes are in design 8?

Make a plan to solve the problem.

Suggested answer: I don't want to draw design 8, so I'll solve a simpler problem. I'll draw design 4.

I'll make a table to compare the design number with the number of boxes.

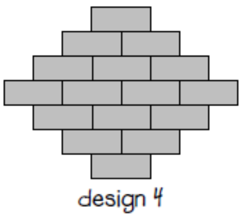
I'll look for a pattern in the numbers in the table and see if the number of boxes for design 4 matches my drawing. Then I'll extend the table to design 8.

La question, qui s'adresse à des élèves de niveau K12, correspond à ce que l'on pourrait appeler en France une tâche complexe.
La solution proposée (suggested answer) incite l'élève à appliquer la consigne dans un cas plus simple (à celui correspondant au fait de dessiner ce qui se passe au rang 8) en regardant ce qui se passe au niveau immédiatement supérieur (rang n=4) puis en demandant de reconnaître un *pattern*, (c'est-à-dire une règle pour l'instant observable seulement de façon générique), tout en considérant que cela est sufisant pour dessiner la bonne figure.
Ainsi donc la validité du principe n'est pas du tout abordée. Le texte donne à penser que cela va ou doit aller de soi chez l'élève.
Or le mathématicien sait que si plusieurs termes sont donnés, cela ne signifie pas que la suite soit déterminée (sous-entendu de façon *nécessaire*).

Voici la consigne suivante ainsi qu'une proposition de solution :

Make a plan to solve the problem.

Suggested answer:



Design number	Number of boxes
1	1
2	4
3	9
4	16

I notice that if I multiply the design number by itself, I get the number of boxes.

1 x 1 = 1

2 x 2 = 4

3 x 3 = 9

4 x 4 = 16

For design 8, I predict that there will be 8 x 8 = 64 boxes.

L’activité qui , rappelons-le, sert d’illustration à ce que pourrait donner une séance sur le thème des patterns, se termine par la question suivante :

b) How many boxes are in design 10?

Suggested answer:

10 x 10 = 100

100 boxes

Par ailleurs, sur la partie droite du document d’origine, se trouve une fiche-méthode (At-Home Help) à destination des élèves :

To solve some problems, it is easier to solve a simpler problem.

Make a Plan

Organize data using the simpler problem. If possible, use a table to arrange numbers and drawings.

Carry Out the Plan

Look for a pattern to relate the columns in your table.

Try to find an operation that works for all the rows in your table.

Write a pattern rule.

Check that your pattern rule works for the next simple problem. Draw a picture, if necessary, to check.

Use the pattern rule to solve the original problem.

Comme on peut le voir ci-dessus, il n’est question ici que d’une *vérification au rang immédiatement supérieur* : « Check that your pattern rule works for the next simple problem ».

Les concepteurs de cette fiche-méthode (et de l’ensemble de l’activité, d’ailleurs) considèrent que tout ceci est suffisant pour *résoudre* le problème (« *Use the pattern rule to solve the original problem*. »).

Le simple fait d’établir une correspondance entre les colonnes du tableau (voir ci-dessus le tableau de la solution suggérée, en référence à la consigne « *relate the columns in your table*”) et d’avoir amené les élèves à deviner la règle serait donc, d’un point de vue cognitif, suffisant pour donner son sens à l’activité.

Il ressort de ce premier examen que l’activité évacue toute *expérience de la nécesité*.

Or, il est manifeste que le la représentation figurée, en tant que *pattern*, et donc avec l’idée de généralisabilité que cette notion implique, pouvait être rattachée à la notion de *preuve visuelle*, en lien avec *les nombres triangulaires.*

En effet, une redisposition des briques en deux blocs triangulaires correspondant à des nombres *consécutifs*, et un regroupement des deux nombres figurés correspondants sous forme de nombre carré auraient suffi à apporter la *convaincance* nécessaire à la règle sous-jacente au *pattern* :

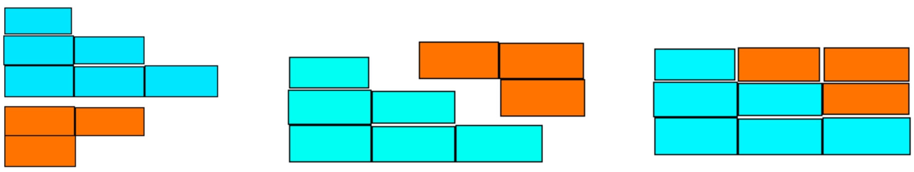


Figure 5.2

On peut éventuellement adjoindre à cette série de schémas une correspondance entre le dernier schéma (schéma de droite sur la figure 5.2) et une figure composée de carrés-unités plutôt que de rectangles-unités (comme ci-dessous, figure 5.3) :

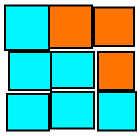


Figure 5.3

Nous avons trouvé de nombreux autres exemples sur le net. Certains se rapprochent davantage de ce que nous appelons en France problèmes ouverts ou tâches complexes.
Ils peuvent donner lieu à des recherches en groupes, en autonomie totale ou partielle, et peuvent donc très bien être appréhendés et modélisés en référence de la théorie des situations avec les questions d'anticipation, de régulation par l'enseignant et de contrainte (dans l'élaboration de la phase adidactique ou fortement adidactique) que cela implique.
Voici un autre exemple intéressant. Il est d'ailleurs possible de s'en inspirer à des fins de consolidation, linguistique et mathématique, autour du concept de *pattern*, avec les connotations de *geometric*, *schematic*, *graphical* et aussi en tant que *number pattern*.
L'exemple que nous proposons ci-dessous concerne les inverses d'entiers successifs[138].

Laboratory Investigation 5.3

Fraction Patterns

This tower of bars represents fractions with denominators 2 through 12. Each geometric pattern corresponds to a pattern of fractions. The edge of a piece of paper or straight edge can be used to line up equalities and inequalities.

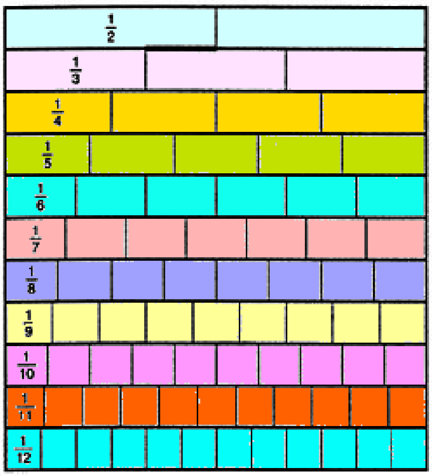


Figure 5.4 Patterns et fractions

Starting Points for Investigations

1. Investigate the tower for patterns, there are many. For each geometric pattern, write the corresponding number pattern.
2. One student noticed that the difference between the 1/2 bar and the 1/3 bar is one-half of 1/3 (see dark line). That is, 1/2 - 1/3 = 1/2 x 1/3. Does 1/3 - 1/4 = 1/3 x 1/4 ? Does 1/4 - 1/5 = 1/4 x 1/5 ?

[138] Consultable à l'adresse suivante :
http://highered.mcgraw-hill.com/sites/007351957x/student_view0/chapter5/section3/

3. If the line at the end of the 1/2 bar (top of tower) is continued down, it divides one of the thirds in half. This shows that 1/2 = 1/3 + 1/2 x 1/3. Do the bars show that 2/4 = 2/5 + 1/2 x 1/5 ? or that 3/6 = 3/7 + 1/2 x 1/7 ?
4. What other patterns can you find?

Cet exemple d'activités nous semble très intéressant. Nous laissons au lecteur, le soin d'envisager les questions de généralisation et de passage à une formulation algébrique car nous avons déjà détaillé ailleurs ce genre de questions.
Nous faisons remarquer au passage qu'il est possible d'exploiter davantage la figure. En effet, après rotation de celle-ci, nous pouvons voir apparaître plusieurs « *patterns* » relatifs aux fonctions (voir figure 5.5).

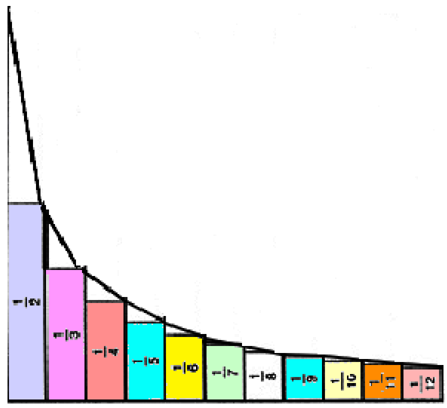
$x \mapsto \frac{1}{x}$ $x \mapsto \frac{2}{x}$ … $x \mapsto \frac{k}{x}$ où k est un entier supérieur ou égal à 1…	

Figure 5.5 : plusieurs patterns à partir d'une même figure

II.3. Conscience linguistique (language awareness) et considérations psychologiques

Si nous examinons d'un point de vue linguistique le document **authentique** (voir premier exemple cité au VII.3.b ci-dessus) relatif à une activité que nous avons considérée en étroite relation avec l'expérience de la nécessité en mathématiques, il apparaît que ce document est très riche en ce qui concerne des collocations susceptibles d'être réutilisées rapidement dans une situation CLIL-mathématiques.
Les expressions phraséologiques réutilisables sont par exemples :

make a plan
solve a simpler problem
organize data
to arrange numbers and drawings
operation that works for
write a pattern rule
check that the rule works
use the pattern rule to check

extend the table
suggested answer (et non pas "proposed answer")
compare the design number *with* the number of boxes.
look for a pattern *in* the numbers
See if …. matches my drawing. (fonctionnement transitif de *match* dans ce cas)

Par ailleurs, le document contient des figures dont le caractère visuel a une influence directe sur les processus de compréhension et il est par conséquent conseillé, selon nous, de reprendre ce type de figure dans le cas de l'élaboration de documents de synthèse ou encore ayant pour objectifs une consolidation d'éléments institutionnalisés en classe du point de vue mathématique. Un schéma ou une figure peuvent permettre *de rattacher l'expérience vécue en classe* aux notions abordées et sont donc fortement susceptibles de *donner un caractère contextuel* aux éléments *appelés à être mémorisés*. D'un point de vue psychologique, des expressions rencontrées dans une activité où l'élève se sera impliqué d'une manière autonome et fortement volontaire (réalisation d'une tâche complexe ou résolution d'un problème ouvert de manière a-didactique) vont apparaître comme *dignes d'être mémorisées.* Leur utilisation en contexte leur attache un sens bien défini. Une adjonction d'autres expressions (synonymes ou partageant un caractère sémantique) apparaîtra comme une volonté de l'enseignant de consolider ce que les élèves ont déjà rencontré et entraînera en tout cas effectivement une consolidation en mémoire des représentations (cognitives) *associées aux termes lexicaux centraux* (pattern, extension, rule, matching,…). C'est en ce sens que l'on pourrait (presque, mais pourquoi pas) parler d'expérience (psychologique) de la nécessité linguistique, c'est-à-dire de la nécessité d'apprendre des termes et expressions linguistiques. Il s'agit en fait de raisons profondes qui conditionnent la motivation des élèves et les incitent à fournir des efforts (de mémorisation).

Le climat de confiance qui doit pouvoir s'installer entre élèves et enseignant dépend donc fortement du choix, par l'enseignant, des activités, de leur progression et de la focalisation sur un type d'expressions et sur la justification de leur emploi. Si les expressions sont effectivement réutilisées par la suite, dans des contextes similaires ou dans des situations où un nouveau type de fonctionnement d'une connaissance mathématique va émerger, l'élève trouvera là un moyen d'avoir prise sur la situation directement en L2, quasiment recourir à la L1, et ne pourra que ressentir un sentiment de satisfaction effective.

Nous terminons en insistant sur le fait que les documents authentiques (trouvés sur le net, ou ailleurs) doivent souvent être adaptés, voire complètement réagencés, afin de constituer des documents véritablement intégrés.

Comme nous l'avons montré au chapitre 5, le mot-concept *pattern*, terme polysémique, utilisable dans une très large gamme de situations, représente un excellent candidat à un prolongement transversal du répertoire didactique (dans tous les sens du terme).

Une expression telle que « *see a growing pattern* », prise isolément, fera apparaître l'impossibilité de lui proposer une unique traduction. Le repérage contextuel sera la seule manière de lever l'ambigüité. En effet, en mathématiques par exemple, cette expression évoquera un phénomène de croissance (au niveau d'une configuration schématique ou géométrique liée aux suites, par exemple) ; relativement à un phénomène ou à un comportement, l'expression évoquera l'idée de quelque chose (attitude, phénomène) qui *a tendance à se généraliser, à se répandre,* etc... L'expression devra donc, d'un point de vue didactique, être présentée avec plusieurs micro-contextes dont le thème devra être manifeste.

Toujours en référence à notre idée d'expérience de la nécessité (au sens cognitif et langagier), nous montrerons que le repérage par les élèves et par l'entremise du professeur des traits conceptuels (minimaux) associés au concept (relativement à la sémantique cognitive) que fournit une analyse sémique poussée, sera perçu comme une condition nécessaire de la perception du sens dans la multitude de contextes d'utilisation nouveaux, non évoqués en classe, mais aussi comme condition nécessaire et largement suffisante pour une production de syntagmes authentiques variés (du type [Verbe pattern] par exemple, ou [Adj. pattern] par exemple).

Il est clair que l'on présuppose ici que l'élève dispose déjà d'un lexique minimal (verbes liés à la perception, la visualisation, la reconnaissance, etc...). Dans ce cas, il pourra de lui-même, et sans hésitation, composer les syntagmes [usual], [typical], [standard], [behaviour], [quite a new], [a totally different], etc…avec [pattern].
Du point de vue de la *reformulation* que l'enseignant pourra être conduit à effectuer pour *lever une ambigüité* de nature sémantique relativement à un emploi particulier de pattern, il apparaîtra comme nécessaire, aux yeux des élèves, que les idées de *règle, motif, exemple représentatif*, etc..., associées à *pattern*,, et la maîtrise des items L2 correspondants, à savoir, *rule, design, representative example, exemplar*, etc..., fassent partie de leur répertoire lexical et sémantico-conceptuel. L'enseignant, par retour réflexif sur la langue, insistera alors sur la nécessité d'un repérage d'informations à partir du contexte, et complétera sa description en insistant également sur la nécessité d'avoir une conscience réfléchie des règles syntaxiques complémentaires susceptibles de participer à la construction du sens. Ces dernières ne sont pas nécessairement explicitées chez ou auprès des natifs mais doivent l'être pour un apprenant L2 (cela est nécessaire déjà en L1, lorsqu'on est amené à distinguer, dans une perspective de désembiguïsation, les types [Nom Adj.] ou [Adj. Nom] dans le cas des syntagmes [homme grand] et [grand homme], par exemple).

II.4. Schématisation et preuve multimodale

Nos séquences expérimentales vont concerner la notion de preuve visuelle, voire de preuve multimodale. Nous développons ici quelques considérations de nature théorique ; elles portent sur des points développés spécifiquement pour les séances expérimentales. Les preuves visuelles sont des preuves appelées parfois preuves sans mots (voir chapitre 3, I.4.). Celles que nous considérerons porteront sur des propriétés arithmétiques. Les concepts que nous allons introduire sont ceux d'implicite et d'explicite schématique, de principe d'extension. Nous établirons un parallèle entre les manipulations concrètes, la schématisation, l'explicitation (schématique et linguistique) de ce que nous appelons principe d'extension (principe algorithmique) et les éléments-clés associés à une démonstration par récurrence (initialisation, hérédité, etc…).
Nous commençons par examiner le cas d'une propriété arithmétique relativement simple. Elle concerne la somme des entiers impairs consécutifs. Formellement, elle se traduit par :
$1+3+5+.....+(2n-1)=n^2$

Pour n=2, l'égalité s'écrit : $1+(2\times 2-1)=1+3=2^2=4$

Pour n=3, elle s'écrit : $1+3+(2\times 3-1)=1+3+5=3^2=9$

Visuellement, la propriété peut être traduite par ce qu'il est fréquent d'appeler une « Preuve Visuelle » à propos de laquelle nous discuterons plus loin du statut de preuve. Cette preuve visuelle repose sur la délimitation visuelle de « zones » en forme de L. Ces zones spatiales planes (dans ce cas), relatives à la **disposition** d'objets schématisés. Il s'agit en l'occurrence d'une représentation figurée de boules mais ces boules figurées ainsi agencées, tout en renvoyant à des objets réels, constituent ce que l'on appelle des gnomons.
Sur la figure ci-contre[139], la propriété est illustrée, figurée, pour une valeur finie, précise de *n*. Ici, *n*=5 et la figure correspond à une Preuve Visuelle de la propriété.

[139] Sur cette figure, nous avons délimité les zones pour faire apparaître des *quasi-équerres*. Ceci nous permet de justifier l'image que nous avons adoptée au niveau de notre description, à savoir celle d'*emboîtement*.

Les Gnomons sont colorés, de couleurs différentes, la figure apparaissant comme un emboîtement de gnomons successifs.
La figure 5.6 correspond à l'égalité 1+3+5+7+9= 5².

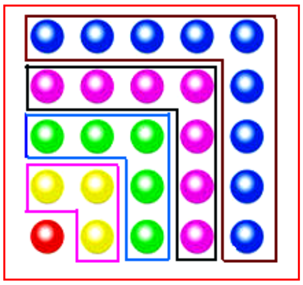
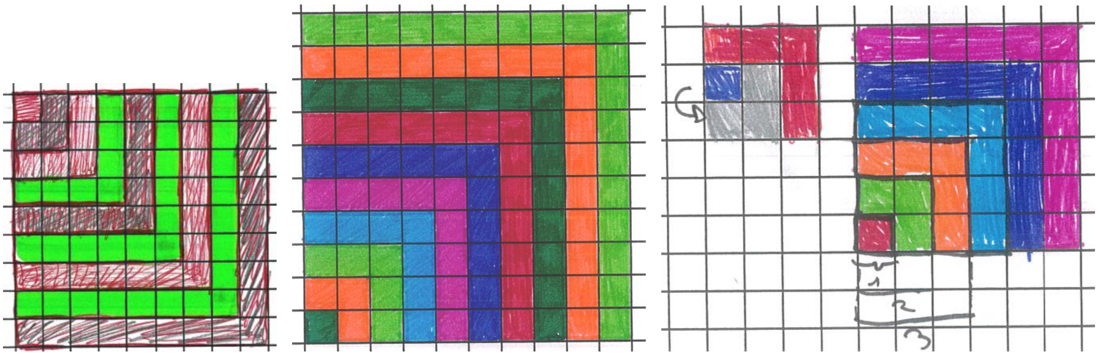


Figure 5.6 Mise en relief des gnomons

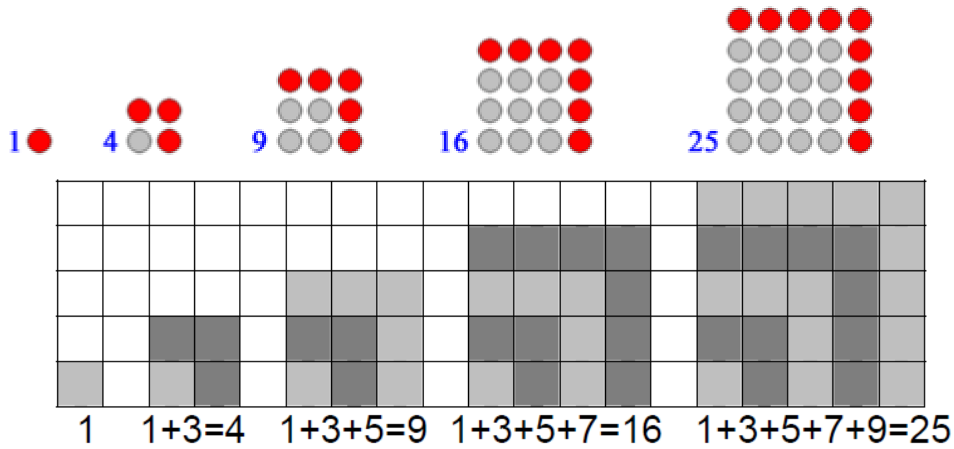
La notion de gnomon remonte à l'antiquité et a été étudiée dans le domaine de l'histoire des sciences, en rapport avec les conceptions mystiques des nombres que l'on attache aux Pythagoriciens. Elle renvoie à une manière d'appréhender les nombres physiquement et de manière figurative. Dans l'exemple que nous considérons, les gnomons apparaissent comme parfaitement emboîtés lorsqu'on les regarde comme des sortes d'équerres (c'est-à-dire qu'ils peuvent être juxtaposés sans espaces vides) et révèlent ainsi une figure globale de forme carrée. La perception active qui permet cela est réalisée en rapport avec le phénoménologique mais de manière incontestable (tout le monde voit un carré). La **généricité du schéma est ici suffisamment forte** pour que l'on accepte assez facilement la possibilité d'une généralisation de la propriété arithmétique sous-jacente.
D'un point de vue didactique et comme nous l'avons déjà mentionné, la découverte par les élèves de la propriété peut être réalisée par le biais d'une situation adidactique, ce que nous avons d'ailleurs effectué avec l'une de nos classes.
A cet égard, nous avons déjà fait allusion en détail à la place essentielle de l'expérience de la nécessité.



Productions d'élèves

Figure 5.7

La figure ci-dessous illustre comment l'on passe naturellement d'une figure correspondant à un rang donné à la figure suivante, c'est-à-dire **par ajout d'un gnomon** (correspondant à un nombre impair de boules).



Gnomons successifs et extension d'une figure

Figure 5.8

Conforté par les réactions très positives de nos élèves, nous avons décidé d'introduire le concept de « convaincance » par le biais d'un néologisme signifiant tout simplement « caractère convaincant » (le terme *convincingness* existe en anglais mais n'a pas le statut de concept), en l'attachant à une preuve visuelle mais aussi, de manière générale, à une preuve multimodale.

Même s'il n'est pas dans nos intentions de chercher à quantifier cette notion par des *degrés,* nous nous en servirons dans ce paragraphe ainsi que dans la partie expérimentale.

D'un point de vue institutionnel, la notion de preuve visuelle ne peut pas (encore) être considérée comme devant faire partie de la culture mathématique des enseignants et elle ne constitue pas non plus d'ailleurs un objectif des programmes. Néanmoins, elle est essentielle pour notre propos car on peut lui associer une composante langagière dès que l'on cherche à expliciter (en langage naturel) le schéma, la figure, qui, en quelque sorte, condense à la fois la propriété et l'idée de preuve, en un sens que nous allons définir.

D'un point de vue langagier et cognitif, la preuve visuelle est l'occasion d'examiner des interactions extrêmement riches (multimodales) et de retrouver l'enracinement originel de l'arithmétique algébrique dans le phénoménologique, dans la réalité sensible.

Nous allons nous appuyer sur les descriptions fines que nous avons déjà mentionnées relativement aux notions de manipulations idéalisées. Dans un premier temps nous examinerons le statut de preuve en ce qui concerne le cas de la preuve visuelle particulière (celle concernant la somme des entiers impairs).

Nous examinerons de près le rapport qu'elle entretient avec une preuve algébrique classique, en l'occurrence une preuve par induction (démonstration par récurrence).

Nous allons pour cela être amené à prolonger les éléments implicites étroitement liés à son caractère générique par une explicitation à la fois schématique et linguistique.

Dans la suite de la partie expérimentale, et relativement à la propriété concernant la somme des cubes des entiers consécutifs, nous irons même plus loin en prenant aussi en considération le lien existant entre la démonstration physique, matérielle (avec la gestuelle qui va de pair) et l'expression verbalisée du principe d'extension. Qui plus est, cela sera effectué en L2.

L'objectif de cette séance était de déboucher sur *un prolongement idéalisé de l'expérience concrète*, celle-ci reposant sur la manipulation *d'un nombre fini de cubes.*

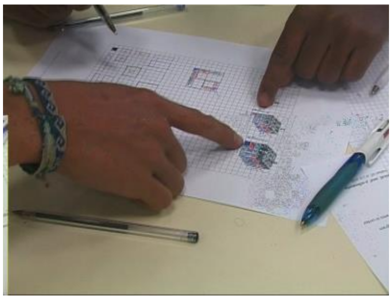
 

Figure 5.9 Importance de la gestuelle et des déictiques linguistiques

Mais revenons à notre exemple. La perception de la numéricité spécifique du nombre, lorsque les objets sont soit présents physiquement, soit schématisés, est une opération cognitive classique, impliquant les sens et le pouvoir d'abstraction. Ainsi, par exemple, le nombre quatre est ce qui reste lorsque nous faisons abstraction des caractéristiques phénoménologiques des objets (lorsqu'il y en a quatre).
Ce nombre se réduit, lorsqu'on se focalise sur son sens, *au simple fait d'être à quatre*. Il apparaît comme un invariant partagé par toute collection de quatre objets et engage la perception active.
Les nombres, lorsqu'ils ne sont pas trop grands, sont facilement identifiés, reconnus, voire ressentis. Lorsque l'on passe à la généralisation, seul le caractère relationnel qu'il traduit est saisissable. Il est matérialisé par une objectivation symbolique.
Par ailleurs, le fait (ou la propriété) de pouvoir passer d'un nombre entier au suivant sans souci particulier est évidemment clair, indubitable. Il n'est jamais remis en question et il s'enracine dans l'expérience phénoménologique, dans la fréquentation avec les objets concrets lorsqu'on les distingue et qu'on les dénombre.
Néanmoins, ce « fait » est implicite dans une écriture telle que :
$S_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1)$ qui correspond à la somme de *n* entiers impairs consécutifs.
L'utilisation des *points de suspension* repose, d'une part sur la propriété *implicite*, sous-jacente, qui permet de relier chaque entier au suivant, mais aussi sur un principe d'extension. Ce dernier est tel que le nombre fini d'étapes, ou encore le nombre de termes à ajouter, noté *n*, est à la fois indéterminé et supposé fixé. Pourtant cela ne choque pas le moins du monde le mathématicien car cela fait partie de sa culture mathématique. Signalons au passage que ce fait est masqué lorsqu'il recourt au symbole $\sum$. En effet, S_n peut s'écrire $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$, c'est-à-dire sans aucun point de suspension. Ceci est possible car dans une telle écriture, on exprime chaque terme, à savoir 2*k*-1, en référence à son rang *k* dans le processus d'addition.
Les enseignants connaissent bien la réalité, pour les élèves, de l'obstacle représenté par la présence du symbole $\sum$ et sont souvent contraints de revenir à la notation « plus » explicite avec points de suspension.
Nous souhaitons maintenant discuter du principe d'extension, principe algorithmique, qui est implicite dans la preuve visuelle lorsqu'elle est présentée de manière traditionnelle.
Dès lors que l'on compare ce principe à celui d'hérédité d'une démonstration par récurrence (*inductive step in a proof by induction*), il apparaît comme similaire, pour ne pas dire identique.

Dans le cas d'une démonstration par récurrence (nous dirons PI pour Proof by Induction), ce principe repose sur la logique. Dans le cas d'une PV (preuve visuelle), il doit reposer sur la notion de *convaincance phénoménologique*.
Nous montrerons ci-après **comment expliciter ce principe d'extension au niveau schématique**.
Mais avant cela, nous rappelons le principe de des PI :
Etant donné une propriété notée (P_n), prouver (P_n) par induction sur l'entier *n*, pour *n* allant de 1 à l'infini, il faut :

Vérifier que la propriété est vraie au rang *n*=1, c'est-à-dire que (P_1) est vraie.

Puis, en supposant que (P_n) est vraie pour un certain entier *n*, prouver que (P_{n+1}) est vraie (c'est-à-dire que la propriété est alors nécessairement vraie au rang suivant, à savoir $n+1$).

Ces deux étapes (la deuxième étant appelée hérédité), lorsqu'elles sont prouvées, permettent de conclure que la propriété (P_n) est vraie pour tout entier *n.*
L'hérédité, dans une PI est l'étape qui, en général, demande une véritable *démonstration*. La justification, très souvent, s'appuie sur des propriétés, des théorèmes apparemment extérieurs. Ils sont déjà établis et ne seront pas remis en question relativement à leur signification et à leur validité.
En ce qui concerne la propriété relative à la somme des entiers impairs, il est nécessaire que nous puissions passer d'une étape *n*, c'est-à-dire ici d'une configuration de forme incontestablement carrée et faisant figurer les entiers impairs de manière tout aussi incontestable, à l'étape suivante pour laquelle on puisse percevoir la même chose et de telle manière que ceci puisse être fait pour un certain entier *n* indéterminé.
Nous considérons, de la même manière que l'on s'autorise les points de suspension dans une écriture formelle, que nous pouvons les utiliser sur un schéma. Nous parlerons alors de traduction schématique du principe d'hérédité, c'est-à-dire en actualisant une autre manière de voir. Nous recourrons ainsi à un schéma particulier et nous y ferons référence par le biais de l'expression d'*hérédité schématique*.

II.5. La découverte du gnomon : l'occasion d'une situation adidactique

En ce qui concerne la notion de gnomon, nous avons déjà évoqué le lien que cette structure, ce « *pattern* », entretient avec la propriété concernant la somme des entiers impairs consécutifs ($1+3+5+.....+(2n-1)=n^2$). Au niveau de notre propre progression, nous avons effectué avec l'une de nos classes (terminale européenne), et sans que cela débouche sur une analyse fine, une situation que nous présentons ici-même pour plusieurs raisons. Le gnomon est une notion centrale et récurrente dans les situations expérimentées. La situation d'introduction repose sur des compléments théoriques et il se trouve que les productions des élèves permettent elles-mêmes de saisir et d'illustrer les considérations théoriques. Reporter la description et l'analyse apriori de cette situation d'introduction au gnomon au chapitre 7 aurait alourdi la rédaction et donc la lecture de ce chapitre.
En ce qui concerne la situation d'introduction, nous signalons que nous avons procédé *de manière adidactique* pour amener les élèves *à découvrir par eux-mêmes* la propriété.

C'était donc pour les élèves *l'occasion de faire l'expérience de la nécessité* relativement à cette propriété. La convaincance s'était traduite par une proportion de quatre élèves satisfaits, entièrement convaincus, sur cinq.

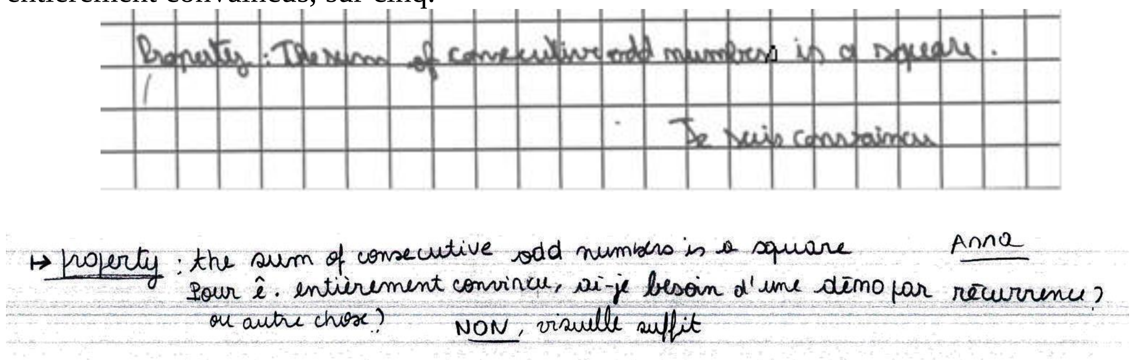


Figure 5.10 Productions d'élève

Voici une réponse très intéressante. L'élève fait appel à ses connaissances épistémologiques et philosophiques pour se déclarer « non convaincu » (réponse « oui » à la question « avez-vous besoin d'une démonstration par récurrence pour …).

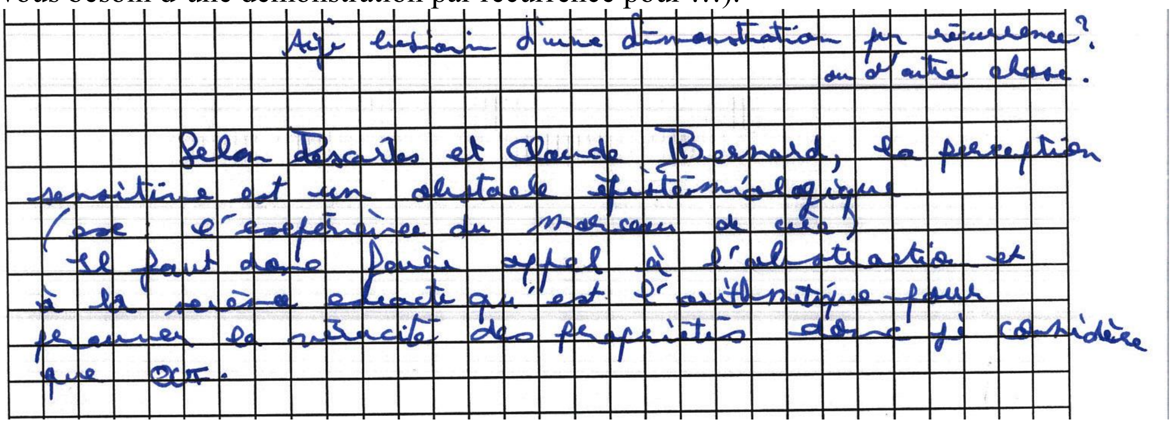
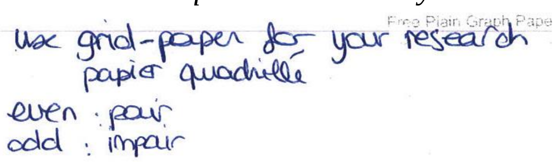


Figure 5.11 Production d'élève

L'expérience de la nécessité peut donc également passer par une preuve visuelle et non pas forcément par une preuve algébrique classique du type de celle qui est associée à la propriété à laquelle nous nous intéressons.

La question était simplement posée sous la forme :

Odd numbers are hidden in a square. In what way?



La situation était contrainte par le quadrillage et la consigne orale incitant les élèves à colorier.

Les élèves ont produit des schémas (nous en proposons quelques uns) et sont parvenus à formuler la propriété correspondante.

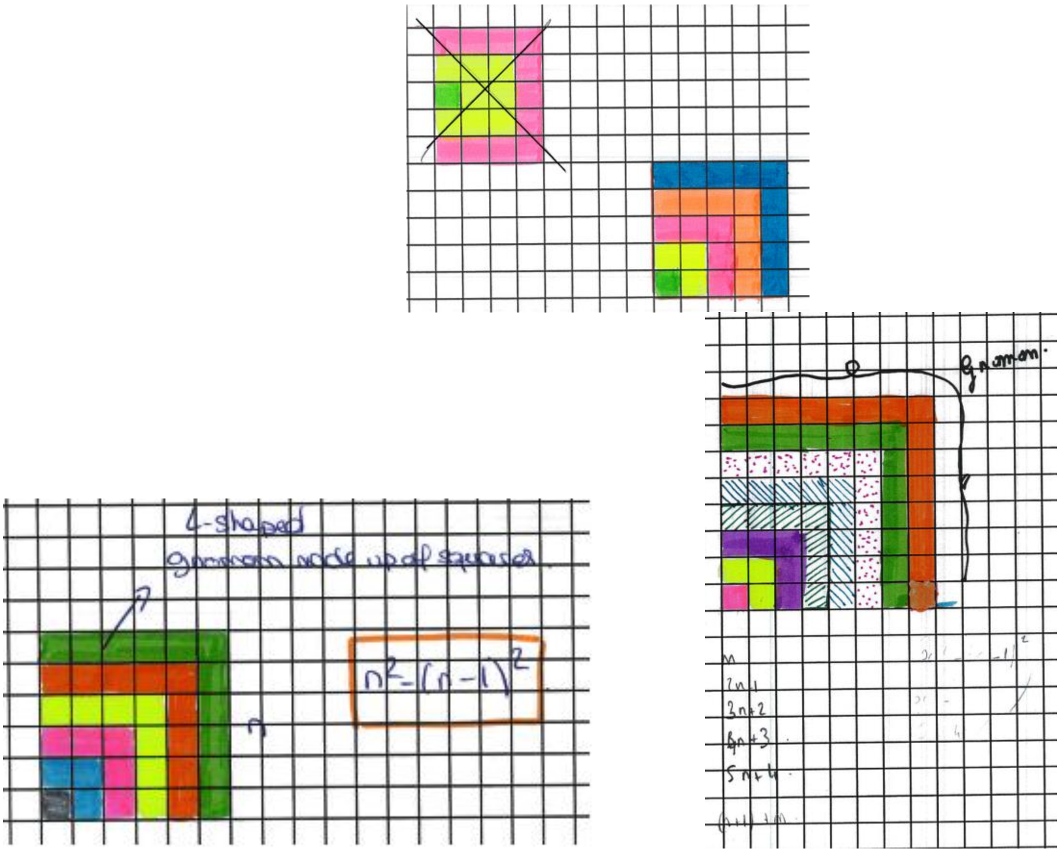


Figure 5.12 Découverte des Gnomons en phase adidactique

Le terme gnomon qui figure sur les dessins a été rajouté lors de la phase d'institutionnalisation.
Il arrive, et nous le détaillons ailleurs, que des élèves tombent sur une propriété ou un argument non prévu, non anticipé.
Dans le schéma ci-dessous, une élève constate que les carrés consécutifs sont alternativement pairs et impairs :

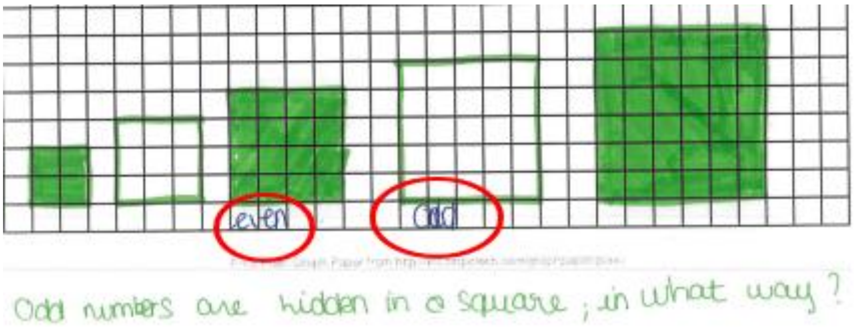


Figure 5.13 Production d'élève

Puis elle reprend par un coloriage plus standard faisant apparaître les gnomons :

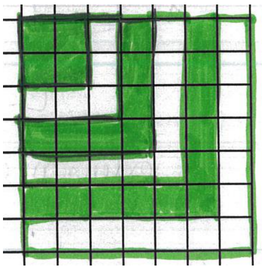


Figure 5.14 Production d'élève

Sur l'exemple ci-dessous, l'élève est influencé par l'une des séances précédentes (il s'agissait d'une preuve visuelle impliquant des « cubes » représentés en perspective). Il y a interférence entre, d'une part, une preuve 3D, basée sur un rapport au concret, par le biais de l'utilisation de vrais cubes, et d'autre part, la séance concernée. Pour cette séance, les élèves ne disposaient que du quadrillage.

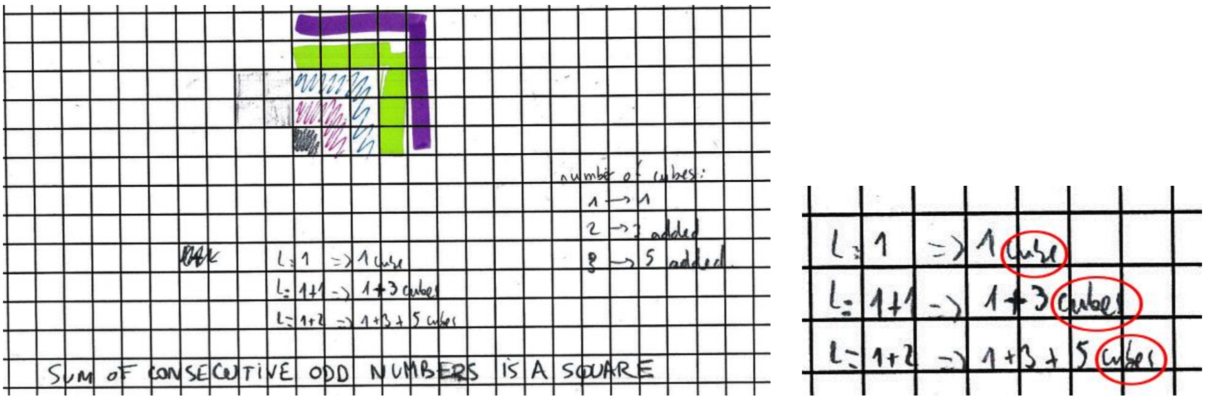


Figure 5.15

On remarquera la correspondance entre le rang (par exemple « L= 1+2 ») et la valeur totale du nombre de carrés-unités (« cubes » dans le texte)

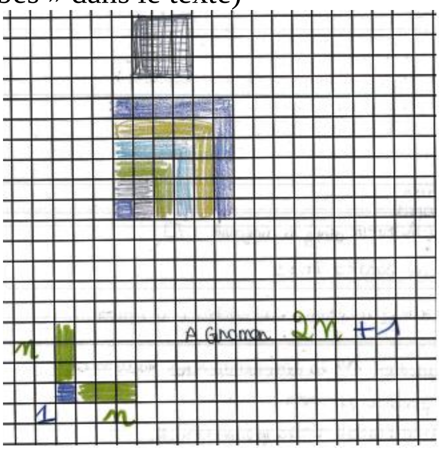
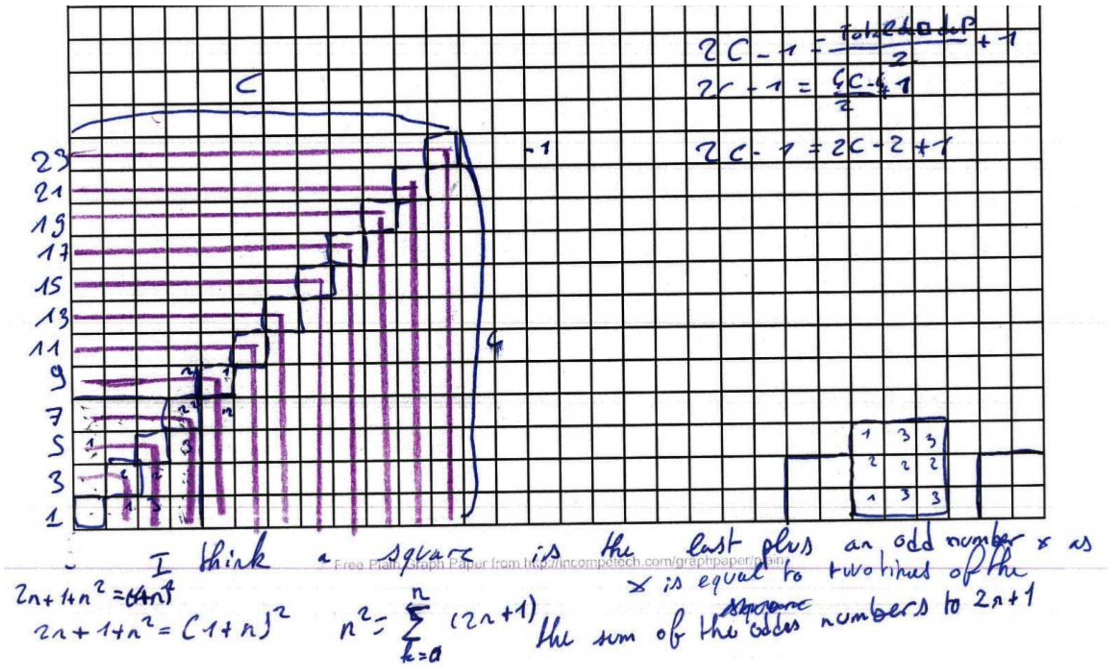


Figure 516

Enfin, voici un schéma illustrant la volonté de l'élève non pas de se raccrocher à l'algèbre mais d'établir une relation de correspondance entre ce que l'élève perçoit et produit (verbalement) relativement à, ou à partir de, la figure et une formalisation algébrique.



Formalisation algébrique

Figure 5.17

La formule générale est presque sous sa forme « rigoureuse » comme on peut le voir ci-dessous :

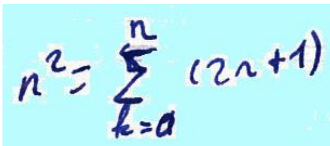


Figure 5.18

La décomposition d'un gnomon sous la forme 2r+1 est explicitée (visuellement).
Le lien de juxtaposition entre les « r » carrés du gnomon et ceux qui sont en contact dans le carré r² est rendu manifeste.
On appréciera le rôle « central » joué par les carrés-unités situés dans l'angle supérieur-droit de chaque carré « r² » et l'extension rendue schématiquement explicite par la diagonale sur laquelle sont situés tous ces carrés.

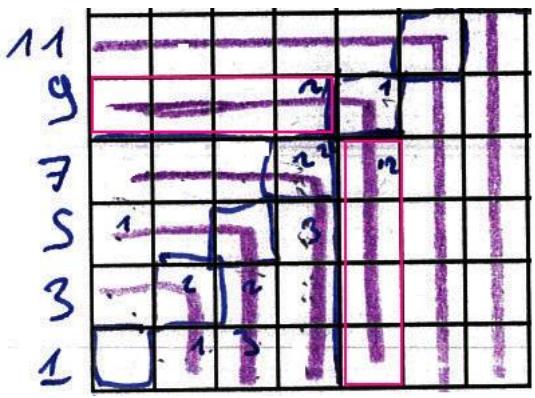
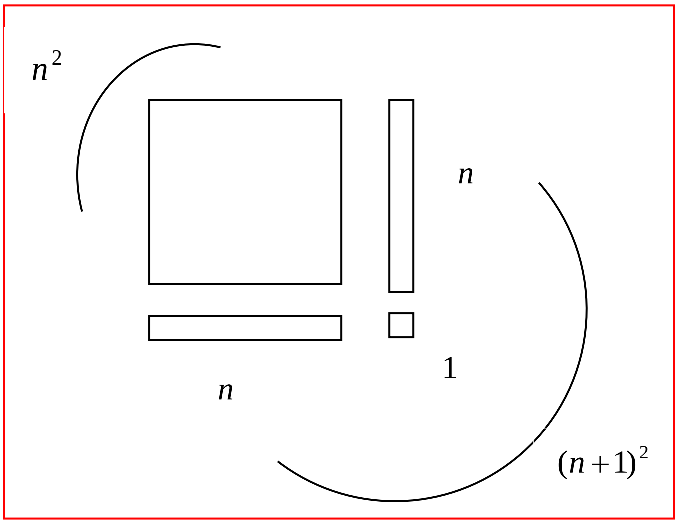


Figure 5.19

Néanmoins, nous ne ferons pas ici d'analyse détaillée exhaustive, même si nous n'avons pu résister à la tentation d'offrir dès à présent une illustration de nos idées en ce qui concerne l'expérience de la nécessité. Ceci s'avère être finalement une première approche relativement à ce que nous observerons lors des analyses suivantes de la partie expérimentale…

III. Etude épistémologique : nouveaux concepts et représentations schématiques

Nous proposons ci-après une modélisation schématique sur laquelle nous nous sommes appuyé lors d'une phase d'institutionnalisation auprès de nos élèves (voir annexes pour le document complet en anglais).
Le dessin ci-dessous (figure 5.20) correspond à l'un des éléments-clés permettant de justifier ce que nous appelons *l'hérédité schématique.*
En l'occurrence, il permet en quelque sorte de montrer pourquoi l'ajout d'un gnomon (ici, il est décomposé en « n +1+ n ») à un carré donne un nouveau carré.



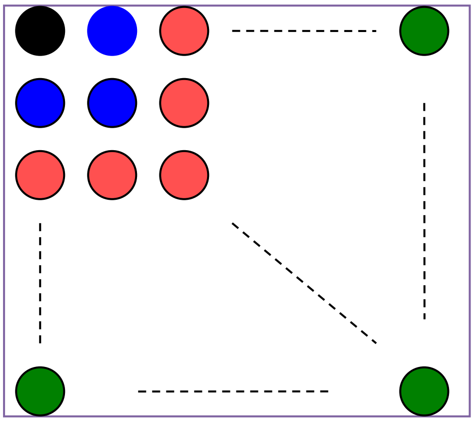
Document prévu pour la phase d'institutionnalisation

Figure 5.20

Sur le plan cognitif, le schéma est l'occasion d'une mise en correspondance sans recours à une verbalisation intérieure, entre des éléments perceptuels et des objets mathématiques figurés. Le symbole n correspond à des rectangles identiques. Le contact potentiel entre, d'une part, les deux rectangles et le carré-unité, et d'autre part le carré associé à n^2, apparaît en parfaite adéquation avec l'idée d'addition et son résultat, à savoir une *somme*. Il y a attachement du signifié abstrait de nombre aux éléments perceptuels ou encore formation d'un interprétant attachant un caractère numérique à un élément perceptuel. Il y a mise en correspondance, au niveau cognitif, entre le representamen n et les éléments figurés du schéma qui ont, ou peuvent avoir, d'autres référents sensibles.
Par ailleurs, la décomposition de la structure du gnomon (L-*pattern*) en deux blocs symétriques (et associés à un symbole algébrique) plus une unité fait apparaître de manière convaincante (et avant tout directement perceptible) le caractère *impair* du gnomon.

A ce sujet, il conviendrait sans doute de rajouter un autre schéma pour que la *convaincance soit la plus forte possible*, en illustrant la propriété sous-jacente à ce que le dessin suivant contiendra également de manière implicite (et qui, sans autre élément schématique, resterait à la charge de l'observateur), à savoir le fait que deux nombres impairs diffèrent de deux unités et que dès lors le dernier terme impair à l'intérieur de la somme des entiers impairs consécutifs relatifs au bloc carré n^2 est nécessairement 2n-1.

Mais ceci n'a d'intérêt que lorsqu'on s'intéresse à la *convaincance qui serait relative à l'adéquation* entre l'ensemble des descriptions proposées et la preuve algébrique (de type PI), et non pas sur la convaincance de la propriété en soi. C'est la raison pour laquelle nous n'avons pas rajouté de schéma à ce sujet.
Le dessin suivant fait apparaître que le carré est constitué de la somme de gnomons, comme explicité dans la légende ci-dessous :

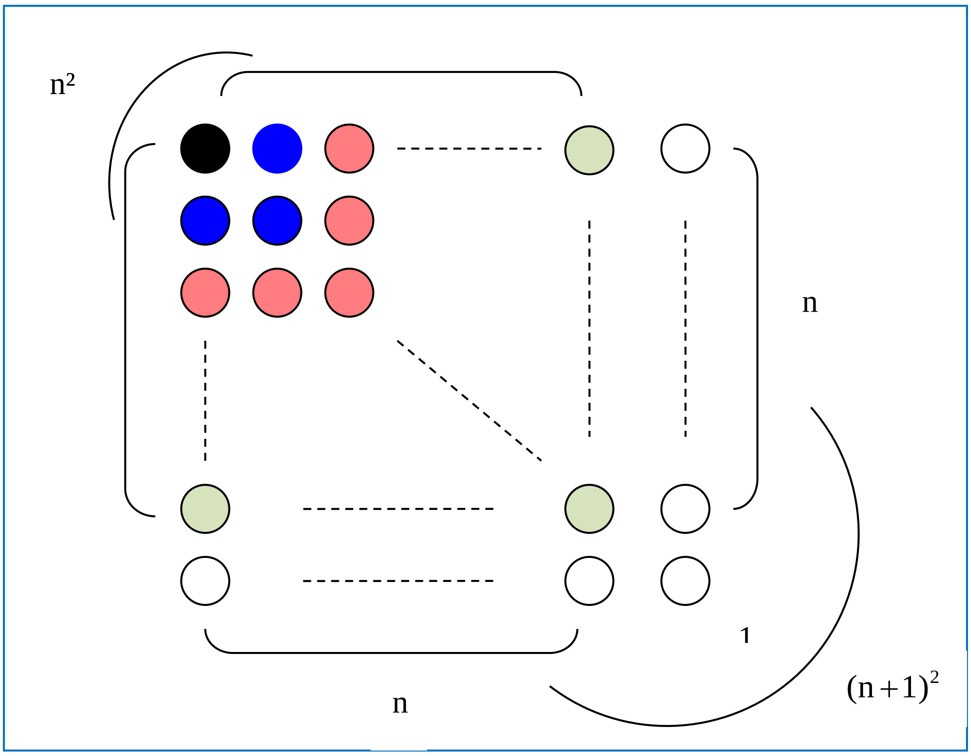


The above picture is necessary to illustrate the fact that a sum of consecutive odd numbers is a square (number).Moreover, it contains an **explicit** principle of extension The possibility of extension is **materialised** by a dotted line (which plays a similar role to suspension dots in the sum 1+3+5+ **…** + (2n+1). The dotted line prompts you to extend (mentally) the diagram, **to extend the pattern**[140]**.**

Figure 5.21 : Document prévu pour une phase d'institutionnalisation

Les *deux facettes évoquées précédemment* vont être regroupées à travers un schéma *explicite condensé* dont la lecture se fait aisément si l'on garde présent à l'esprit l'idée d'hérédité.
La *justification de l'hérédité* est ici (figure 5.22) présentée comme *schématiquement explicitée.*

[140] Le texte et les schémas sont extraits de documents donnés aux élèves suite à plusieurs séances expérimentales et figurent en annexes (Annexe 3).



Document à donner en phase d'institutionnalisation

Figure 5.22

D'un point de vue linguistique et didactique, le champ sémantique lié à la multimodalité fait émerger une occasion très intéressante de recourir à un vocabulaire réutilisable hors contexte mathématique.

Cette manière de procéder rattache les phénomènes d'énonciation à la composante sensitive des processus de cognition (au sens où nous l'avons décrite), en les articulant directement avec une conceptualisation fine des objets schématiques et des objets réels, ainsi qu'avec les interactions possibles aux niveaux concret et idéal.

C'est surtout l'occasion d'embrayer sur un métadiscours sur le langage et la perception ainsi que sur les éléments métacognitifs se rapportant étroitement aux éléments théoriques que nous avons développés (rapport à la spatialité, idéalisation des manipulations, sens, sensations, ressenti et représentations…).

D'un point de vue mathématique et linguistique, les objets symboliques, schématiques et les procédures liées à la notion de démonstration, de preuve (traditionnelle et multimodale) doivent faire l'objet de discussions impliquant un retour réflexif sur les activités.

Ce type d'activités, au cours desquelles les élèves font l'expérience de la nécessité (au sens de Sackur et al.), relativement à toutes les composantes que nous venons de citer, est, selon nous, essentiel pour faire évoluer les conceptions des élèves, que celles-ci soient d'ordre mathématique, linguistique ou cognitif. On remonte ainsi dans les niveaux surdidactiques des élèves. Ces derniers seront conduits très certainement, et fort heureusement selon nous, à modifier la (méta)-représentation qu'ils se font de la pratique mathématique et de la notion-même de validation. La méthode de démonstration par récurrence apparaît comme une manière standardisée de procéder à la validation de certains énoncés et elle fait l'unanimité dans la communauté de pratiques mathématiques, ce qui est légitime car son efficacité n'est

pas à remettre en question (voir chapitre 3, I.5). Mais le thème des preuves multimodales est l'objet de plusieurs recherches à l'heure actuelle (Rinvold et Lorange, 2011) et ouvre des perspectives en matière de renouvellement d'approche didactique de problèmes au demeurant classiques. Les chercheurs traitant de ces questions s'appuient sur la notion de généricité, font souvent référence à Radford (théorie de l'objectivation de la connaissance), insistent sur l'enracinement cognitif des mathématiques et sur la perception des régularités de la réalité sensible par l'intermédiaire de nos sens et de nos capacités perceptives et se sont également penchés sur la question de généralisation schématique. Tout ceci est en relation directe avec ce que nous avons-nous-même mentionné, traité et espérons avoir éclairé.
En ce qui concerne la comparaison entre une preuve algébrique et une preuve visuelle, Rinvold et Lorange déclarent :

> [a] visual proof has to be supplemented by symbols, standards and transformation rules which make communication, objectification and validation easier.

Et un peu plus loin, dans leur conclusion, ils ajoutent:

> A drawback of visual proof is the lack of standardisation, proof systems and semiotic signs making both interpretation and validation of the proofs easier. The development of these missing aspects both theoretically and by design is central in further research.

Or, c'est exactement ce que nous avons été amené à faire en développant, certes simplement à travers un premier exemple (mais que nous prolongerons par d'autres lorsque nous traiterons des séances expérimentales), un moyen de rattacher la PV à la PI de manière schématique (explicitation schématique), conformément à ce que nous avons appelé *principe d'extension schématique*.

CHAPITRE 6. SITUATION DES *NOMBRES TRIANGULAIRES*

I. Le cadre d'étude

I.1. Le contexte de la séquence

Nous rappelons que l'ensemble de la séquence se situe au niveau de la classe de Première S européenne. Elle a été menée en février 2012 au Lycée Barthou. Les élèves ont une heure d'enseignement des mathématiques en anglais. Les cours de mathématiques en français ont lieu avec d'autres enseignants. La progression n'est pas commune, ce qui a un impact direct sur la progression de l'enseignant de mathématiques en L2. A ce stade de l'année, les suites n'ont pas encore été étudiées en L1. La preuve algébrique de l'identité $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ne fait donc pas encore partie du répertoire didactique de la classe.

Dans la progression de l'enseignant (mathématiques, enseignement européen), le second degré a été traité, le thème de l'analyse (fonctions et dérivées) également. La situation étudiée concerne les patterns et les identités algébriques, thème choisi par le chercheur en accord avec le thème correspondant de l'enseignant à ce moment de l'année. Les thèmes suivants seront les statistiques et les probabilités et les suites proprement dites (suites arithmétiques et géométriques).

I.2. Problématique et choix didactique

L'idée de proposer aux élèves une situation portant sur les nombres figurés a très vite émergé lors de nos travaux de recherche. Notre volonté d'intégrer la problématique liée au statut et fonctionnement particulier des preuves visuelles et au rapport qu'elles entretiennent avec les preuves algébriques, à celle plus générale des modalités et contenus d'un enseignement de type CLIL-Mathématiques nous a conduit à élaborer une séquence incluant un certain nombres d'éléments didactiques essentiels :

- des études de documents, pour un travail en compréhension, de nature mathématique mais sur la base d'un nouveau lexique en L2. Les documents sont tantôt étudiés en classe, tantôt à la maison ;
- des phases interactives qui participent de l'étayage de la situation centrale et qui sont l'occasion pour l'enseignant d'un contrôle des acquis en cours de séquence (évaluation diagnostique des contenus mathématiques et évaluation lexicale et sémantique concomitante) ;
- une situation singulière à dimension adidactique. Nous considérions à cet effet que le thème des nombres figurés pouvait être traité de manière à faire apparaître une corrélation entre les preuves algébriques traditionnelles et les manipulations sur les représentations planes (ou en 3D) de ces nombres. D'un point de vue linguistique, le défi était de taille car les élèves n'ont pas l'habitude d'être exposés à, ou de produire, un discours en L2 portant sur des opérations conceptuelles relatives aux manipulations (imaginées, ou encore en pensée[141]) de figures géométriques (ou plus précisément de configurations géométriques).

[141] Nous préciserons un peu plus loin ce que nous entendons par manipulation sur les configurations.

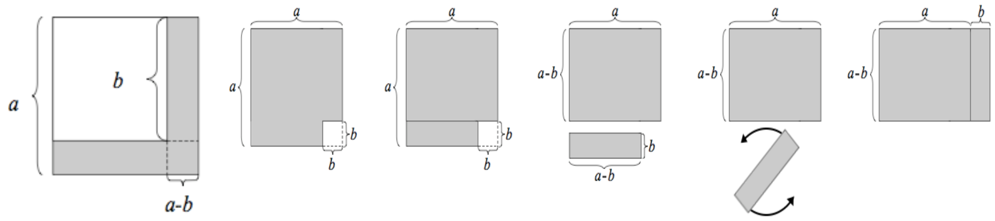
- une situation de synthèse au cours de laquelle les élèves présenteraient leurs travaux, en l'occurrence des posters, suivie d'une phase d'institutionnalisation ;
- un test qui permette un contrôle de l'acquisition d'un lexique phraséologique mais qui soit aussi l'occasion, au travers d'une question ciblée, d'examiner le niveau de conceptualisation des élèves quant au parallèle entre la preuve visuelle qu'ils auront élaborée et commentée (à la fois à l'écrit, sur les posters eux-mêmes, et à l'oral lors de la présentation finale) et la preuve algébrique (niveau de Première S). Cette question du parallèle entre deux types de preuves n'est pas envisagée comme objet de savoir (savoir qui serait visé avec un contrat explicite et donc institutionnalisé en tant que tel) mais comme l'occasion d'une première sensibilisation. Elle fera donc partie de l'histoire didactique de la classe, en prévision des séances futures (en terminale S européenne)

I.3. Description des séances en amont

La séquence consiste en quatre séances que nous allons décrire au paragraphe II. La séquence proprement dite (sur les nombres figurés, et en particulier, sur nombres triangulaires) a été précédée en amont, de séances préparatoires sur des thèmes tels que la différence de deux carrés.
Elles ont consisté à familiariser les élèves avec le lexique (termes et expressions) concernant les manipulations que nous qualifierons de spatio-visuelles et qui portent sur des figures ou configurations géométriques. Elles se sont déroulées quelques semaines avant le début de la séquence sur les nombres figurés.
A titre d'illustration, nous renvoyons le lecteur au document 1[142] de l'annexe 1, document distribué aux élèves à l'issue d'une de ces séances dont l'objectif était de permettre aux élèves de commencer à s'approprier un lexique spécifique. Le thème central de ce dernier était celui des manipulations sur des figures telles que celles qui apparaissent dans l'une des preuves visuelles concernant la différence de deux carrés. Signalons qu'une autre preuve visuelle classique avait déjà fait l'objet d'une présentation en classe sous forme de discussion interactive étayée par des figures présentées au tableau interactif et que l'on trouve aisément sur internet.
Nous mentionnons ci-dessous quelques-unes des expressions significatives utilisées. Elles concernent le registre spatio-visuel et sont pour la plupart relatives à des manipulations. Ces manipulations, pour les mathématiciens ne sont quasiment jamais effectives au sens phénoménologique d'actions réelles sur l'environnement du sujet. Elles peuvent être et sont souvent associées à des représentations mentales dynamiques. Du fait de leur pouvoir descriptif et de leur intérêt sur le plan langagier et cognitif, il nous a paru essentiel que celles-ci fassent partie du répertoire minimal nécessaire au bon fonctionnement des séances suivantes (relatives à la séquence) et surtout de la situation centrale, à savoir celle des nombres triangulaires, séance sur laquelle nous allons revenir ci-après.

[142] Il permet une consolidation (en perspective d'une réutilisation ultérieure) de termes relatifs au registre spatio-visuel rencontrés en classe. Les figures présentes dans le document ont été commentées en classe.

Nous montrons ici quelques-unes des figures ayant servi de support à l'une de ces séances :



Les expressions utilisées sont les suivantes :

to remove a small square
to make a cut
to be detached
to be rotated
to be placed to the right of…
to come from rearranging the original figure

Elles sont à rapprocher des expressions rencontrées dans les séances suivantes comme par exemple :

(pebbles) arranged in the shape of…
to be arranged as a <u>*square*</u>
rule for enlarging the polygon
to extend two adjacent arms (by one point)
to bring together
to reverse, to turn round
to put upside down
etc…

I.4. Enjeux de la Situation dans son ensemble

I.4.a. Etude langagière, épistémologique et sémantique

La séquence des nombres triangulaires participe indirectement d'une mobilisation de la notion de *pattern*. Nous allons donc certes examiner cet aspect plus en détail dans l'analyse a posteriori mais nous allons néanmoins pouvoir dès à présent formuler quelques considérations dans le cadre de l'analyse a priori. Par ailleurs, la séance des nombres triangulaires vise l'établissement d'une preuve visuelle et son rattachement à la preuve algébrique classique concernant l'identité algébrique $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Il convient donc d'examiner finement la question de la démonstration en ne perdant pas de vue que les élèves sont en Première S et que la démonstration par récurrence n'est pas au programme pour ce niveau d'enseignement.
Autres points importants : nous allons mobiliser les notions de mise en correspondance cognitive, d'activation de dualités (statique-dynamique, etc…), d'approche sémantique et examiner la séquence dans une perspective plus large d'intégration.
Nous allons donc dans un premier temps examiner brièvement les significations et les particularités linguistiques des mots et expressions suivants : *figure* et *figurate number*.

Comme nous avons pu le voir à l'occasion du travail sémantique sur le mot-concept *pattern*, le mot-concept *figure* est, dans certains cas, un synonyme potentiel de *pattern*.
Puis nous examinerons successivement le rapport entre les nombres figurés et les patterns du point de vue mathématique, entre les nombres triangulaires et les suites, en effectuant au passage une étude épistémologique de la notion de nombre figuré.

- *figure* et *figurate number* : étymologie et significations

Le mot-concept (L2) *figure* possède un signifié correspondant au mot français *chiffre*. Cet aspect culturel mais aussi sémantique est un élément important de la maîtrise du champ lexical et notionnel des *nombres* dans son rapport contrasté à la L2. En effet, un travail sémantique autour de *figure* et de *figurate number* est envisageable dans une perspective didactique. Le contraste *figure / figurate number* en L2 avec *chiffre / nombre figuré* en L1 peut être l'occasion de faire remarquer que le mot-concept *figure* a plus de signifiés en L2 et se rattache originellement (c'est-à-dire de manière diachronique) à la notion de figuration (L1), c'est-à-dire au fait ou à la possibilité de représenter quelque chose par des *traits* (physiques mais aussi abstraits). Le mot *figure* (L2) est donc étroitement associé à l'idée de représentation physique du nombre, c'est-à-dire symbolisée à l'aide de *traits* scripturaux particuliers.

- Nombres figurés : considérations diachroniques et synchroniques

Nous employons ici-même des termes que l'on retrouve en linguistique et en sémantique mais dans le but de mettre en perspective des éléments de nature proprement mathématique.
D'un point de vue diachronique[143], le nombre figuré est parvenu jusqu'à nous depuis l'antiquité grecque. Il est l'occasion de citer des éléments d'histoire des sciences sur les Pythagoriciens et sur leur rapport à l'objet nombre. Il est la manifestation du fait que les Anciens rattachaient systématiquement le nombre à une collection d'objets. Ces questions ont donné lieu à quelques interactions verbales en L2. Nous présentons ci-dessous deux diapositives du document 2 traitant de ce point (voir Annexes 1, *nombres triangulaires*) :

Diapositive n°2

Numbers for the Ancient Greeks

A breakthrough in mathematical understanding
occurred when mathematicians realized that,
in addition to being useful as tools for calculation,
numbers are also interesting objects of study in their own right.

Diapositive n°3

Some of the first people to study numbers as objects
were the Pythagoreans,
who were obsessed with the mystical properties of numbers.
One of the most important properties to the Pythagoreans
was a number's shape.

[143] Le terme *diachronie* n'est pas à prendre ici dans un sens lié aussi à la didactique et pour lequel la diachronie concerne l'évolution d'une connaissance, certes sur une certaine durée mais seulement le long d'une progression ou d'un cursus, c'est-à-dire sans référence à l'histoire du mot-concept mathématique.

En synchronie[144], c'est-à-dire sans faire intervenir l'évolution et les racines historiques de l'expression, le nombre figuré est un objet mathématique formalisable par le biais d'une suite numérique. A cet égard, la formalisation et la transcription d'un nombre triangulaire par mise en correspondance entre une représentation figurée et l'un des termes d'une suite arithmétique constitue un point sur lequel l'enseignant en classe européenne prévoit de revenir. Il le fera une fois que les élèves auront abordé le thème des suites avec leur enseignant respectif. Le niveau de prise de conscience par les élèves du rapport entre nombre figuré et transcription algébrique constitue une variable didactique. Nous nous sommes restreint à ne viser que la perception par les élèves du caractère générique des productions schématiques-figuratives ainsi que l'établissement de l'identité algébrique $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ sous sa forme générale sans passer par un formalisme lié aux suites numériques (en l'occurrence aux suites arithmétiques). Comme nous le verrons plus loin, les milieux seront structurés dans cette perspective. Ajoutons que le choix de ne pas recourir aux suites a été motivé par le fait que les élèves de première S, répartis sur plusieurs classes en dehors de l'horaire d'enseignement européen, n'avaient pas encore étudié les suites avec leurs enseignants respectifs.

- Nombres figurés et patterns

Les nombres figurés sont des *patterns* particuliers. Ils s'appréhendent selon un rapport étroit entre un objet abstrait, le nombre, et une représentation visuelle, l'agencement d'objets à caractère physique. La représentation visuelle mobilise des éléments figuratifs simples : cercles, carrés ou autres figures schématisées et en général identiques (cercles ou carrés identiques du point de vue de la taille, de la couleur, etc…). La représentation visuelle n'est pas le seul moyen d'établir un lien avec la réalité sensible. Ainsi, les nombres figurés peuvent être rattachés à des objets physiques, c'est-à-dire situés dans la réalité sensible.
La variable didactique qui concerne les modalités du rapport du nombre figuré à la réalité sensible a été fixée au niveau schématique. L'environnement est donc celui du papier-crayon pour la séance proprement dite. Néanmoins, les séances en amont ont **sensibilisé** les élèves à la possibilité de concevoir le lien avec des objets physiques grâce aux représentations 3D du document PowerPoint (voir paragraphe ci-dessus sur les séances en amont).

- Etude épistémologique et approche sémantique

En tant que *pattern* particulier, un nombre triangulaire est donc un motif reproductible selon une règle constitutive et extensible selon une autre règle (règle ou principe d'extension). Il peut être étiqueté par un symbole algébrique (T_n).

Du point de vue de sa constitution, le nombre triangulaire figuré est une représentation étagée où l'on passe d'un niveau à un autre par ajout ou suppression d'un élément figuré-unité (selon que l'on monte où que l'on descende).

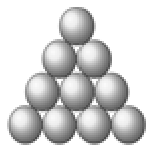


Figure 6.1 Le 4ième nombre triangulaire

[144] La synchronie représente ici les conditions actuelles (c'est-à-dire à notre époque) du rapport que la notion mathématique attachée au mot-concept entretient avec l'ensemble du savoir savant mathématique.

Une analyse sémantique des constituants de signification pour un nombre figuré (et donc pour un nombre triangulaire en particulier) fait apparaître les éléments suivants :

– représentation visuelle selon une disposition géométrique (disposition carrée, triangulaire ou rectangulaire pour ce qui nous concerne),
– grandeur numérique liée au nombre d'objets de la représentation et constituant son rang dans une échelle croissante de nombres du même type,
– règle d'extension du nombre figuré de rang donné au nombre figuré de rang suivant.

A cela vient s'ajouter la possibilité de mise en correspondance naturelle des éléments figurés avec des nombres ou des symboles.

A un nombre triangulaire correspond donc une classe de représentations possédant un lien plus ou moins distant avec la réalité sensible (conformément à la notion d'*abstraction progressive* que nous avons développée dans la partie théorique). Il est donc possible d'envisager des représentations physiques en 3D, ou des représentations géométriques-figurées en 2D avec perspective cavalière (sphères ou cubes), ou encore des représentations en 2D sans perspective, c'est-à-dire schématiques (cercles ou carrés) ou même des représentations épurées (utilisation de simples points, sans caractéristiques géométriques impliquant véritablement de l'étendue).

A un nombre figuré correspond une grandeur numérique (le nombre d'éléments figurés). Elle est intimement liée à la manière dont les éléments figurés sont agencés et permet de définir le rang du nombre figuré. Les nombres triangulaires et les nombres carrés sont facilement appréhendables, quels que soient les éléments constitutifs de signification considérés (ils ont été cités plus haut).

Cela dit, la règle constitutive d'un nombre triangulaire classique pourrait très bien être interprétée par recours à des Gnomon horizontaux : empilement de rangées de *k* objets pour *k* allant de 1 à *n*.

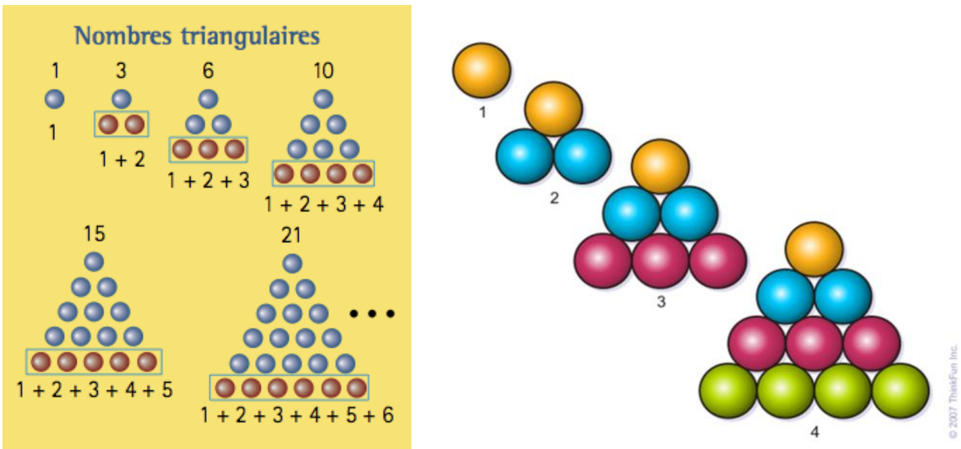


Figure 6.2 Nombres triangulaires concécutifs

L'empilement est la manifestation du caractère *statique* dans l'activation de la dualité *statique-dynamique* du processus d'appréhension et d'interprétation des nombres figurés. Des manipulations concrètes, physiques sur des objets de la réalité sensible sont possibles. L'empilement est ici le résultat d'une action simplement évoquée. La dualité processus-résultat reste donc à un niveau sous-jacent.

Dans nos situations, le gnomon est implicite. Il n'y est pas fait allusion et on attend des élèves qu'ils appréhendent l'empilement constitutif des nombres triangulaires de façon visuelle, en recourant uniquement à la pensée sans verbalisation intérieure, c'est-à-dire en mobilisant uniquement le niveau sémantique directement lié à la perception active.

D'autres nombres de forme triangulaire sont envisageables : nombres figurés de même valeur numérique mais selon une disposition sous forme de triangle rectangle par exemple ; mais surtout nombres triangulaires constitués de rangées de valeur impaire (voir ci-contre[145]).

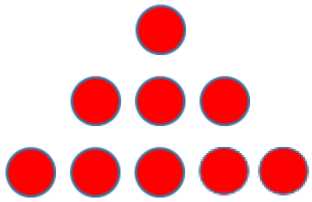


Figure 6.3 Autres dispositions, autres nombres

Le choix didactique concernant le type de nombres figurés à mobiliser dans les milieux objectifs a consisté à centrer la situation sur les nombres triangulaires classiques et sur leur rapport aux nombres rectangulaires induit par la consigne de regroupement (*bringing together triangular numbers*). Néanmoins, il est manifeste que des nombres comme ceux de la figure ci-dessus permettraient aussi d'établir la formule $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

I.4.b. L'identité $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et ses preuves

L'identité peut être établie de plusieurs manières. La première consiste à établir la propriété dans le registre exclusivement algébrique. La seconde consiste à procéder à l'établissement d'une preuve visuelle, voire d'une preuve multimodale. Nous avons choisi de faire en sorte que les élèves établissent la preuve dans le registre de représentations graphiques (c'est-à-dire figurées). Une autre manière de procéder aurait consisté en un travail basé sur un rapport à des objets matériels. Nous n'attendions pas de la part des élèves une transcription algébrique termes à termes (parallèle entre preuve visuelle et preuve algébrique partielle[146]).

1. Preuve algébrique

Elle est en général établie de deux manières.

- En Première S

Tout d'abord, c'est un exemple classique du cours de Première S. La démonstration est en fait la transcription termes à termes de la preuve visuelle généralisée mais sans recours à un raisonnement par induction impliquant le principe de récurrence et l'hérédité. Elle a donc un statut proche de la généricité. Ce n'est pas une démonstration par récurrence. Elle est proche de l'argument que le mathématicien Gauss avait lui-même utilisé.

[145] Il s'agit ici d'un exemple classique de *patterns ;* il est proche de celui utilisé et mentionné dans les travaux de Måsøval et on le rencontre fréquemment sur les sites web anglo-saxons.

[146] Ce point sera néanmoins abordé dans l'analyse a posteriori.

Voici une présentation possible, dans un cas générique :

$$\begin{aligned}
T &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9\\
T &= 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1\\
2\,T &= 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10\\
2\,T &= 9 \text{ x } 10\\
T &= \frac{9 \times 10}{2}
\end{aligned}$$

La généralisation dans le registre algébrique est acceptée assez facilement par les élèves. On peut aussi traiter directement le cas général avec la même disposition mais en recourant aux points de suspension et à l'usage de l'indéterminée *n*.

- En Terminale S

La démonstration est la démonstration classique par récurrence sur l'entier *n*.

2. Preuve visuelle

Plusieurs modalités sont possibles. Nous les présentons ci-dessous.

- La preuve visuelle peut être présentée sur la base d'une ou plusieurs figures au statut générique et étiquetées de valeurs numériques particulières.
- Elle peut aussi inclure une figure générale étiquetée avec des symboles algébriques au statut indéterminé.

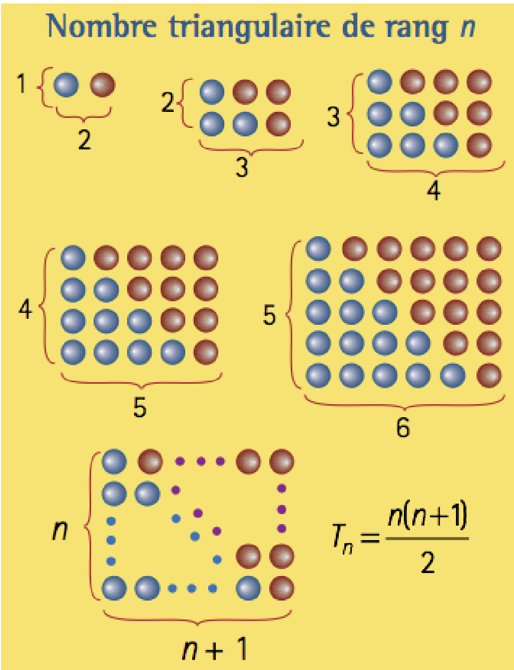


Figure 6.4 Nombres triangulaires et nombres rectangulaires

La figure ci-dessus[147] regroupe les deux modalités précédentes et fait apparaître une extension schématique actualisée pour le passage au cas général (point de suspension schématiques).

[147] Figure trouvée sur le web.

- La preuve visuelle peut aussi être établie en rapport étroit avec la démonstration par récurrence proprement dite (algébrique). Elle ferait alors intervenir la notion de Gnomon linéaire.

L'hérédité schématique relative à une Preuve par Induction schématique consisterait à s'appuyer sur l'ajout d'un tel Gnomon (rangée de boules supplémentaire sur la figure précédente) à la fois horizontalement, pour le nombre triangulaire figuré de gauche (en bleu), et verticalement, pour le second (en rouge sur la figure).

Or il se trouve que les élèves concernés par la séance expérimentale sont en Première S, il n'est donc pas envisageable de procéder à ce type de démonstration. Par conséquent, seules les deux premières modalités peuvent être attendues en tant que productions schématiques produites par les élèves en phase adidactique Ces productions ont un statut de preuves visuelles mais également, comme on pourra d'ailleurs le vérifier par la suite, un statut d'outil. En effet, même si nous n'attendions pas explicitement des élèves qu'ils utilisent les représentations figurées pour, non seulement conjecturer la propriété algébrique sous-jacente mais aussi la formuler dans sa généralité à l'aide de symboles algébriques, il était fort probable que certains le fassent[148]. Compte tenu de la formulation des consignes du problème posé, et dans cette éventualité, il paraît logique de ne pas s'attendre à une formulation sous la forme condensée $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ mais à une formulation passant par la désignation symbolique des nombres triangulaires, à savoir $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

II. Analyse a priori de la séquence

II.1. Déroulement prévu de la séquence

Les deux premières séances sont fortement focalisées sur la langue et l'expression orale, en compréhension et en production. Le contenu mathématique est nouveau pour les élèves (premiers contacts avec les nombres figurés en tant que tels). La séance 2 comporte une phase adidactique importante et aboutit à la production de posters. Sa place dans la séquence est essentielle pour notre recherche.

Le déroulement de la Situation des Nombres triangulaires se subdivise comme suit :

- présentation des nombres figurés et dévolution de la situation (Séance 1 et Séance 1 bis)

  support utilisé : documents Powerpoint (voir Annexe 1)

  introduction à la notion de nombres figurés ; examen de quelques nombres triangulaires ; introduction de la notation algébrique T_n
- généralisation (Séance 2)

  support de recherche : feuille de papier au format A3 et crayons de couleur ;

  documents fournis : consignes de travail en groupe ; liste de questions

  phase initiale d'appropriation individuelle des consignes ;

[148] Etant donnée la forte convaincance des figures génériques.

phase d'actions dans le milieu graphique (premiers schémas au brouillon) et d'émissions de conjectures calcul de T_{100} puis calcul de l'expression générale de T_n faisant suite à des conjectures émises à partir d'exemples génériques ;

phase d'élaboration du poster suite à une discussion au sein du groupe quant aux éléments destinés à figurer sur le document final en A3 (détermination des schémas, des précisions, des commentaires et de leur formulation en L2, à retenir) ;

- présentation des posters et institutionnalisation (Séance 3)

  la présentation se déroule face à la classe ;

  à l'issue de la présentation de chaque groupe, l'enseignant évalue la qualité de celle-ci et la qualité des raisonnements produits, effectue les corrections concernant la formulation si nécessaire;

  l'institutionnalisation porte sur les formules, la formulation et le lexique mobilisé en L2 ; elle réside dans l'évaluation individuelle des groupes et la synthèse finale de l'enseignant ;

- évaluation (Séance 4)

  il s'agit d'un test d'une durée de 1 heure ;

  il porte sur l'ensemble de la séquence

II.2. Analyse a priori des Séances 1 et 1bis

II.2.a. Nature des séances et déroulement

• La séance1 est l'occasion d'un premier contact avec la notion de nombre figuré. Cette séance et la première partie de la Séance 1bis consistent en un cours dialogué basé sur un document Powerpoint[149]. Elles ont pour objectif d'introduire un lexique nouveau (Séance 1) puis de consolider (Séance 1bis) le répertoire de formulation déjà disponible tout en attirant l'attention des élèves sur la richesse des possibilités discursives de descriptions des nombres figurés. A cet égard, l'enseignant prévoit d'insister sur la distinction entre une forme (forme d'un objet individuel, liée à l'idée de contours, de bord physique) et une disposition de plusieurs objets faisant penser immédiatement à une forme géométrique mais de l'objet géométrique individuel correspondant. Il est prévu que l'enseignant engage un questionnement adéquat sur ce point dès la première diapositive. Compte tenu du thème, il est prévu des questions portant sur des éléments d'histoire des sciences.

• La deuxième partie de la Séance 1bis concerne des documents qui doivent être donnés aux élèves (documents 3 et 4) et commentés en classe de façon interactive. Il s'agit d'une série d'exemples de nombres figurés accompagnée d'un lexique.

Voici une des séries de figures (pour le cas des nombres carrés) pour laquelle il est prévu que la notion de *Gnomon*[150] soit juste évoquée comme principe d'extension des figures :

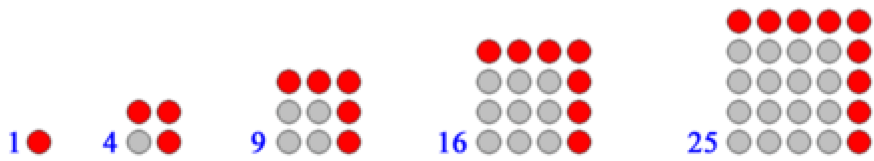


Figure 6.5

[149] Voir Annexe 1, document 2, pour une transcription de chacune des diapositives du Powerpoint.

[150] Voir chapitre 5, II pour une définition précise.

II.2.b. Contenu des diapositives et analyse didactique

Nous analysons quelques-unes des diapositives que l'enseignant prévoit d'intégrer au PowerPoint et d'utiliser durant la première partie de la Séance 1bis.
Pour chacune de ces diapositives, nous examinerons le contenu spécifique à la fois mathématique et lexical, discuterons des variables didactiques impliquées localement, envisagerons les difficultés éventuelles et le type de questionnement prévu. Les possibilités de reformulation seront envisagées comme moyen de cerner le sens, de clarifier ou comme remédiation aux difficultés d'énonciation éventuelles.

- Choix didactiques
    1. Le questionnement du Professeur et le lexique (localement)

Le lexique nouveau doit être distillé progressivement et il est prévu des questions pour favoriser une appropriation rapide, voire immédiate. Le lexique ancien destiné à être consolidé, lorsque son usage est véritablement anticipé, constitue aussi une variable didactique. Elle se traduit par une énumération explicite de mots et d'expressions phraséologiques. Elle doit être définie en extension, abstraction faite des fluctuations discursives liées à la contingence.

2. L'ordre des diapositives

Il constitue aussi une variable didactique. Il a été pensé en rapport avec les types de contenus visés : introduction d'un exemple de nombre figuré, quelques éléments d'histoire des sciences (faisant suite à une étude préalable des éléments historiquement attachés aux nombres chez les Anciens) et présentation d'autres exemples de nombres figurés.

3. Le temps qui sera consacré au questionnement et aux interactions

- analyse de quelques diapositives (voir Annexe 1, Document 5)

Pour des questions de place, et parce que l'analyse a posteriori va reprendre en détail la plupart des diapositives relativement à ce qui était visé par l'enseignant, lors de la Séance 1 bis notamment (voir III.1.), notre analyse sera très brève et limitée à quelques exemples (ils concernent la Séance1 afin de ne pas être redondant).

– <u>Diapositive n°1</u> (Séance 1)

La toute première diapositive est constituée d'un assemblage de sphères identiques, disposées de manière à former un triangle. Elle a pour but de sensibiliser les élèves à l'importance de distinguer la notion de *triangularité* ou de *disposition triangulaire* des sphères par opposition au terme de *triangle,* en tant qu'objet spécifique de la géométrie (représentable physiquement par une figure mais dont la représentation en mathématiques renvoie elle-même à un objet abstrait[151]).
La nature des objets individuels du nombre figuré, en l'occurrence des représentations d'objets 3D (des sphères) sur la première diapositive, et le choix du type de nombre figuré (ici, nombre triangulaire), selon la forme, constituent deux variables didactiques. L'ordre de grandeur du nombre constitue une troisième variable didactique.
Les questions posées à l'occasion de cette séance et les interactions verbales ont été retranscrites (voir Annexe 1).

[151] Nous n'aborderons pas ici les questions d'ordre ontologique, en l'occurrence, de savoir si l'objet abstrait « triangle » auquel renvoie toute représentation de ce dernier en géométrie existerait ou non dans un monde idéal.

Elles sont focalisées sur la nécessité de prendre en considération, sur le plan *cognitivo-langagier*, ce qui relève des notions abstraites de forme, de disposition, de figure géométrique en associant ces éléments visuels à des descriptions langagières spécifiques.
Voici la figure correspondant à la diapositive n°1 du document 2.

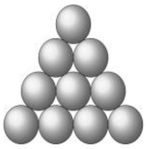


Figure 6.6

Les questions envisagées doivent amener l'élève à décrire la figure en précisant de quoi elle est constituée, à s'exprimer en termes de disposition de cercles ou de boules, etc…

- what makes you say that this figurate number is triangular?

Les questions inviteront l'élève à émettre des considérations sur ce qu'il voit ou croit voir :

- do you see one or several triangles?

Ou encore:

- try to be more precise as to the description of the triangle you can see.
- where is the geometrical triangle you say you can see? Is it unique? etc…

– <u>Diapositive n°6</u> (Séance 1)

L'enseignant affiche la diapositive ci-dessous. Elle ne comporte pas de texte et les nombres triangulaires figurés sont étiquetés par leur valeur numérique.
L'enseignant anticipe quelques commentaires et plusieurs questions à son sujet, le but étant d'amener les élèves à faire émerger la règle d'extension d'un nombre triangulaire au suivant (voir figure 6.7).

"Firstly, we consider that 1 is the first triangular number. The second is three"
"What are the next two?"
"If 1 and 3 are the first two triangular numbers, how do we obtain the third one?"
"Is there a relationship between the rank (for example 3 for the third number, 4 for the fourth number) and one of the rows?"

Ou encore:

"To go from the 2nd number to the third, what do we have to do?" etc…

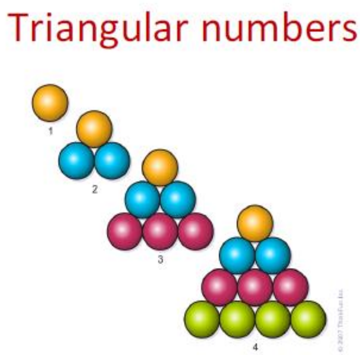


Figure 6.7

La diapositive 6 est l'occasion d'une introduction et/ou rappel par l'enseignant des termes *row*, *extend*, *rank*, *rule* et d'un réinvestissement immédiat par les élèves suite au questionnement.

– Diapositive n°7

Cette diapositive au contenu explicite a pour but de faire prendre conscience aux élèves de l'existence de plusieurs types de nombres polygonaux.

Les questions envisagées concernent le principe d'obtention du nombre suivant à partir des deux premiers exemples (triangular and square numbers)

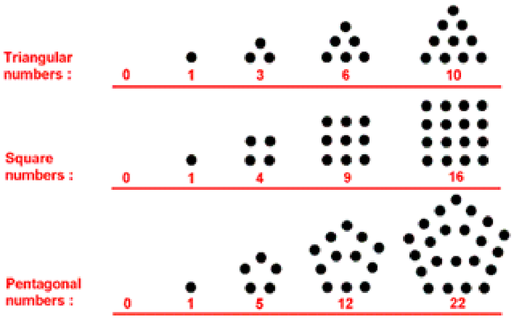


Figure 6.8

A titre d'exemple :

(après un rappel de ce qui a été fait lors de la discussion relative à la diapositive précédente)

"Do we have to know the value of the previous square number to calculate the value of the fifth square number?"

Ou encore

"What is the difference, between triangular and square numbers, in the way of determining the next number assuming that we know one number of the list?"

"Or, given a number of the list, what do we have to do to get the next one? in the case of a square number and in the case of a triangular number etc…

Chose importante : d'une manière générale et dans le cas de chacune des diapositives, l'enseignant veille à anticiper plusieurs reformulations des questions afin de permettre aux élèves d'accéder précisément au sens de celles-ci et de favoriser la formulation de leurs réponses sans basculement vers la L1.

– Diapositive n°8

Question envisagée (entre autres):

"Concerning the arrangement in a triangular form, what distinguishes the arrangement on the following pictures from those on the previous slides?"

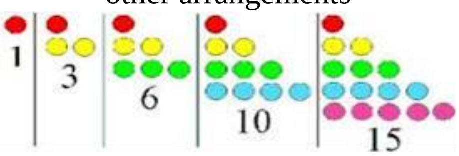


Figure 6.9

Réponses possibles attendues

The triangles are right.

The triangles are right isosceles.

etc…

Apport de précisions envisagées par l'enseignant:

"On the present slide, as you can see, the numbers are arranged as right isosceles triangles and what matters is not the exact shape of the arrangement but the principle of organisation of the circles."

" what is important is to notice that the triangular aspect of the arrangement comes from the fact that we add one more circle to get the next row, going from top to bottom." etc…

II.3. Analyse a priori de la Séance 2

II.3.a. Enjeux : niveaux de preuve et expérience de la nécessité en phase adidactique

L'objectif est d'obtenir, à partir d'un *exemple générique*, l'expression générale du n-ième nombre triangulaire en fonction de n, à savoir que $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Durant la séance précédente, les élèves doivent observer que l'on peut *regrouper* deux nombres triangulaires *identiques* pour former un nombre rectangulaire (diapositive 18 du document 5). Le professeur s'arrête à cet endroit précis. A ce stade, ils ne se sont pas encore attaqués à la généralisation, ni même au calcul générique basé sur le regroupement de deux copies d'un nombre triangulaire tel que T_9 . Ils ne disposent a fortiori pas encore de l'écriture algébrique *généralisée* de T_n en fonction de n.

La suite de la séquence comporte une phase adidactique comme lieu d'établissement d'une généralisation, en permettant ainsi aux élèves d'atteindre plusieurs niveaux de preuve.

D'un point de vue didactique, la place essentielle que nous conférons à *l'expérience de la nécessité* (au sens de Sackur et al) et à l'idée défendue par Durand-Guerrier (2008) de *faire l'épreuve des objets* constituent de solides raisons pour envisager d'introduire de l'adidacticité. L'idée d'un travail en groupes (petits groupes de trois ou quatre élèves) s'en est suivie naturellement.

Par ailleurs, le répertoire de formulation en L2 a été établi de façon suffisamment solide pour permettre aux élèves de décrire leur production finale convenablement. Le discours des élèves portera alors sur leurs recherches en groupes et sur l'établissement de formules.

II.3.b. Analyse des consignes (document 7)

La séance débute par la distribution d'un document en L2 sur lequel figurent un rappel des consignes de travail en groupe[152], une figure représentant les cinq premiers nombres triangulaires ainsi que l'objectif de l'activité, celle-ci étant divisée en deux parties. Nous rappelons que les élèves disposent d'un environnement papier A3 et crayons de couleur.

La première partie est présentée comme suit:

Part I

Denote by T_n the nth triangular number.

Recall : $T_1 = 1$

The purpose is to *calculate the numerical value of* T_{100} *directly, i.e. without calculating all the previous numbers.*

Hint: *use pictures, arrangements, bring triangular numbers together*.

Present *on a poster* the different steps of your research and try to justify your calculations.

Never forget that "strength lies in unity".

[152] Voir Annexe 1, document 7 pour le document intitulé Group Work Instructions

- Evaluation du répertoire lexico-phraséologique minimal de fonctionnement :

En ce qui concerne le lexique utilisé, les termes et expressions *arrangements, bring together, step* font partie du répertoire de formulation et sont conceptuellement maîtrisés.

Il en va de même de ceux figurant dans le rappel des consignes de travail en groupes, dans la mesure où ils peuvent légitimement apparaître comme transparents :

> keep one's voice down, listen to and respect one's team mates, to divide up tasks, to coordinate results, spokesperson, et le dicton "all for one, one for all

Comme on peut le voir, nous avons également saisi l'occasion de glisser une tournure idiomatique, dans la mesure où elle semblait tout à fait appropriée. Le dicton selon lequel l'*union fait la force* ("strength lies in unity") qui s'applique usuellement à des personnes, nous semblait tout à fait en rapport (certes avec un glissement de sens évident) avec l'intérêt de *regrouper* les nombres triangulaires pour faire surgir, à un niveau d'abord générique, la propriété permettant de calculer la valeur d'un nombre triangulaire T_n en fonction de son rang n.

La partie II était formulée comme suit :

Part II

> Can we obtain 5² from triangular numbers?
> What about other square numbers?
> Present *on a poster* the different steps of your research and try to justify your calculations.

Les mêmes remarques s'appliquent et il était donc légitime de s'attendre à ce que les élèves intègrent les deux objectifs et s'engagent assez vite dans des représentations schématiques particulières.

II.3.c. Consignes et schèmes d'action

Dans les séances précédentes, lors des phases interactives et grâce au recours aux TICE, les élèves se sont contentés d'observer la manipulation (idéalisée) consistant à regrouper deux nombres figurés triangulaires. Signalons qu'il s'agissait de nombres (triangulaires) identiques et que ce sera encore le cas dans la partie I de la Situation des Nombres Triangulaires mais que ce ne sera plus le cas pour la partie II. Néanmoins l'idée de pouvoir faire agir deux nombres triangulaires dans une configuration donnée peut dès lors être légitimement considérée comme faisant désormais partie du répertoire d'actions disponibles. En ce qui concerne la subdivision des actions anticipées en schèmes élémentaires, il est clair que le fait de regrouper ou de décomposer une représentation figurée de nombres triangulaires ne constitue pas d'obstacle cognitif majeur, bien au contraire. Le coup de pouce (« hint ») a pour objet de rappeler cette possibilité d'action et est surtout une incitation à agir en ce sens :

> Hint: use pictures, arrangements, bring triangular numbers together.

Le fait de proposer une figure de rappel concernant les cinq premiers nombres triangulaires nous paraît indispensable pour mettre les élèves en confiance et les inciter de manière implicite et dès le premier contact visuel à envisager d'entrer dans le registre graphique dès que l'activité débutera (figure 6.10).

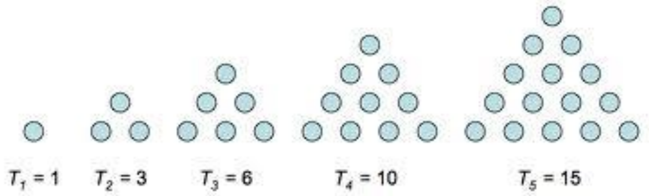


Figure 6.10

Nous estimons important de glisser la consigne suivante, afin d'être sûr que chaque membre du groupe participe de façon active :

The motto of a team is: "all for one, one for all"

La quatrième consigne du document, à savoir *Inside the team some works / tasks can be divided up* va également en ce sens.

Comme nous l'avons déjà évoqué plus haut, il est essentiel que les élèves fassent *l'expérience de la nécessité* ou encore qu'ils *fassent l'épreuve des objets*. Manipuler des nombres figurés et découvrir ainsi une ou plusieurs propriétés arithmétiques sans faire appel à l'enseignant nous semble une expérience extrêmement enrichissante pour un élève.

Il est attendu que les élèves parviennent à calculer T_{100} et même qu'ils soient capables de passer à la généralisation pour un entier *n* quelconque.

En ce qui concerne la deuxième partie, nous pensons que les élèves réussiront à faire venir à l'esprit l'idée de combiner deux nombres triangulaires consécutifs pour résoudre le problème spécifique relatif au nombre carré 25.

Nous pensons même que certains groupes produiront des signes correspondant à une entrée dans le processus de généralisation.

Sans reprendre tout ce que nous avons mentionné dans la partie théorique concernant la cognition par les sens, nous estimions qu'à cette occasion, les élèves auront une bonne raison pour recourir à leurs sens et s'engager dans une représentation conceptualisante et adéquate de la situation et que cela ne manquera pas d'apparaître au travers des diverses actions qu'ils ne manqueront pas d'entreprendre au fur et à mesure du déroulement de l'activité.

II.3.d. Objectif linguistique commun pour la Séance 2 et la Séance 3

Compte tenu de l'évaluation du répertoire de formulation, il est attendu que les élèves décrivent oralement, de manière satisfaisante, leurs productions sous forme de posters. Le contenu mathématiques et les écritures formelles qui ne devront pas manquer d'apparaître peuvent légitimement être décrits convenablement en L2. Le document distribué contient d'ailleurs, comme on vient de le voir, un bon nombre de termes susceptibles d'être réutilisés, en les articulant convenablement avec les résultats mathématiques et schématiques qui seront effectivement produits.

A l'issue de la phase d'institutionnalisation, il est prévu que les élèves reçoivent un document supplémentaire, destiné à récapituler les unités phraséologiques jugées pertinentes. En voici un extrait :

- Some numbers, like 36, can be arranged both as a square and as a triangle.
  Certains nombres, comme 36, peuvent être représentés/(mis sous la forme) à la fois d'un carré ou d'un triangle.
- in what respect : *dans quelle mesure.*

- amount of dots : *quantité de points.*
- so as to form a triangular pattern : *afin de former un motif triangulaire.*
- dots arranged in different ways : *points placé(s)/ disposé(s) de diverses manières.*
- A triangular number is the sum of consecutive integers while a square number is the product of an integer **by itself**.
  Un nombre triangulaire est la somme d'entiers consécutifs tandis qu'un carré est le produit d'un entier ***par lui-même****.*

D'un point de vue cognitif, et en étroite relation avec les appariements lexique-concepts, il nous semble que nous avons à travers ce type de situation, l'occasion d'attacher et fixer en mémoire un lexique en L2 très utile pour les descriptions de manipulations, de dispositions, c'est-à-dire un lexique relatif de manière générale au champ sémantique du mouvement, en lien avec le lexique mathématique arithmétique, géométrique et algébrique.

II.3.e. Evolution d'une conception

Nous considérons qu'une conception peut être vue comme un ensemble relativement structuré (au moins localement) de représentations et de connaissances étroitement associées.
Nous désignons par Conception 1, la conception générale des élèves portant sur les nombres figurés avant l'entrée en phase adidactique (avant le début de la Séance2). Elle se subdivise en plusieurs connaissances distinctes.
Nous désignons par Connaissance 1a, le fait que des nombres puissent être attachés à des dispositions de nature géométrique : agencements triangulaires, agencements carrés et agencements rectangulaires. C'est une véritable connaissance. Elle fait partie du répertoire didactique et a été institutionnalisée et consolidée.
Nous désignons par Connaissance 1b, le fait que des nombres triangulaires reposent sur une règle constitutive. Cette dernière consiste à relier le nombre total de points (ou d'objets identiques tels des boules ou des cercles) à une somme d'entiers consécutifs. On lui associe les deux connaissances relativement élémentaires portant sur la règle constitutive des nombres carrés et des nombres rectangulaires.
Nous désignons par Connaissance 1c, celle selon laquelle les nombres triangulaires peuvent être combinés pour produire un rectangle. Elle est encore de l'ordre d'une représentation (cognitive). Elle n'a pas donné lieu à des actions ou des manipulations par les élèves. C'est une connaissance en voie de consolidation par le biais d'actions en phase adidactique. Elle ne sera véritablement enracinée dans le répertoire didactique comme connaissance effective qu'après l'institutionnalisation (Séance 3).
Cette conception s'appuie sur la phase interactive finale de la Séance 1 bis (diapositive 19) et sur des documents fournis aux élèves (Séances 1 et 1bis). Les élèves avaient été sensibilisés à l'activation du caractère dynamique dans le processus de combinaison de nombres figurés au niveau de leur représentation spatiale ou plane. Néanmoins, la traduction algébrique qui s'appuie sur les symboles et prend en compte la règle constitutive des nombres figurés triangulaires n'a pas été explicitée. Seule intervient la **possibilité de pur regroupement**.

Le contenu de la diapositive finale du Document 5 (Diapositive 19, Document 5, Annexe 1) est le suivant :

<u>By bringing together</u>
<u>2 identical triangular numbers</u>
<u>we get a rectangular number</u>

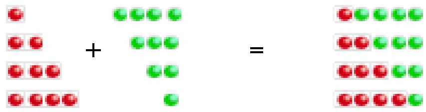


Figure 6.11

En ce qui concerne le déroulement, il est prévu que l'enseignant s'arrête à cette diapositive.
La diapositive est prévue pour être interprétée dynamiquement.
La précédente diapositive (diapositive 18) avait un caractère plus statique :

A rectangular number is made up of two identical triangular numbers.
We can count the total number of dots easily.

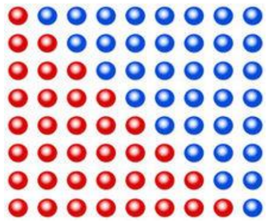
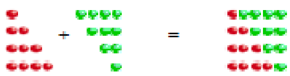


Figure 6.12

La conception désignée par Conception 2 repose, entre autres, sur l'ensemble des connaissances et représentations associées à la Conception 1. A cet ensemble vient s'ajouter, par un processus de conceptualisation (élargie), le fait que regrouper deux nombres triangulaires identiques pour obtenir un rectangle se traduit algébriquement par une égalité permettant de définir la relation constitutive du nième nombre triangulaire, autrement dit d'exprimer T_n en fonction de *n*.

By bringing together
2 identical triangular numbers
we get a rectangular number.



$$2T_4 = 4(4+1)$$

$$T_4 = \frac{4(4+1)}{2}$$

Generalisation

$$2T_n = n(n+1)$$

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Il est attendu que les élèves passent de la Conception 1 à la Conception 2. Ce passage reposera sur un ensemble d'actions sur les nombres figurés, sur des confrontations de représentations et sur un processus de validation, l'ensemble étant réalisé en grande partie en phase adidactique. La Conception 2 ne sera considéré comme définitivement enracinée en mémoire et appropriée qu'à l'issue de l'institutionnalisation finale. Le schème d'action qui, dans sa similitude au niveau générique, va permettre la généralisation une fois les actions conceptualisées et ramenées à la consigne initiale, est celui de regroupement de nombres figurés.

Il est considéré comme faisant partie du répertoire didactique car associé directement à la Conception 1. Les élèves sont donc censés, lors de la nouvelle situation, élargir leur champ de représentations puisqu'il va être question de déterminer, à partir de manipulations idéalisées, l'expression du *n* ième nombre triangulaire en fonction de son rang *n*. Le schème d'action de regroupement porte sur une action idéalisée. La dualité statique-dynamique est activée au niveau discursif par l'évocation de regroupement mais s'accompagne de figures statiques. Le schème d'action, orienté vers le milieu objectif, s'accompagne d'une mise en correspondance sur le plan cognitif d'éléments numériques avec les objets constitutifs des représentations figurés. Le même schème est applicable sous une forme similaire au traitement du cas général par recours à des symboles algébriques indéterminés (rang *n*, nombre T_n , par exemple).

Les productions des élèves en phase adidactique doivent traduire les points évoqués précédemment. Néanmoins, la prise de conscience du parallèle entre manipulations d'éléments schématiques et d'éléments algébriques n'est pas un objectif explicite (en tant que véritable connaissance à faire figurer dans le répertoire didactique de la classe). Il n'est donc visé qu'une **sensibilisation** à ce point et donc pas d'institutionnalisation ni de consolidation. La connaissance est ici une connaissance portant sur le statut des nombres et leur rapport à l'algèbre. Elle est émergente et dépend de la sensibilité des élèves et de leur niveau général de conceptualisation. Le test final doit permettre d'éclairer ce dernier point car il comporte une question précise sur ce point.

II.4. Analyse a priori de la Séance 2 : niveaux de milieu et répertoires

Pour effectuer et rédiger cette analyse, nous nous sommes fortement inspirés de Bloch (1999) et de Gibel (2015). Les deux articles fournissent un moyen, par le biais d'un recours à la modélisation des situations adidactiques en termes de niveaux de milieux, d'effectuer des analyses a priori en tenant compte de la diversité des actions, formulations, décisions mais aussi raisonnements qui sont susceptibles d'être produits. Dans Bloch (1999), nous avons trouvé, pour notre analyse a priori, un éclairage très utile du rôle, des fonctions du professeur en phase adidactique mais aussi des décisions qu'il peut être conduit à prendre tout en préservant le caractère adidactique de la situation et dans Gibel (2015), un moyen de rattacher les raisonnements produits par les élèves dans chacun des niveaux de milieu.

La séance succède à une série de séances qui ont été l'occasion de mettre en place un répertoire lexical et phraséologique que nous pouvons légitimement estimer comme suffisant pour le bon fonctionnement de cette séance (voir II.3). Tout d'abord, les mots et expressions que l'enseignant peut légitimement considérer comme faisant partie du répertoire de formulations concernent le champ lexical et notionnel des manipulations d'objets concrets, même s'il est encore limité par rapport à ce qu'il deviendra en Terminale, celui des formes simples, des dispositions, des arrangements. Ainsi, les interactions antérieures en classe et les documents distribués participent de l'étayage de la séance expérimentale.

Nous proposons ci-après un tableau élaboré à partir du modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques, modèle proposé par Bloch et Gibel (2011) et optimisé (voir chapitre 1). Ce tableau, de nature synthétique[153], sera suivi d'une analyse en termes de raisonnements, de production de signes et de niveaux de preuves dans les divers milieux.

[153] Les dimensions schématique, syntaxique et sémantique, caractéristiques des raisonnements selon les milieux, sont respectivement désignées par les abréviations SCHEM, SYNT, SEM.

	Milieu M-2	Milieu M-1	Milieu M0
Nature, forme et fonction des raisonnements, des intuitions et des autres processus raisonnés	R1.1 SEM / SCHEM Identifier quels sont les possibles Actions au niveau schématique : regroupement de nombres figurés Conjectures ponctuelles : apparition d'un lien entre rangs des nombres figurés, étiquettes et opérations sur les nombres. Mise en correspondance termes à termes entre les éléments d'un schéma particulier (pattern schématique) et les éléments numériques associés (étiquettes, symboles) et obtention d'une égalité du type $2T_4 = 20$; même si l'élève remarque que $20 = 4\times 5$, il ne s'agit que d'une « coïncidence » (émergence d'un pattern algébrique sans prise de conscience d'une règle) Partie II Décomposition du nombre carré figuré 25 en deux nombres triangulaires (travail dans le registre schématique) Tentatives avec d'autres carrés	R1.2 SCHEM/SYNT/ SEM Calculs génériques : $2T_4 = 4\times 5$ (l'écriture syntaxique particulière actualise cette fois l'émergence d'une règle) Formulation de conjectures étayées (généricité) Conceptualisation du cas général (niveau sémantique pur) ; (expériences mentales) Application au calcul de la valeur numérique de T_{100} Raisonnement de validation encore articulé fortement sur le sensible Dans la partie II, démarche similaire pour parvenir à établir $25 = T_4 + T_5$ et d'autres décompositions du même type Généralisation formelle calquée sur l'écriture particulère : $T_{n-1} + T_n = n^2$ Recours possible à l'expression algébrique de T_n pour légitimer la généralisation : $\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$ Recours possible au second degré pour les mêmes raisons	R1.3 SCHEM/SYNT La propriété générale, conjecturée dans le milieu schématique, est légitimée selon des règles algébriques $T_n = 1+2+3+...+n$ $T_n = n+(n-1)+....+1$ $2T_n = n(n+1)$ $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (travail dans le registre algébrique ; jeux d'intérieur) Sensibilisation au parallèle existant entre preuve algébrique et preuve schématique, c'est-à-dire preuve visuelle (point testé en devoir en classe) La propriété générale correspondant à $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ est rattachée à une figure particulière qui tient lieu de Preuve visuelle « classique » La propriété générale est étroitement associée à un schéma généralisé (voir I.4.b.) Comparaison des types de preuve (la convaincance est sujette à débat) Raisonnements synthétiques articulant procédures et résultats dans des registres séparés

Niveaux d'utilisation des signes dans les processus raisonnés	R2.1 SEM / SCHEM Schémas particuliers Etiquetage numérique et symbolique Analyse des objets : $T_3 = 1 + 2 + 3$ Rectangle 2 par 3 : $R_{2,3} = 2 \times 3$ L'égalité du type $2T_3 = 2 \times 3$ n'est pas encore associée à une règle générale Les signes sont ici des légisignes icôniques et indiciels	R2.2 SCHEM/SYNT/SEM Légisignes symboliques-dicents ou argumentaux, locaux ou génériques. L'égalité $2T_4 = 4 \times 5$ est étroitement associée à un schéma de regroupement de deux nombres figurés. Le schéma permet un contrôle du sens. Dans l'égalité $2T_4 = 4 \times 5$ La règle émerge suite à la perception du rôle particulier tenu par le rang (ici : 4)	R2.3 SCHEM/SYNT Légisignes symboliques-argumentaux sous-tendant des preuves Schémas généraux : utilisation de points de suspension sur les schémas (extension schématique) Utilisation procédurale des signes algébriques et des éléments constitutifs des figures
Usage et actualisation du répertoire didactique **Sous-répertoire de formulation (niveau lexical)**	R3.1 SEM / SCHEM Répertoire antérieur : - règles constitutives élémentaires : un nombre triangulaire de rang donné est associé à une somme d'entiers consécutifs ; un nombre rectangulaire est le produit de deux nombres entiers - calculs algébriques sur des nombres entiers - équations du second degré - identités remarquables Mobilisation du lexique phraséologique L2 (non détaillé ici)	R3.2 SCHEM/SYNT/SEM Enrichissement des énoncés au niveau argumentaire Annotations des posters. Anticipation de la présentation des posters, échanges entre élèves. Mobilisation du lexique L2 lié à la désignation, aux nombres figurés, aux manipulations sur des objets	R3.3 SCHEM/SYNT Concaténation de schémas et de formules Nombreux va-et-vient entre, d'une part, énoncés reposant sur un lexique conceptuel, lié à la désignation, aux nombres figurés, aux manipulations sur des objets, et d'autre part, schémas et écritures mixtes (semi-formelles) en L2

Tableau 6.1 processus raisonnés, signes et répertoires

- Phase initiale de conceptualisation et persistance en mémoire du sens des consignes

En phase initiale (établie sur la base du document écrit distribué dont nous avons déjà donné des éléments au III.1.), les élèves devront conceptualiser le problème dans un processus de traitement en compréhension de données lexicales L2, de montée au niveau sémantique par une interprétation des objectifs mathématiques que véhiculent le texte en L2 et les figures du document et garder présent à l'esprit le sens de ces consignes pendant les phases qui vont suivre. Il est clair que des va-et-vient seront nécessaires entre les tâches en cours qui vont se succéder et la consigne initiale (comme souvent en mathématiques ou même dans tout processus nécessitant de mener des raisonnements variés et successifs pour répondre à une question initiale). Cela a lieu à des moments plus spécifiques de réalisation de raisonnements nécessitant un contrôle du sens pour vérifier si la conceptualisation reste en accord ou non avec le sens de la consigne initiale. Cela a lieu également pour créer de nouvelles associations d'idées, entre mots de la consigne, connaissances et représentations antérieures relatives à la conceptualisation de la tâche en cours, ou encore pour se convaincre que l'objectif visé est atteint. Chaque retour à la consigne est un nouveau moment d'accès en compréhension à du texte en L2. Son sens s'éclaire en rapport avec la succession d'actions réalisées.

- Le milieu matériel et la réalisation des premiers schémas

Les élèves vont très naturellement représenter des nombres triangulaires sur les brouillons dont ils disposent. La consigne contient une *invitation à manipuler* les nombres triangulaires en les arrangeant ou en les regroupant au travers du coup de pouce (Hint: *use pictures, arrangements, bring triangular numbers together*).

Le caractère dynamique de l'idée de regroupement participe à la fois d'une interprétation des actions idéalisées à accomplir sur les nombres figurés mais est aussi une incitation, un élément moteur pour déclencher des actions. Pour l'enseignant, c'est une garantie que les élèves vont passer rapidement dans le milieu supérieur.

Les consignes se subdivisent en deux objectifs (successifs) à atteindre (voir III.1.) : le calcul de T_{100} d'une part et la généralisation de la propriété de décomposition d'un carré en somme de deux nombres triangulaires consécutifs.

Le double objectif va donc amener les élèves à passer au moins deux fois par les mêmes milieux, sans compter les va-et-vient tant que chaque objectif n'est pas atteint (pour chacune des deux parties).

- L'élève agissant dans la perspective du calcul de T_{100} et le milieu heuristique (milieu objectif)

Cette phase est caractérisée par un enrichissement au niveau heuristique, suite en effet à des calculs, des conjectures ponctuelles. C'est aussi celle où des connaissances anciennes sont mobilisées (voir Gibel, 2009, tableau 2, p 13).

Les connaissances mobilisées dans ce milieu concernent le principe constitutif des nombres triangulaires ainsi que la possibilité d'inverser (bring upside down) des nombres triangulaires. Celle-ci a été expérimentée antérieurement (Conception 1). Il est légitime que cette connaissance apparaisse comme une action exécutable pour parvenir à calculer T_{100}. Elle devrait logiquement être testée pour des nombres triangulaires de petite taille.

Si certains groupes ne parviennent pas à engager ce type d'actions, l'enseignant a prévu de rappeler à l'esprit des élèves le contenu de cette connaissance en tant que possibilité d'action

sous la forme de conseils, en revenant sur les séances en amont (*remember what sort of actions we actually performed with triangular numbers* ou encore *can you see a link between triangular and square numbers,* etc…).
A cette étape, les élèves ont commencé à élaborer des représentations provisoires autour des notions convoquées et des premières actions effectuées. Il y aura certainement un début d'expérience de la nécessité étant données la convaincance forte attachée au caractère visuel des représentations produites et à la régularité des agencements d'objets à l'intérieur des nombres figurés concernés.

- L'élève apprenant et le milieu de référence

Nous rappelons que c'est véritablement dans ce milieu que débute la problématique de la validation (voir Bloch, 1999). Elle devrait dans l'idéal se dérouler entièrement en L2 au sein des groupes mais cela sous-entendrait certes un contrat très clair et sans doute pesant pour les élèves. Mais surtout, le répertoire lexical devrait être développé davantage et un contrôle du travail au sein de chaque groupe mis en place (par des enregistrements, par exemple). Néanmoins les questions des élèves et les réponses de l'enseignant seront toutes réalisées en L2.
L'objectif étant le calcul de T_{100}, l'élève est donc censé percevoir le caractère générique des actions dans le milieu inférieur. La généralisation devrait pouvoir être établie par analogie avec les actions menées sur les nombres de rang 3 ou 4 par exemple et par une mise en correspondance directe entre, d'une part, les transcriptions numériques (pour n=3 ou n=4) des actions effectuées les nombres de petits rangs et d'autre part, la transcription algébrique numérique dans le cas général (pour un *n* quelconque) ou simplement, comme c'est demandé, avec la valeur *n*=100.
La connaissance émergente attendue est celle de la prise de conscience du rapport entre la combinaison de deux nombres triangulaires identiques, leur rang (3 ou 4) et les dimensions du nombre rectangulaire obtenu dans la mesure où l'on peut assez rapidement percevoir leur dépendance vis-à-vis de ce rang. Les représentations figurées produites par les élèves devraient logiquement être accompagnées d'étiquettes indexées et par conséquent la juxtaposition des étiquettes indexées numériquement (par les entiers 3 ou 4) et la formation d'un nombre figuré rectangulaire devrait suffire à faire émerger la relation du type $2T_3 = 2 \times 3$. Si nécessaire, l'enseignant prévoit de donner des indications par un questionnement adéquat, c'est-à-dire de manière à conserver une part importante d'adidacticité (*look, can't you see a relationship between the value of the triangular number and that of the rectangular one* ou encore *don't forget that the purpose is to conjecture a way to calculate the value of T_{100} by examining what happens when you combine triangular numbers*, etc…).
Si les élèves tentent de généraliser le résultat en recourant à une transcription algébrique mais se trouvent bloqués, l'enseignant contrôlera les productions syntaxiques (algébriques) de manière à détecter des erreurs éventuelles et incitera les élèves eux-mêmes à contrôler la cohérence, le bon étiquetage, la bonne transcription algébrique des représentations figurées, etc…
Le dernier point, celui de la généralisation à un entier *n* quelconque, concerne une phase où la validation risque fortement d'être sujette à débat au sein du groupe. Il n'est pas sûr que les productions syntaxiques éventuelles soient correctes, que les propositions faites par l'un des membres du groupe obtiennent l'accord des autres membres. La validation peut également

avoir lieu dans la situation précédente. Elle peut d'ailleurs aussi concerner le codage et les commentaires en L2 des représentations figurées.
La perception du caractère générique des agencements et de la concomitance des relations numériques et algébriques (lorsque la propriété générale est établie), suite à des actions menées en phase adidactique et à une validation à laquelle, comme on l'a vu, on peut légitimement s'attendre, devraient permettre aux élèves de réaliser complètement l'expérience de la nécessité.
La deuxième partie de la séance (voir *Part II*, au paragraphe III.1) concerne l'application au cas n=5 de la propriété de décomposition d'un carré en somme de deux nombres triangulaires consécutifs et sa généralisation à un entier n quelconque. La propriété n'a pas encore été rencontrée antérieurement, ne serait-ce qu'en tant que fait isolé et spécifique d'une valeur de n particulière (voir II, séances en amont). Néanmoins, on peut penser que les élèves, une fois les dernières consignes lues ou relues, vont très rapidement produire un schéma attendu et passer ensuite directement dans le milieu de référence. En effet, la connaissance mobilisable (et les schèmes sur lesquels elle repose) résulte d'une inversion du processus de regroupement en processus de décomposition. De plus, les élèves viennent de travailler dans ce milieu (voir ce qui précède, premier objectif).
Les connaissances mobilisées pour la généralisation sont similaires à celles mobilisées durant la première partie. La validation de la propriété générale, qui doit suivre la perception de la généricité du ou des schémas produits dans un ou deux cas spécifiques, ne devrait pas poser de problème majeur.
Néanmoins, la concomitance d'écritures algébriques du type $\frac{n(n+1)}{2}$ et n^2 pourrait très bien inciter certains élèves à tenter de légitimer la généralisation par un recours aux connaissances liées au second degré. Une autre cause pouvant entraîner la volonté des élèves à rattacher un nombre carré à un unique nombre triangulaire est que ce point est proche du contenu d'une diapositive rencontrée dans les séances en amont : *a number can be both triangular and square* ! Ce type d'épisode pourrait nécessiter une intervention de l'enseignant afin de réorienter les élèves des groupes concernés vers des actions efficaces.
L'ensemble des processus d'actions et de conceptualisations qui concernent cette deuxième partie de la séance devraient participer également d'une expérience de la nécessité pour les élèves, expérience de même nature que la première.

- Acquisition langagière

L'étayage de la séance consiste en l'acquisition préalable d'un lexique phraséologique que nous avons déjà examiné dans ce qui précède. Le lecteur trouvera en annexes des compléments d'information sur ce point (Annexe 1). Nous considérons que le lexique phraséologique qui est venu compléter le répertoire de formulations L2 déjà disponible est suffisant pour un travail en compréhension et pour une production écrite (en L2) relativement à cette séance. Il doit être distillé tout au long de la séquence et peut être considéré comme répertoire minimal de fonctionnement compte tenu des objectifs que nous venons de préciser.
La question de l'optimisation des acquisitions langagières en L2 nous amène à monter dans les niveaux surdidactiques et à repenser les objectifs initialement visés en termes de savoirs langagiers en L2 dans le contexte de l'enseignement européen. Elle revient à mobiliser les outils théoriques développés dans la Partie théorique postérieurement à la séance et ce point sera traité dans l'analyse a posteriori.

II.5. Analyse a priori des Séances 3 et 4

II.5.a. La situation didactique et l'institutionnalisation

> La situation didactique repose d'une part sur la reconnaissance par l'enseignant du statut des énoncés proposés en tant que méthode et d'autre part sur la reconnaissance par l'enseignant, si cela s'avère nécessaire, de la validité des arguments produits par un élève ou un groupe d'élève dans le but d'invalider une méthode. (Gibel, 2009)

La situation didactique est postérieure à la séance expérimentale. Elle correspond à la Séance 3. Elle portera sur la présentation des posters réalisés pendant la Séance 2, les questions et remarques de l'enseignant suite à la présentation orale des élèves ainsi qu'un retour sur la séance expérimentale elle-même et une synthèse portant sur l'ensemble de la séquence. Elle participe de l'institutionnalisation des connaissances dans leur ensemble mais surtout de celles relatives à la séance expérimentale et par suite de la reconnaissance de la validité ou non-validité de certains arguments produits à cette occasion. La question du traitement des erreurs, syntaxiques (formelles ou langagières) est un point qui déborde de notre étude. Néanmoins, il est clair que l'enseignant en charge de la séquence d'enseignement a prévu de reprendre chacune des erreurs qui ne pourront pas manquer de se produire. Nous examinerons certaines d'entre elles à l'occasion de l'analyse des signes produits en phase adidactique.

II.5.b. Analyse a priori de la Séance d'évaluation (Séance 4)

L'évaluation prévue, d'une durée de 1 heure, s'apparente plus à une narration de recherche sur la base d'un questionnement prédéfini. Elle est donc davantage focalisée sur la langue et mobilise la mémoire des élèves quant au répertoire didactique partagé mais aussi quant à leur expérience individuelle au sein des groupes lors de la situation de recherche en phase adidactique.

Les performances écrites des élèves devraient apporter un éclairage particulier sur notre propre regard sur la séance expérimentale ainsi que des informations pertinentes.

Le lecteur trouvera en Annexe 1 l'ensemble du sujet d'évaluation (document 9).

Nous examinons en détail le contenu des questions et les attentes de l'enseignant.

- Question 1

> What is a *figurate number* (a polygonal number)?
> Give an example. Explain in what way a number can be said to be "triangular" for example.
> Is the notion of figurate number a modern one?...

La première partie de la question porte sur la notion-même de nombre figuré. Compte tenu du travail fait pendant la séquence, il est attendu que les élèves donnent une définition précise et au moins un exemple. Les élèves devraient aisément mobiliser le lexique phraséologique sur la forme et la disposition d'objets et certainement produire des schémas.

La deuxième partie de la question porte sur les éléments d'histoire des sciences apportés par l'enseignant en phase interactive et figurant dans les documents-ressources distribués aux élèves. Elle vise à évaluer l'efficacité des efforts fournis à la maison pour mémoriser des éléments de nature culturelle et scientifique en relation étroite avec le thème d'étude.

On attend une référence aux Anciens et aux Pythagoriciens en particulier.

- Question 2

Did you enjoy working in group and if so, why?

Cette question très simple pour but indirect de recueillir des informations sur la manière dont les élèves ont vécu la situation adidactique.

- Question 3

Imagine yourself as a teacher (but only momentarily!). What ***instructions*** would you give to your pupils to let them work in proper conditions?

Le but est ici d'amener les élèves à réinvestir certains éléments lexicaux et phraséologiques correspondant au document 8 (group-work instructions) tout en leur permettant de défendre un point de vue personnel.

- Question 4

During a group-work session, you showed that a square number is made up of two triangular numbers. Describe in a few words the manipulations you then performed on figurate numbers.

Cette question est davantage focalisée sur le contenu mathématique mais en rapport étroit avec le lexique mis en place en tant qu'étayage de la séance expérimentale et propre au registre des manipulations sur des objets et sur les arrangements.

- Question 5

Cette dernière question porte sur un savoir non-ciblé, c'est-à-dire n'ayant pas donné lieu à un apprentissage explicite. Elle a été insérée au sujet en tant que moyen indirect d'obtenir des informations sur un point que nous envisagions déjà de traiter en terminale. Les réponses des élèves devraient représenter une possibilité d'appréhender les représentations qu'ils se font de la notion de preuve et de voir dans quelle mesure ils peuvent comparer deux types de preuves présentant des similitudes mais situées dans des registres différents (registre schématique et registre algébrique). Aucun travail de comparaison de ce type n'a été effectué antérieurement. Nous sommes conscients que les élèves disposeront d'un temps assez réduit pour se consacrer à cette question.

La question est la suivante :

Here is the ***algebraic*** way of proving that the expression of the nth triangular number T_n in terms of n is $\frac{n(n+1)}{2}$:

$$Tn = 1 \quad + 2 \quad + \quad 3 \quad + ... \quad + n$$

+

$$Tn = n \quad + (n-1) + (n-2) + ... \quad +1$$ (reversed order)

hence, by adding side to side and by columns we get:

$$2Tn = (n+1) + (n-1+2) + (n-2+3) + ... + (n+1)$$

notice that there are n terms in the sum, each of them equal to (n+1)

that is : $2Tn = n(n+1)$

and therefore $Tn = \frac{n(n+1)}{2}$

Try to establish a ***correspondence*** between this proof and the ***manipulations*** you performed on triangular numbers in order to get the general expression in terms of *n*.

- Indications particulières

Le sujet du test contient une liste de mots-clés. Leur fonction est de faciliter la tâche par un rappel en mémoire d'expressions utiles mais aussi, indirectement, d'orienter la rédaction.

Key-words : adding / rectangular number / number of dots / reversing the order / bringing together / putting upside down …

III. Analyse a posteriori de la séquence

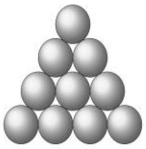
III.1. Analyse a posteriori des Séances 1 et 1bis

III.1.a. Séance 1

En ce qui concerne la Séance 1, nous rappelons qu'elle consistait en un cours dialogué basé sur un document Powerpoint[154]. Elle a, comme prévu, permis de consolider le répertoire de formulation. Les élèves ont ainsi eu l'occasion, en phase interactive de décrire les nombres figurés simples avec, de la part de l'enseignant, une exigence de précision. A cet égard, l'enseignant a insisté sur la toute première diapositive (figure constituée d'un assemblage de sphères identiques, disposées de manière à former un triangle) pour sensibiliser les élèves à l'importance de distinguer la notion de *triangularité* ou de *disposition triangulaire* des sphères par opposition au terme de *triangle,* en tant qu'objet spécifique à la géométrie (phénologiquement représentable mais dont la représentation en mathématiques renvoie elle-même à un objet abstrait[155]) sur laquelle la perception mais aussi par opposition à la notion toute aussi importante de *forme triangulaire*.

Les questions ont été focalisées sur la nécessité de prendre en considération, sur le plan cognitif et langagier, les notions abstraites de forme, de disposition, de figure géométrique en les associant à des descriptions spécifiques.

Afin d'illustrer notre propos, nous représentons ici la figure correspondant à la diapositive n°1 du document 2.



Les questions posées ont été du type :
- what makes you say that this figurate number is triangular?
- do you see one or several triangles?
- be more precise as to the description of the triangle you can see?
- by the way, do you really *see* it? Or do you just imagine it?
etc...

L'un des élèves a répondu: *we can see a triangle going through the centres of the balls*.

[154] Voir document 2 pour une transcription du Powerpoint.

[155] Nous n'abordons pas ici les questions d'ordre ontologique, en l'occurrence, de savoir si l'objet abstrait « triangle » auquel renvoie toute représentation de ce dernier en géométrie existerait ou non dans un monde idéal.

Conformément à ce que nous avions annoncé au paragraphe II.2, la deuxième partie de la séance a été l'occasion de distribuer des documents aux élèves (documents 3 et 4) et de les commenter en classe de façon interactive. Il s'agit d'une série d'exemples de nombres figurés accompagnée d'un lexique (voir Annexe 1, documents 3 et 4).
La notion de Gnomon a simplement été évoquée comme principe d'extension des figures et n'a pas constitué un objet de savoir.

III.1.b. Séance 1bis

Nous présentons et analysons ci-après quelques-unes des interactions verbales relatives à cette séance. Le lecteur trouvera en Annexe 1 (document 6) l'ensemble des interactions.

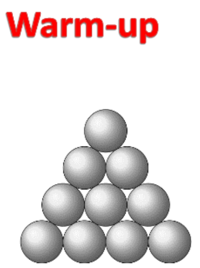
L'enseignant entame la leçon.

1.	P	So, let's start. I want you to take an active part in this lesson. (quelques explications supplémentaires sur le thème/ non retranscrites)

Suivent quelques questions relatives à la séance précédente.

1.	P	(s'adressant à E1) Can you tell me what we did last time ?
2.	E1	We saw a picture with balls
3.	P	What were the terms I used?
4.	E2	Rows and columns
5.	E3	In a rectangle
6.	P	Just a rectangle, with only the outlines?

Les questions visent à obtenir plus de précision. Elles invitent les élèves à cerner la nature des objets en distinguant forme, contours, sommets, disposition, etc…
Le but est de parvenir à une définition précise de nombre figuré.

7.	<u>P</u>	Let me switch on the Interactive Board (affiche la première diapositive) This is the first slide	diapositive n° 1 
8.	P	We spoke of imaginary lines… Did we see a real triangle? What is a real triangle?	
9.	E1	A real triangle is defined by three points	
10.	P	A triangle is made up of sides, of vertices … Does a point exist?	
11.	E5	No because… (hésite)	

L'enseignant affiche alors la diapositive suivante.

12.	P	(commentaires non retranscrits) What are the missing words? Can you match the question marks with a word?	<u>diapositive n° 2</u> In mathematics, a polygonal number is a number represented as dots or **???????** arranged in the shape of a **???????** polygon.

Les mots qui manquent sont censés attirer les élèves sur le fait que n'importe quel objet physique peut convenir dans la définition de nombre figuré, l'important étant la disposition sous une forme géométrique particulière mais aussi le caractère régulier du polygone.

13.		Try to guess the missing words What do you suggest? A dot is already an abstraction Something not visible To you, a dot is like a little circle Do you accept dots as objects?	
14.		What sort of polygon do we actually consider?	
15.	E3	regular	

L'enseignant affiche alors la diapositive numéro 3, en créant un léger effet de surprise.

16.	P	Let's check (P affiche la diapositive suivante) (P lit le contenu de la diapositive)	<u>diapositive n° 3</u> In mathematics, a polygonal number is a number represented as dots or **"cherries"** arranged in the shape of a **"red"** polygon.

Il enchaîne ensuite sur l'origine du mot *calcul*.

17.	P	Can you tell me the origin of the word calculus? Nobody knows? (P lit le contenu de la diapositive) Take a look at the next slide	<u>diapositive n° 4</u> Remember: *Calculus* is a Latin word meaning "*pebble*" or *stone* used for counting. Definition: a "*regular"* polygon is a polygon that has *all sides equal* and *all interior angles equal*.
18.	P	[…] arranged in the shape of a regular polygon. Can you rephrase? What does actually the adjective regular mean?	<u>diapositive n° 5</u> In mathematics, a polygonal number is a number represented as dots or pebbles arranged in the shape of a regular polygon.

La suite du questionnement consiste à amener les élèves à redonner une définition exacte de ce qu'est un polygone régulier.
L'enseignant, comme souvent, est conduit à relever et corriger une faute de syntaxe fréquente chez les élèves (le genre du pronom personnel doit correspondre à celui du référent, en l'occurrence un objet).

19.	E6	Same dimensions […]	
20.		He has…	
21.	P	It's not a person, it's a polygon so, say "it" and not "he"	

On notera que l'enseignant, sans doute influencé par ses propres préoccupations, à savoir par le fait qu'un nombre figuré peut être représenté par des objets quelconques, y compris en trois dimensions, en vient à élargir la question aux polyhèdres. Cela a pour effet d'éloigner un peu les élèves du but initial, à savoir de donner une définition de la régularité d'un polygone.

22.	P	You could describe similar things in three dimensions? In this case we'd talk about a regular **polyhedron**.	
23.	P	Give me an example of a regular polygon	
24.	E7	A square	

L'enseignant apporte alors une précision.

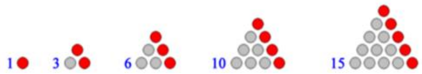
25.		We remember that it can be inscribed in a circle. A regular polygon can be inscribed in a circle.	

On notera que la propriété complète consistant à définir un polygone régulier comme étant inscrit dans un cercle et ayant tous ses côtés égaux n'est que partiellement rappelée. De plus, elle ne correspond pas à l'affichage de la diapositive n°4 (voir plus haut) :

Definition: a "regular" polygon is a polygon that has all sides equal and all interior angles equal.

Cet épisode est représentatif du décalage fréquent entre le questionnement de la situation contingente et celui envisagé a priori. L'enseignant, lorsqu'il a anticipé la séance, n'avait sans doute pas envisagé de manière suffisamment précise ce qu'il attendait dans cette phase (quelle définition précise de polygone régulier était visée ?), comme en témoigne la remarque précédente portant sur le décalage entre la diapositive n°4 et la définition incomplète.
Ensuite, l'enseignant s'apprête à entrer dans une nouvelle phase. Ce qui est visé est l'obtention de la règle constitutive des nombres triangulaires.

26.		Remind me of what we said about the Ancient Greeks. (s'adresse à un autre élève) What did they do? concerning numbers	
27.	E8	They made pictures for numbers	
28.	P	What sort of numbers?	
29.	E1	triangular	
30.	P	Here are the first 5 triangular numbers.	<u>diapositive n° 6</u>

		By the way, we say the first three or the first five. “Les cinq premiers” In English, the order is reversed. What are the next three. Take a look at the slide. What rule do you apply to get the next numbers?	 What are the next **3** triangular numbers? What **rule** do you apply to get the next numbers?
31.	E9	21	
32.	P	Right (s’adresse à E10) And the following ones ?	
33.	E10	28 and …36	

On notera l’insistance de l’enseignant sur le point de grammaire relatif à une erreur qu’il sait être fréquente chez les élèves (ordre syntaxique inverse à celui du français dans des énoncés du type, the first four, the last five, etc…).
Dans la phase précédente, les élèves sont sollicités par une question de nature calculatoire. Ils sont investis dans la tâche impliquée par le questionnement.
Dans la suite, l’enseignant cherche à faire énoncer par les élèves la règle constitutive des nombres triangulaires en introduisant pour les nombres triangulaires une notation indexée sur le rang.

34.	P	This is mental calculation. You’re right. So, you seem to understand the rule. Who can explain the rule?	
35.	E3	You have to add a number…you can divide…	
36.	P	No	
37.	E1	If you take ? […] you add the precedent number of “**the**” pebbles…	
38.	P	To explain things, it’s better to denote things	
39.	E1	To calculate the sixth, you take the fifth (lègère pause) T_5 and you add 6.	
40.	P	What is 6 with respect to the previous number. You add one more unit to the ...? To the what? … (attente)… (personne ne répond) To the rank. “Le rang” You recognize the rank when you say T_5 (P insiste sur **“five”**)	

On remarquera à cette occasion que l'enseignant, volontairement ou involontairement, ne corrige pas la faute de syntaxe : *the precedent number of "**the**" pebbles*. [Pebbles] est un indéfini, il ne nécessite pas la présence de l'article défini [the]. On dira par exemple *the ground is covered with pebbles* mais, lorsqu'il y a nécessité d'apporter des précisions, sur l'origine par exemple, ou par souci de distinction, on dira malgré tout *the pebbles that were used to cover the ground*.
Par ailleurs, dans l'action, l'expression très familière *To the what?* est tolérée étant donnée l'effort fait par l'enseignant pour faire dire aux élèves le terme qu'il attend, à savoir le mot *rank*. A cette occasion, il effectue au passage un code-switching[156] ponctuel limité à la traduction d'un seul mot et à des fins de clarification mais sans insister davantage car il souhaite maintenir l'attention des élèves sur la tâche en cours. Plus rigoureusement, c'est-à-dire dans un registre plus soutenu, la question aurait dû être par exemple : *what (exactly) do you add one more unit to ?*
L'interaction se prolonge de la manière suivante :

41.	P	We add one more unit to the rank and add it to the previous number	<u>diapositive n° 7</u> We add 6 to the 5th number , then 7 to the 6th , 8 to the 7th. ***We add « 1 more unit » to the rank and add the obtained number to the previous triangular number.***

L'enseignant aborde alors une autre phase. Le but de cette dernière est de faire remarquer que certains nombres admettent plusieurs possibilités d'arrangements sous forme géométrique. Le cas considéré est celui des nombres à la fois triangulaires et carrés.

42.	P	(P lit le contenu de la diapositive) One among the first 8 triangular numbers (i.e. 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36) is « particular ». Which one?	<u>diapositive n° 8</u> One among the first 8 triangular numbers (i.e. 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36) is « particular ». What is this number, and *in what respect* is it « particular »?
43.	E1	36 Because it's a square	
44.	P	(P montre la diapositive suivante) (P lit le début) Some numbers, like **36**, can be arranged both as a **…** (attente)…	<u>diapositive n° 9</u> Some numbers, like **36**, can be arranged both as a **??????** and as a **????????**
45.	E3		As a square and a triangle

[156] Basculement de la L2 vers la L1.

L'enseignant, dans ce qui suit, insiste sur le décalage entre ce à quoi renvoie habituellement les adjectifs triangulaire et carré, à savoir une forme bien identifiée, la plupart du temps attachée à des objets vus comme rigides, et les possibilités d'arrangements d'objets pour une même valeur numérique donnée.

46.	P	(P montre la diapositive suivante) Right	<u>diapositive n° 10</u> Some numbers, like 36, can be arranged both as a **square** and as a **triangle.**
47.		Isn't it funny to say that something is *triangular* and *square* at the same time? In maths, it makes sense.	<u>diapositive n° 11</u> Isn'it funny to say thatsomething is triangular and square at the same time?
48.	E1	Can we represent this phenomenon?	

On notera la question correspondant à la ligne 48. Elle est formulée immédiatement après l'intervention de l'enseignant par l'élève E1. Il se trouve être l'un des plus impliqué dans l'activité en cours mais également dans chacune des leçons de manière générale.

L'enseignant est sans doute légèrement déstabilisé car il ne répond pas directement à la question. Il préfère enchaîner directement sur les diapositives suivantes. Il se souvient qu'elles contiennent des informations sur les notions de disposition, de regroupement d'objets ou de points.

L'absence de réponse directe à l'élève E1 trahit un léger inconfort de la part de l'enseignant. Celui-ci n'est pas un natif. La charge cognitive nécessitée par les interactions et la volonté de coller au fil directeur des interactions ne lui permet sans doute pas de réagir avec une fluidité langagière adéquate[157].

Nous terminons en présentant uniquement quelques-unes des interactions qui suivent (lignes 49 à 58).

49.	P	Look at the next slide (P affiche la diapositive) Try to explain in what respect you can say that a figurate number is square and triangular. It's just a matter of description. Remember A number was just a group of … Of what?	<u>diapositive n° 12</u> *Try to explain* in what respect we can say that a figurate number (such as 36) is square and triangular.
50.	P	Dots	
51.	P	What can you do with objects?	
52.	E10	We can play…	
53.	P	What kind of game?	
54.	E11	Basket ball	<u>diapositive n° 13</u> Each figurate number has a certain numerical value.

[157] Ce type d'épisode est fréquent chez les enseignants en section européenne. Ils ne sont pas enseignants de langue vivante et n'ont pas été formés en tant que tels.

			Each figurate number corresponds to a certain amount of dots. We say that the number (corresponding to a numerical value) is triangular if the dots can be arranged so as to form a triangular pattern. But in some cases, the same number of dots can be arranged as a square.
55.	P	No	
56.			
57.	E5	Make a picture	
58.	p	A number, seen as a group of dots, can be arranged as…	
59.	P	(P montre la diapositive suivante)	

Nous en resterons là pour les analyses d'interactions en rappelant que la dernière diapositive (diapositive 19) est celle dont nous avons déjà parlé lors de l'analyse de l'évolution d'une conception chez les élèves (cf chapitre 6, paragraphe III.3.e.).

III.2. Analyse a posteriori de la Séance centrale (Séance 2)

III.2.a. Dévolution de la situation et dispositif de recueil des données

La situation a été réalisée en 2012, en classe de Première européenne, en présence d'une observatrice qui a pris des notes détaillées concernant, entre autres, les échanges entre certains élèves, le travail au sein des groupes, etc…
En premier lieu, nous insistons sur la grande satisfaction des élèves d'être parvenus à répondre aux objectifs visés, en l'occurrence d'avoir réussi à établir la valeur du centième nombre triangulaire mais également d'avoir établi par eux-mêmes, et c'est là un point essentiel, la formule permettant d'exprimer T_n en fonction de *n*. En ce qui concerne la partie II, la plupart des groupes sont parvenus à la formule reliant un nombre carré à la somme de deux nombres triangulaires consécutifs, et qui plus est, dans le cas général.
L'analyse qui va suivre prendra en compte les niveaux de milieux, en référence aux passages correspondants de la partie théorique.
Selon nos observations, les élèves ont fait l'expérience de la nécessité, ont fait l'épreuve des objets, sont rentrés dans le registre graphique puis algébrique, et ont produits tous les signes attendus, et même bien plus. En effet, ceux-ci apparaissent comme autant d'indices, pour l'observateur, du fait que la représentation par les élèves de la notion de généralisation est conforme à ce que l'on attend dans des situations de ce type. A cet égard, ce sont, comme nous allons le constater lors des analyses qui vont suivre, les exemples génériques produits par les élèves eux-mêmes qui attestent d'une bonne représentation des situations et des consignes.

La possibilité de formuler une généralisation des propriétés mathématiques concernées en utilisant des commentaires discursifs en L2 a reposé sur l'élaboration d'un répertoire phraséologique fourni lors des phases d'institutionnalisation.
Signalons que l'investissement de l'ensemble des élèves lors de la présentation (en L2) des posters avait permis de vérifier, non seulement l'assimilation du répertoire phraséologique L2 correspondant mais aussi la naissance d'une représentation satisfaisante autour des concepts de preuve visuelle, de nombre figuré. Enfin, nous précisons que les moments d'institutionnalisation ont été systématiquement effectués de manière interactive et sur la base d'un recours aux techniques développées par les pédagogues CLIL (warming-up, consolidating, etc…). Ces techniques ont été, nous le rappelons, largement détaillées dans la partie théorique.

III.2.b. Phase de formulation et de validation

Le lecteur trouvera en annexe, sous la rubrique *Séance des Nombres Triangulaires*, les productions de chacun des groupes. Rappelons qu'il s'agissait d'un format papier A3[158].

- Analyse des données recueillies par l'observatrice

La phase d'appropriation des consignes n'a duré que quelques minutes. Après la distribution des feuilles A3 et des brouillons, les élèves de la majorité des groupes se sont mis à dessiner des nombres triangulaires, à les juxtaposer dans diverses poitions. Pour débloquer la situation de certains groupes, l'enseignant a apporté des indications mais en veillant à maintenir l'adidacticité. Il rappelle alors par exemple le coup de pouce de l'énoncé (Hint) etc...
Lorsque les élèves dessinent les premières figures à caractère générique, certains se posent déjà la question de faire figurer ou non leur figure sur le document A3. Dans certains groupes, la perception du rôle fondamental joué par le rang n'est pas perçu. L'enseignant débloque la situation par des conseils du type:

> "Your drawing is correct but you shoud take the corresponding numbers into account..."

Ou encore:

> "As you can see, the number is T_4 and the rectangular is 20. What is 20 with respect to 4? Can't you see a relationship between the rank of the number and the dimensions of the rectangle? ..."

Ou bien encore:

> "You'd better take another example if you can't find the rule..."

Assez vite, avec ou sans indications, les élèves parviennent à calculer T_{100}.
Beaucoup ont le souci de légitimer le calcul en se plaçant directement au niveau syntaxique. La preuve est effectuée tantôt à l'initiative des élèves eux-mêmes, tantôt par une incitation effective de la part de l'enseignant:

> "Your calculation of T_{100} is correct but try to justify it"

Ou encore:

> "You still have time, so don't forget to justify"

Lorsque les élèves attaquent la partie II, certains adoptent une procédure erronée suite à une mauvaise interprétation de la consigne. Ils recourent au second degré pour traiter non pas le problème demandé mais, suite à une confusion, celui de l'écriture du nombre carré 25 comme coincidant avec celle d'un nombre triangulaire (unique) à déterminer.

[158] Pour des raisons pratiques, nous avons réduit les documents.

La dernière phase se traduit par des discussions au sein des groupes quant aux éléments à retenir pour le document final et par la réalisation de schémas génériques et l'ajout de commentaires et de formules, certaines collant aux schémas génériques, les autres étant des généralisation obtenues par calque ou légitimées dans le registre algébrique.

- Analyse détaillée d'un poster

La première chose qui vient à l'esprit en contemplant l'ensemble des documents est la richesse des signes produits, le plaisir manifeste que les élèves ont pu prendre et qui s'est traduit par le besoin de décorer leur productions et les commentaires linguistiques qui sont presque tous en L2.

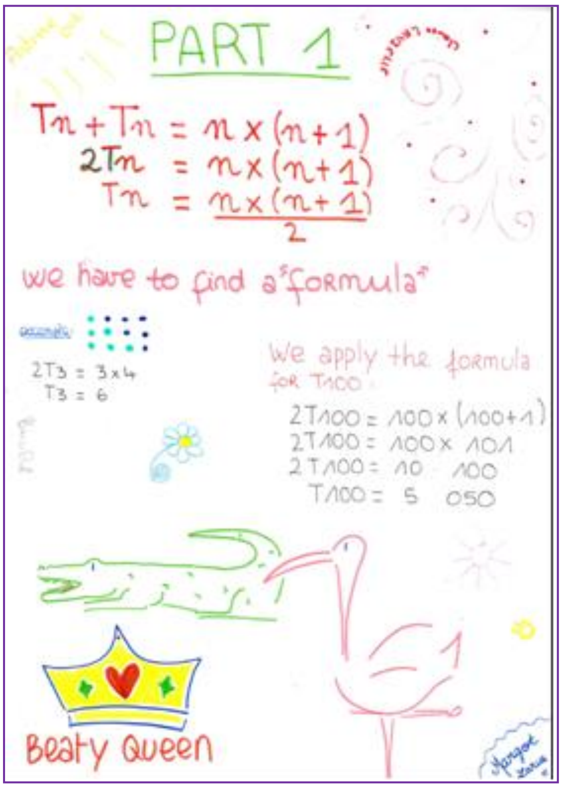


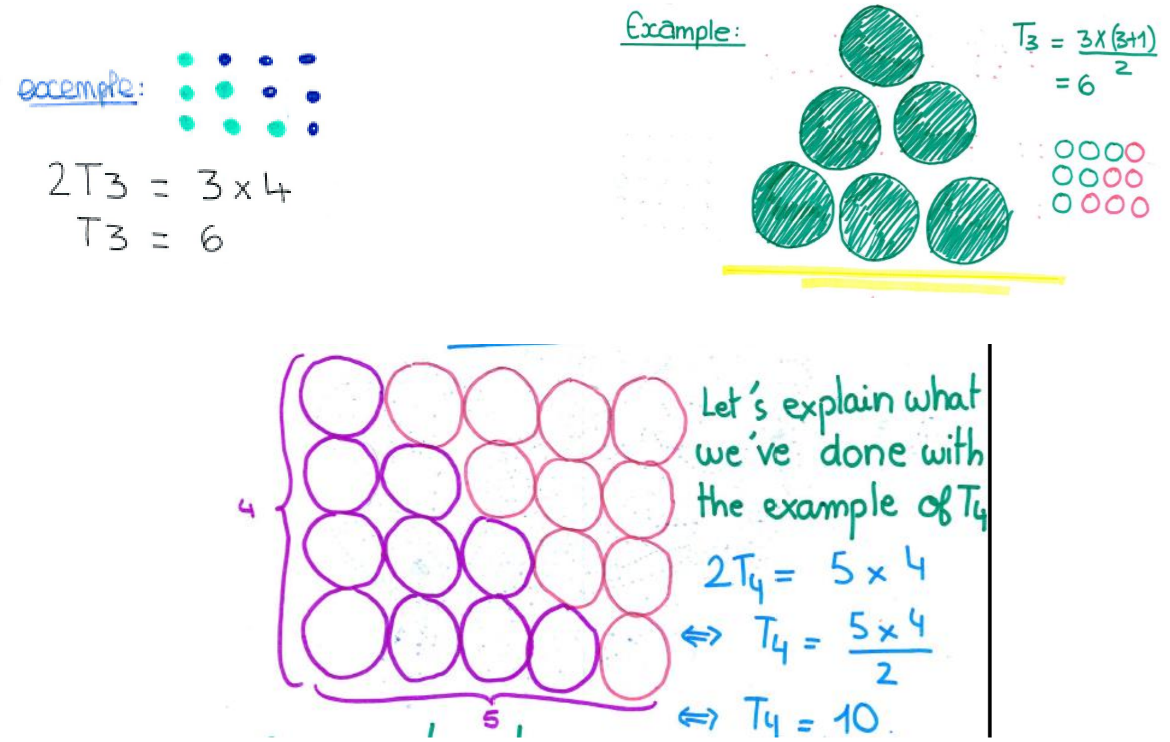
Figure 6.13 Poster

Nous allons dans ce qui suit examiner avec précision les représentations figurées, les signes algébriques et les commentaires linguistiques, en référence à nos cadres théoriques.

- Evolution du statut des signes et changements de niveaux de milieux.

En termes de niveaux de milieux, on peut affirmer sans conteste que les élèves se sont très vite emparés des consignes et ont rapidement produit des représentations figurées particulières. Le milieu s'est donc presque d'entrée révélé comme objectif, les élèves s'étant mis très vite à agir. Les premières conjectures ont pu être établies dès que les nombres ont été représentés, de manière presque naturelle, comme on s'y était attendu, c'est-à-dire en établissant de manière idéale un principe d'agencement schématique, une organisation scripturale, reposant sur le fait d'**inverser graphiquement** les nombres figurés. Les manipulations sont ici idéalisées et figurées à la fois.

Elles sont en correspondance analogique étroite avec la spécificité numérique de chacun des nombres comme en témoigne la **présence juxtaposée des signes algébriques** et **numériques** (c'est-à-dire mixtes) particuliers :



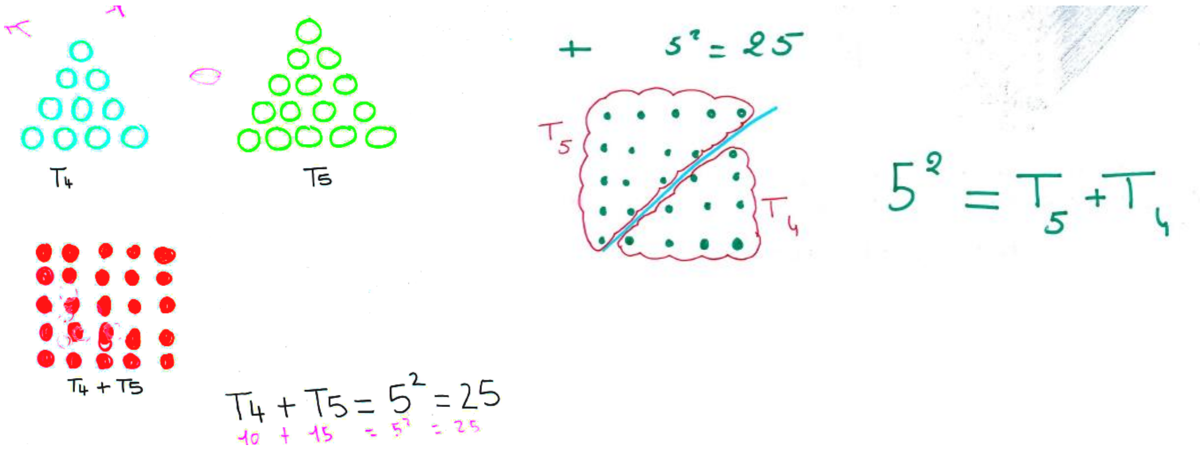
Extraits de poster

Figure 6.14

Sur l'image précédente, la volonté d'expliquer est manifeste. Le statut d'exemple est incontestable et il sera suivi d'un passage à la généralisation lui aussi explicite.
A ce stade, les élèves font des va-et-vient entre les niveaux didactiques M_{-2} et M_{-1}. C'est la force du caractère visuel des nombres figurés qui le permet. Les élèves représentent et perçoivent la correspondance numérique entre le regroupement des cercles-unités et l'addition en tant qu'opération algébrique. La fréquentation des élèves (ils sont en première) avec les notations indicielles et le rappel figurant sur la consigne (incluant figures et notations[159]) leur permettent d'entrer dans le registre algébrique en objectivant ce qu'ils voient, de façon conventionnelle. Ils sont, de plus, conscients du caractère générique de leurs écritures symboliques, celles-ci allant de pair (simultanément ou au travers de va-et-vient cognitifs) avec la perception d'une généralisation schématique idéalisée et surtout ressentie.
Le sens et la syntaxe ne sont pas dissociés. Les élèves utilisent leurs connaissances en matière d'écriture algébrique et relativement à la disposition triangulaire des nombres.
Les élèves perçoivent un lien entre la formule générale et l'extension schématique : il suffirait d'ajouter une rangée, puis une autre, et ainsi de suite, à chacun des nombres figurés. L'expérience est de l'ordre de l'expérience mentale : le regroupement sera toujours possible dans les mêmes conditions.

[159] Voir plus haut.

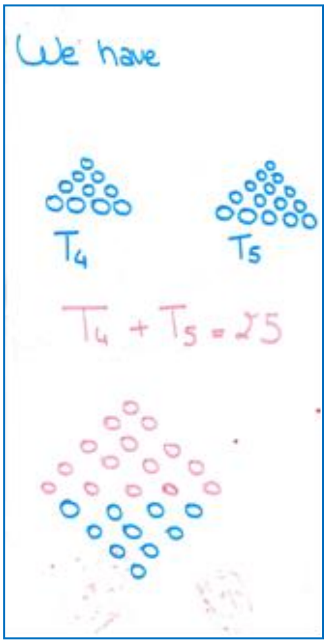
En ce qui concerne la partie II, le traitement du cas spécifique correspondant au nombre carré 25 et à sa décomposition en deux nombres triangulaires donne lieu à des situations et des interprétations similaires comme on peut le voir à travers les figures extraites suivantes :



Extraits de poster

Figure 6.15

Sur la figure ci-contre, il est intéressant de remarqu les élèves ont procédé différemment dans leur m d'assembler les nombres triangulaires.
On peut apprécier la présence de l'écriture linguistique « *We have* » qui est significatif d'une volonté de présenter les choses conventionnellement et traditionnellement du point de vue mathématique. Ceci témoigne de ce qu'on qualifie couramment d'un *souci de bien faire*. On appréciera d'ailleurs également la clarté de la disposition générale.



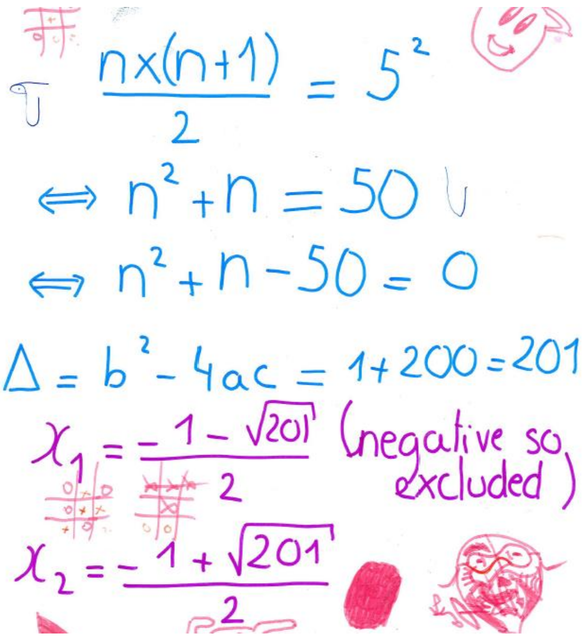
Extrait de poster

Figure 6.16

- Procédures erronées

On peut noter d'ailleurs que l'encadrement du terme *but* trahit la volonté d'insistance quant au fait mathématique significatif que nous venons d'évoquer. Signalons également un point important : le fait que les élèves ne se relâchent pas apparaît également lorsqu'il n'y a pas de basculement vers la L1, ce qui est le cas ici. Nous tenons à préciser malgré tout que le même groupe d'élèves a ensuite repris le problème convenablement.

Dans un mode d'appréhension similaire à la question de décomposition du carré 25, l'un des groupes a produit le raisonnement dont la trace écrite est illustrée sur la figure ci-contre.
On peut noter que, cette fois-ci, les élèves ont tenu compte du fait que les solutions devaient être entières mais en ne retenant que la caractéristique de positivité d'un nombre entier et non pas sa nature première (son caractère *entier*).

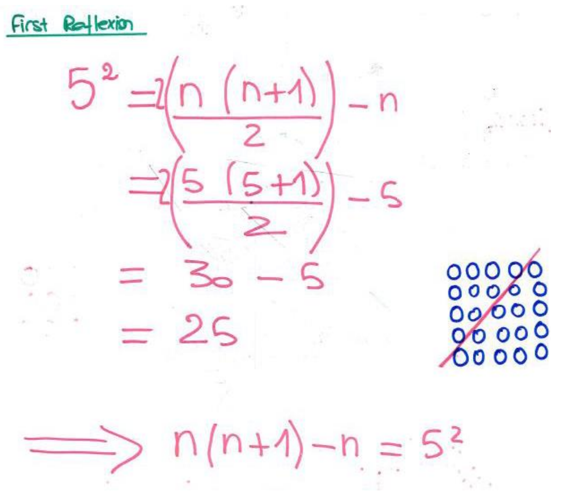


Extrait de poster

Figure 6.17

De plus, la formulation L2 « negative so excluded », conceptuellement cohérente mais maladroite, résulte d'un transfert, de la L1 vers la L2, de l'expression « négatif donc / par conséquent exclu », ce qui se traduirait plutôt par « negative and thus to be rejected ». A titre indicatif, la présence de *so* entre deux adjectifs serait initialement et naturellement perçue par un natif anglophone comme un modificateur d'intensité du deuxième adjectif, c'est-à-dire avec le sens ici de « tellement exclu » (les choses sont différentes à l'oral où on peut effectuer une légère pause après so, de manière à ce qu'il ne soit pas interpréter comme modificateur d'intensité s'appliquant à exclude).
Dans les deux cas précédents, les élèves ont émis des conjectures dans le milieu M_{-2} en utilisant leurs brouillons mais seuls les calculs généraux ou validés figurent sur le poster. Les extraits précédents (figures 6.16 et 6.17) sont des productions réalisées dans le milieu M_{-1}. La démonstration, en effet, a lieu dans ce milieu. Dans l'ensemble, le niveau de preuve est ici situé dans le registre syntaxique mais le rejet d'une solution fait intervenir un argument portant sur la nature du nombre. Le niveau sémantique est mobilisé avec la nécessité de contrôler le sens des solutions obtenues relativement au problème initial. Ce dernier porte sur des nombres entiers naturels (donc positifs).

Parfois, les élèves empruntent une voie originale, pour ne pas dire inattendue (c'est souvent le cas dans les situations à dimension adidactique). Le résultat produit est valide mais il ne correspond pas à l'objet de la consigne. Les élèves ont perçu la possibilité de décomposer un carré en deux nombres triangulaires identiques **et** (malheureusement ou plutôt maladroitement) une diagonale (en trop).



Extrait de poster

Figure 6.18

Ceci est représentatif d'un comportement relativement fréquent : les élèves sentent qu'une manière de voir fait apparaître *une possibilité d'enchaîner convenablement des schèmes d'action* tout en faisant émerger une propriété ou en tout cas un fait significatif à la fois sur le plan mathématique et sur le plan schématique. On appréciera la cohérence de la démarche qui pourrait d'ailleurs sans peine se prolonger jusqu'à une généralisation explicite si l'on remplaçait 5^2 par n^2.

Mais comme en témoigne le commentaire succinct, il s'agit d'une première réflexion (*first reflexion*) ! Les élèves ont d'ailleurs poursuivi dans un sens différent en généralisant convenablement, comme on le verra dans le paragraphe suivant.

On remarquera le statut particulier du symbole *n*. En se rapportant à la figure, on est en droit d'interpréter *n* comme une valeur numérique précise. Pour autant néanmoins, sa présence traduit une volonté de passer rapidement au cas général, ou mieux, une prise de conscience, dans l'écriture qui vient sûrement d'être faite au brouillon (les élèves en disposent), de l'association *formule disponible-valeur particulière*. Il paraît légitime de dire que les élèves se *sont approprié* la formule issue de la partie I, sans malgré tout être passés par une phase d'institutionnalisation ! En termes de milieux, les élèves sont presqu'au niveau M_0 (on peut dire au niveau $(\mathrm{M}_0)_{\mathrm{inf}}$) en ce qui concerne la capacité d'utiliser à bon escient la formule $\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}{2}$ comme valeur numérique d'un nombre triangulaire quelconque (celui de rang *n*, pour une valeur de *n* arbitraire). Relativement à la propriété qu'ils sont en train d'établir, le statut de *n* est encore provisoire, *entre celui d'une valeur arbitraire et celui d'une valeur spécifique encore attachée à la figure particulière juxtaposée*. Les élèves seraient donc encore au niveau M_{-1} ou peut-être $(\mathrm{M}_{-1})_{\mathrm{sup}}$. Comme nous ne disposons pas d'une chronologie d'écriture, ni d'un moyen d'accéder à la représentation mentale des élèves, nos propos n'ont qu'un caractère interprétatif et donc subjectif. Néanmoins, la défamiliarisation à l'égard de nos propres processus cognitifs relativement aux raisonnements mathématiques nous permet de dire, certes un peu caricaturalement, que c'est à cet endroit précis que l'élève **passe du sémantique au syntaxique**.

Il est bien évident, compte tenu de tout ce que nous avons déjà évoqué à ce sujet, que le fait d'écrire une écriture formelle correcte, rigoureuse, attendue, n'empêche en rien que l'élève *continue d'attacher du sens à la syntaxe,* loin s'en faut.
Il est clair en tout cas que les signes produits sont des indices de l'évolution du sens et du statut des objets mathématiques au cours d'une phase (complètement) adidactique. La force de la généricité de l'exemple est bien conscientisée chez l'élève, comme en témoigne la présence du *symbole formel* « $\Rightarrow$ » (on appréciera le côté *plus syntaxique*, ce qui est conforme à ce que nous venons de d'évoquer précédemment). Lors de cette phase, les élèves *oscillent entre une perception de la généricité et une généralisation effective*. On est en tout cas vraiment **dans** *un milieu de validation effective*, même si celle-ci est encore incomplète. Il s'agit d'une validation au caractère encore « expérimental »dans la mesure où elle est attachée au cas spécifique $n = 5$, mais si l'on regarde la première et la dernière ligne en faisant abstraction des trois autres, et si on considère que *le nombre spécifique 5 a déjà le statut d'un entier n arbitraire*, on tient là une preuve tout à fait acceptable. Les trois lignes intermédiaires tiennent lieu, quant à elles, d'une *démarche de vérification*. On peut également ajouter que les élèves étaient tout à fait capables d'aller jusqu'à une réécriture complète et rigoureuse mais qu'ils ont jugé plus utile de reprendre la tâche sous un autre angle, ce qu'ils ont d'ailleurs fait d'une façon totalement satisfaisante (à l'endroit indiqué par la rubrique « *second reflexion*[160] *»)*, comme nous l'avons déjà mentionné.

- Généralisation : formulation et justification

En ce qui concerne le passage à la généralisation, que ce soit pour la propriété de la partie I ou celle de la partie II, on peut distinguer deux types d'attitude. Soit les élèves ont établi la propriété directement, à partir des exemples génériques que nous avons d'ailleurs passés en revue, soit ils ont été jusqu'à proposer une démonstration algébrique classique. Certains groupes, curieusement, n'ont même pas pensé à donner la valeur de T_{100} alors qu'en fin de compte ils étaient parvenus à établir la formule générale et, par conséquent, en disposaient.

Voici quelques extraits et leurs commentaires (si nécessaire):

$$\begin{aligned} Tn + Tn &= n \times (n+1) \\ 2Tn &= n \times (n+1) \\ Tn &= \frac{n \times (n+1)}{2} \end{aligned}$$

Généralisation

Figure 6.19

160 Voir Annexe 1 pour le document complet.

On peut remarquer l'erreur classique résultant d'un transfert : (la construction rigoureuse étant *apply to*). Par ailleurs, comme cela est indiqué, le calcul de T_{100} n'a pas de valeur générique mais résulte bien d'une application de la formule générale. Le niveau est ici celui du milieu M_{-1}.

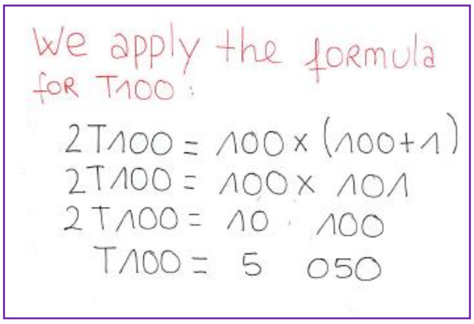
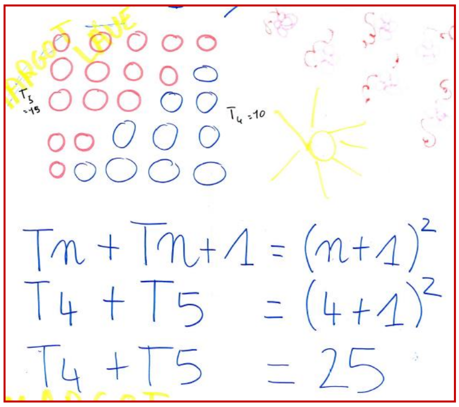


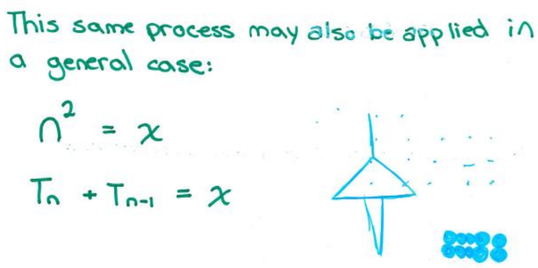
Figure 6.20 Extrait de poster

Sur les figures ci-contre et ci-dessous, il n'y a pas de justification algébrique du passage à la généralisation car la perception du caractère générique apparaît aux élèves comme suffisante pour effectuer un calque entre l'expression pour une valeur particulière de *n*, en l'occurrence *n* = 4, et la formulation générale.



Extrait de poster

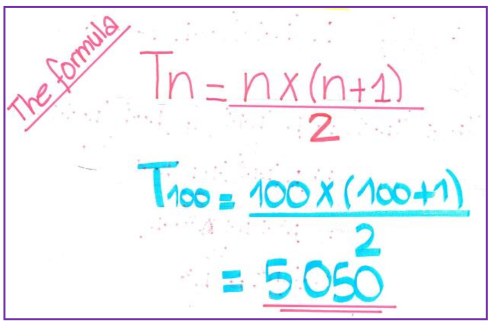
Figure 6.21



Extrait de poster

Figure 6.22

L'exemple ci-contre est un calque parfait du général sur le particulier, du point de vue de la disposition. Mais du point de vue de l'établissement de la propriété générale (première ligne), c'est encore une fois seulement la généricité perçue au travers du traitement des nombres figurés, dans le cas n=3, qui avait permis d'y parvenir.

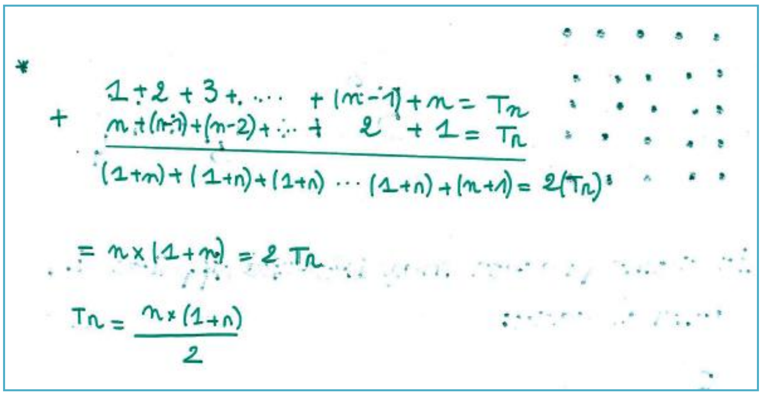


Extrait de poster

Figure 6.23

Dans l'exemple qui suit, la démarche a été subdivisée (par les élèves) en trois parties distinctes, parmi lesquelles la deuxième et la troisième se trouvent être plus abondamment commentées.

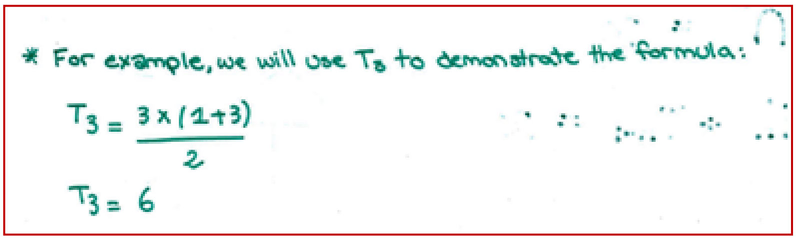
Pour établir la formule, les élèves ont réutilisé un mode de présentation qu'ils avaient déjà observé avec leur enseignant de mathématiques (qui n'est pas le professeur d'enseignement européen). La juxtaposition du schéma paraît artificielle car il correspond à un agencement de forme carrée et se réfère donc à la deuxième partie de l'activité.



Extrait de poster

Figure 6.24

Sur la figure ci-contre, correspondant à la deuxième étape (elle est délimitée par un astérisque), le verbe utilisé est *demonstrate* alors qu'il s'agit d'une *vérification*.



Extrait de poster

Figure 6.25

Par ailleurs, du point de vue strictement linguistique, il aurait été plus correct de dire *we will use* T_3 *as an example for checking (the formula)*. Néanmoins, sur le plan proprement mathématique, il conviendrait bien sûr de dire *we now check the formula with the particular value n=3.*

La dernière étape consiste, si l'on se réfère au commentaire, en une illutration de la propriété (pour n = 3). On notera au passage le côté méticuleux, avec la présence d'une consigne de division par deux, à l'extrémité inférieure gauche de la diagonale.

Extrait de poster

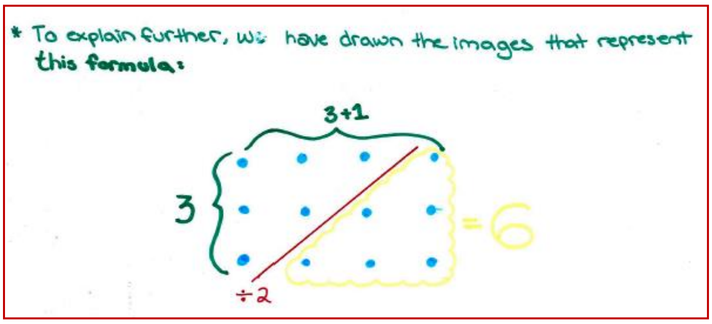


Figure 6.26

Il n'y a pas eu néceesité de recourir à la perception de la généricité d'un schéma car les élèves du groupe (ou l'un ou une partie d'entr eux) connaissaient la propriété.

Sur la figure ci-contre, il est clair que le terme *check* ne fait pas partie du répertoire des élèves.
La formulation trahit le fait que le nombre triangulaire est perçu comme central et que sa dépendance vis-à-vis de l'entier *n* est secondaire.
On aurait attendu une référence du type « with n=100 » ou encore « with 100 ».

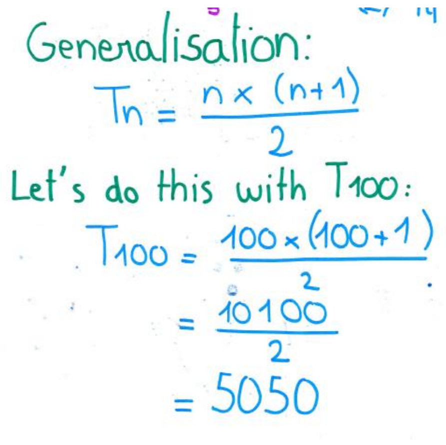


Figure 6.27

Nous terminerons par deux façons similaires très classiques de présenter la justification de la deuxième propriété :

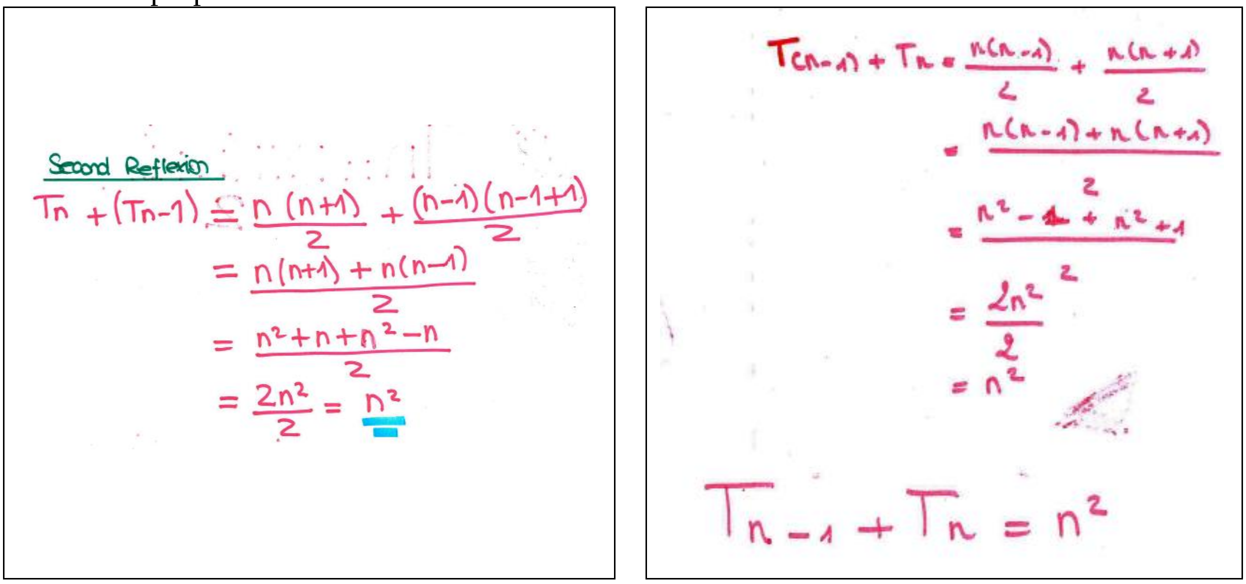


Figure 6.28 Extraits de posters

Dans les deux derniers cas (figure 7.28), les élèves travaillent exclusivement dans le registre algébrique. Le niveau des signes utilisés pour la preuve est ici le entièrement le niveau syntaxique. La conclusion dans le milieu $T_{n-1} + T_n = n^2$ est iconique de la propriété à démontrer et ne nécessite pas de commentaires particuliers en termes d'interprétation (niveau sémantique). Il est néanmoins fort probable que la validation au sein du groupe ait été abordée en vue de l'obtention d'un consensus pour la présentation finale

III.3. La présentation des posters (Séance 3)

Lors de la Séance 3, chacun des groupes a présenté à tour de rôle son poster. Un porte-parole a décrit le travail effectué lors de la séance expérimentale.
Excepté quelques fautes de syntaxe, corrigées par l'enseignant une fois la présentation achevée, chaque groupe a brièvement exposé son travail en décrivant les schémas produits et les résultats obtenus.

L'enseignant a relevé la qualité des schémas produits et effectué une synthèse sur l'activité mais aussi sur l'ensemble de la séquence. Il a également donné des précisions quant à l'évaluation à venir (Test en L2 d'une durée de 1 heure).
En ce qui concerne la présentation elle-même, il est à noter que, même si les élèves ont convenablement décrit les posters, certains d'entre eux ont tenu un discours trop proche du registre formel :

– "we can see that T_3 plus T_4 equals four squared".

L'enseignant a relevé et commenté la difficulté des élèves à prendre du recul pour se placer sur un plan plus général. Il a proposé, en référence à l'exemple précédent :

– "we have illustrated the fact that the sum of two consecutive triangular numbers is a square by taking one or several examples. As you can see on this picture, the triangular numbers correspond respectively to T_3 and T_4. By bringing them together we get the square of 4."…

Il a exposé oralement une manière précise de passer à la généralisation. Il est aussi revenu sur l'épisode au cours duquel l'un des groupes avait eu recours au second degré en expliquant les raisons de la confusion chez les élèves du groupe concerné. A cette occasion, l'enseignant a ainsi attiré l'attention sur le point de vue syntaxique suivant : dans la phrase *Can we obtain 5^2 from triangular number**s**,* le terme *number**s*** est au pluriel, ce qui suggère un recours à **plusieurs** nombres triangulaires et non un seul. A posteriori, il est clair que le travail en amont de la séance sur la nature particulière des nombres à la fois triangulaires et carrés (Séance 1bis) a interféré, sur cet exemple, avec la consigne de la Partie II de la séance centrale.
Enfin, il faut remarquer qu'il aurait été possible de proposer une synthèse écrite sur la présentation elle-même. Cela dit, un document portant sur le lexique a tout de même été proposé en fin de séance, en prévision de l'évaluation.

III.4. Analyse a posteriori de l'évaluation (Séance 4)

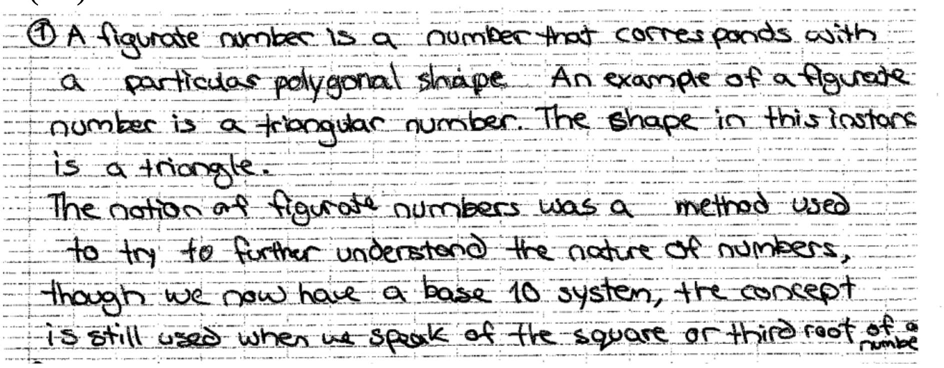
Nous rappelons que l'évaluation en tant que telle n'est pas un objectif de notre recherche. L'analyse a posteriori est ici un moyen de traiter les productions écrites comme des indices de leurs représentations.
Les élèves ont déjà, au cours du trimestre, été évalués sur la base de sujets à focalisation sur le contenu disciplinaire. Nous rappelons que l'évaluation en question vise ici le niveau de conceptualisation relativement à l'ensemble de la séquence en prenant davantage en considération le niveau de langue.
Nous n'examinerons pas la synthèse faite par l'enseignant au moment de la correction du test car ceci déborde de nos recherches. Nous signalons néanmoins qu'un traitement des erreurs significatives ou fréquentes a été effectué, que des précisions ont été apportées quant aux reformulations possibles lorsque les élèves se sont trouvés en défaut sur ce point, soit de manière individuelle sur les copies respectives, soit face à la classe lorsque le cas était récurrent.
Nous reprenons une par une les questions en examinons quelques réponses que nous jugeons représentatives parmi celles que les élèves ont proposées à titre individuel.
Le lecteur trouvera en annexe (Annexe1, document 10) quelques exemples de copies d'élèves (copies anonymées). Elles ont été scannées en totalité ou partiellement selon leur intérêt.

Nous désignons par (Ci) la ième copie. Pour chacune des questions, localement, les réponses sont désignées par Rép a, Rép b, etc… Nous préciserons (extrait) lorsqu'une partie seulement de la réponse de l'élève est examinée.

- Question 1

  What is a <u>*figurate number*</u> (a polygonal number)? Give an example. Explain in what way a number can be said to be 'triangular' for example. Is the notion of figurate number a modern one?

– Rép a (C1)



① A figurate number is a number that corresponds with a particular polygonal shape. An example of a figurate number is a triangular number. The shape in this instance is a triangle.
The notion of figurate numbers was a method used to try to further understand the nature of numbers, though we now have a base 10 system, the concept is still used when we speak of the square or third root of a number

L'élève est anglophone (d'origine canadienne). Elle a une formation plutôt tournée vers les lettres et participe à un programme d'échange international. L'emploi de tournures telles que [*a method used to further understand ...*] témoigne d'un niveau de langue, chez cette élève, plus élevé que celui de ses camarades francophones et atteste d'un recours à un anglais authentique et fluide. On notera la prise en considération, dans la dernière phrase, du système de numération et de termes utilisés de nos jours pour illustrer l'origine ancienne des expressions.
La formulation utilisée dans le passage [*a method used to...*] laisse entrevoir que l'élève a bien saisi l'un des objectifs de la séquence.
La tournure [*corresponds **with***] est correcte. Le *phrasal verb* utilisé par un francophone est plus fréquemment [*correspond **to***]. En effet la première formulation serait plutôt utilisée dans le cas de l'entretien d'une correspondance avec quelqu'un ([correspondre + avec] en français) et non pas avec l'idée d'une mise en correspondance entre deux éléments ([correspondre + à]). On appréciera la richesse lexicale, visible également dans l'utilisation du synonyme *concept* pour éviter une reprise de *notion* ou encore dans celle de *instance* pour ne pas reprendre *example*.
Même si l'on aurait attendu ou préféré *the shape is **that of** a triangle*, en considérant que le triangle ne se réduit pas à une forme, la formulation est moins imprécise sans doute pour un Anglophone car les objets géométriques sont en effet désignés en L2 par *shapes* (*2D- or 3D-shapes*).

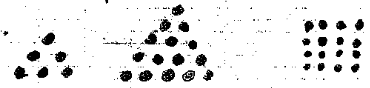
Rép b (C2)

1°) A figurate number – or polygonal number – is a number that can be represented as a shape, a polygonal like a triangle, a square, a pentagonal. It's a number that can be represented, in fact, by dots organized as that figures. for exemple, "3" is a triangular number because it can be represented by 3 dots that forms an equilateral triangle: " ∴ " It's the same for "6": 6 points can replesent an equilateral triangle :

In the same way As the same, we can consider "16" (like) a square number : (we can notice, that moreover, 16 is the square of 4 : $4^2 = 16$).

a polygon

the polygonals that replesent figurates number must be regulars polygonals : the number of dots must be the same on each side of the figure, for example : → there is are 4 dots on each side, as we fill the shape with other ordonate points, so it is possible to see two figurates numbers the one in the other.



It's a very ancient notion: Egyptians and Ancient Greeks used to know (an find/invent) that.

L'élève se trouve être un élément moteur de la classe. On remarquera la volonté de ce dernier d'apporter un maximum de précision : il donne en effet de nombreux exemples et les schématise, il insiste sur la notion de régularité de polygone en donnant des précisions sur la disposition (*the number of dots must be the same on each side of the figure*).
D'une manière générale, le lexique phraséologique de cet élève est riche et sa réponse atteste d'une grande motivation pour la matière (volonté de réutiliser un maximum de termes et d'expressions rencontrés en cours). Néanmoins, sans doute du fait d'une charge cognitive impliquée par l'exigence de précision qu'il s'impose quant au contenu mathématique, l'élève se relâche davantage qu'à son habitude du point de vue de la maîtrise syntaxique ; nombreux emplois inappropriés du *s* en tant que marque du pluriel réservée à la plupart des substantifs mais appliqués ici aux adjectifs ou encore en tant que flexion de verbe à la troisième personne du singulier au présent simple mais dans le cas d'un sujet au pluriel.
D'une manière générale l'élève a bien conceptualisé le fait que la notion de figuration numérique est fondamentalement une possibilité d'arrangement de points selon une forme. Son niveau de maîtrise de la phraséologie lui permet d'en témoigner explicitement et clairement dans sa réponse : *a number that can be represented as a shape* ; *represented by 3 dots that forms* [form] *an equilateral triangle.* Néanmoins, dans la phrase *it's a number that can be represented, in fact, by dots organised as **that figures***, la construction syntaxique, même si elle relève d'une vision cohérente et permet de communiquer clairement le contenu sémantique qu'elle est censée véhiculer, est maladroite.

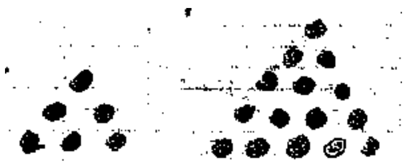
Le complément nominal se réfère à *dots* et s'interprète assez naturellement en L1 comme « *organisés à la manière de ce qui se passe dans le cas des figures précédentes* »

D'une manière générale, l'élève est représentatif d'un grand nombre d'élèves de classe européenne par son implication en cours dans des activités ayant un véritable enjeu mathématique, ce qui est le cas ici. Ce type d'élève a des choses à dire, point qui relève du niveau de conceptualisation conforme ou adéquat à la problématique de l'activité dans son ensemble, et il veut pouvoir les dire, autre point qui cette fois est dépendant de la formulation à l'égard de la maîtrise d'un certain lexique mais aussi d'une maîtrise plus ou moins grande de la syntaxe en cours d'énonciation. Il revient donc à l'enseignant de classe européenne de reprendre en phase d'institutionnalisation certains points de grammaire. Cela a été le cas sur cet exemple, sur la copie (l'enseignant a simplement souligné l'expression pour attirer l'attention de l'élève sur une formulation maladroite). En phase de correction, l'enseignant s'est adressé à l'élève en particulier, en valorisant le fait que ce dernier n'avait pas hésité à s'engager dans une structure phrastique riche, et donc lourde, mais que cela sous-entendait de pouvoir terminer la phrase sans relâchement à l'égard de la syntaxe mais aussi du sens.

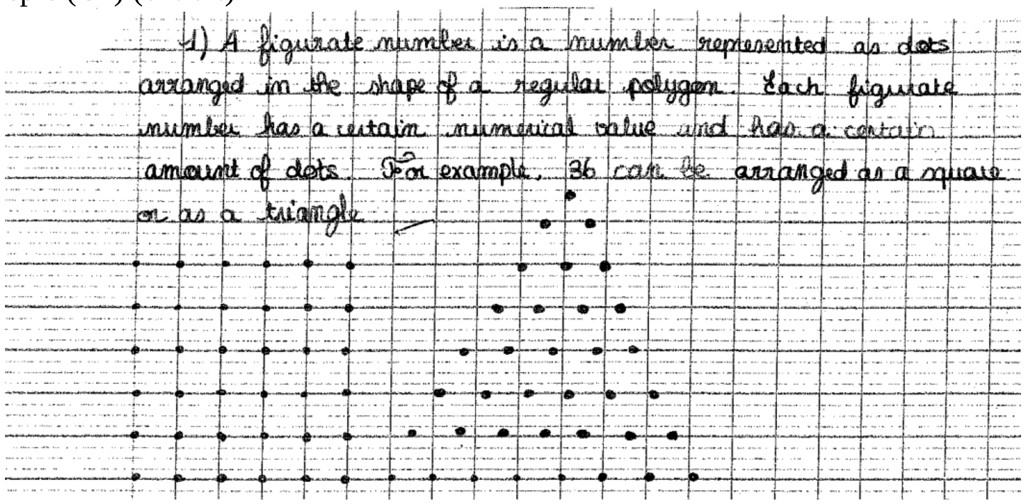
Il a donc proposé plusieurs options pour remédier à l'imprécision de la formulation *organised as* ***that figures*** :

> *organised as* ou *arranged as*
> *organised as in the previous figures*;
> *organised as in the previous cases*;
> *arranged so as to form such figures;*
> *arranged in the shape of those geometric figures;*
> *arranged as in the form of those geometric figures etc…*

En ce qui concerne la phrase *so there is [are] 4 dots on each side,* [*and, as* ?] *we fall* [?] *the shape with other ord**o**nate**s** [ordinate ?]points …* , celle-ci est plus difficile à interpréter. Le passage est accompagné de schémas. L'élève cherche à illustrer le fait qu'un nombre triangulaire contient, au niveau de sa représentation figurée, un ou plusieurs autres nombres triangulaires (les précédents).



– Rep c (C4) (extrait)



1) A figurate number is a number represented as dots arranged in the shape of a regular polygon. Each figurate number has a certain numerical value and has a certain amount of dots. For example, 36 can be arranged as a square or as a triangle

Comme on pouvait légitimement s'y attendre, tenu du travail fait pendant la séquence, les élèves ont systématiquement donné une définition précise et au moins un exemple. C'est le cas dans la réponse ci-dessus. Les élèves, pour cette question, ont assez convenablement mobilisé le lexique phraséologique sur la forme et la disposition d'objets et une majorité d'entre eux a accompagné les commentaires de schémas.
L'exemple de nombre figuré choisi (36) est pertinent et fait référence à la Séance 1 bis.

- Question 2

Did you enjoy working in group and if so, why?

Comme nous allons le constater, les réponses sont révélatrices de la manière dont les élèves ont vécu la situation adidactique.

– Rép a. (C1)

> ② Yes, working in a group not only got all of the students involved, but also forced us to think for ourselves while taking other's ideas into account.

Le niveau de langue est, comme on peut le constater ici encore et pour l'ensemble de la Copie1, largement supérieur à celui des autres élèves.

– Rép b.

> 2°) I enjoyed working in group because it has permited us to improve our English doing mathematics together. We have worked on a subject, talking english and having fun too. ect
> That allows everyone to participate and to search the answers and that is thrilling !

Erreurs syntaxiques :
Le *t* n'est pas doublé dans *permited.*
Problème de concordance des temps : *have worked* d'une part et *talking* et having fun d'autre part.

- Question 3

Imagine yourself as a teacher (but only momentarily!).
What <u>*instructions*</u> would you give to your pupils to let them work in proper conditions?

Les élèves ont largement réinvesti certains éléments lexicaux et phraséologiques correspondant au document 8 (group-work instructions) tout en défendant un point de vue personnel.

– Rép a. (Copie1)

> ③ I would allow them to whisper, but not chat at a normal volume, and if the sound level rose too high more than twice a class, I would take away the privilege of whispering. I would also give clear, precise instructions every time I asked them to complete an exercise in class.

A cette occasion, l’enseignant avait repris dans sa synthèse plusieurs des expressions utilisées par cette élève afin d’illustrer les tournures idiomatiques mais largement utilisées par les anglophones. On notera encore une fois la richesse phraséologique au travers de l’emploi de : *at a normal volume ; rise too high* ; *take away the privilege of* ; *complete an exercise*

- Question 4

  During a group-work session, you showed that a square number is made up of two triangular numbers. Describe in a few words the manipulations you then performed on figurate numbers.

– Rép a. (Copie 1)

④

Before discovering the formula, throughout the process of experimentation, we drew several drawings in the hopes that this would help us further understand figurate numbers. The drawing that we found the

the most useful was the following:

On notera l’emploi de l’expression *in the hopes of* (dans l’espoir de) avec l’utilisation d’un pluriel et suivi du conditionnel. L’emploi du pluriel pour cette expression figée est fréquent et naturel chez les natifs anglophones alors qu’il est en général insoupçonné pour de nombreux francophones et pour la majorité des élèves. Ce fait a également été présenté à la classe en phase de correction.

Du point de vue mathématique, on remarquera que le dessin est qualifié de *le plus utile* (*the most useful*), ce qui révèle une prise de conscience claire chez l’élève du rôle joué par les schémas lors de l’établissement des conjectures en phase adidactique. Dans un même ordre d’idée, l’élève a bien conscience d’avoir effectué une expérimentation (*throughout the process of experimentation*). L’expression *in the hopes of* révèle d’ailleurs la part d’incertitude inhérente à une véritable situation de recherche lorsque l’élève se situe encore dans le milieu M_{-2} avant que n’apparaisse les premières prises de conscience de l’existence d’une ou plusieurs propriétés générales sous-jacentes.

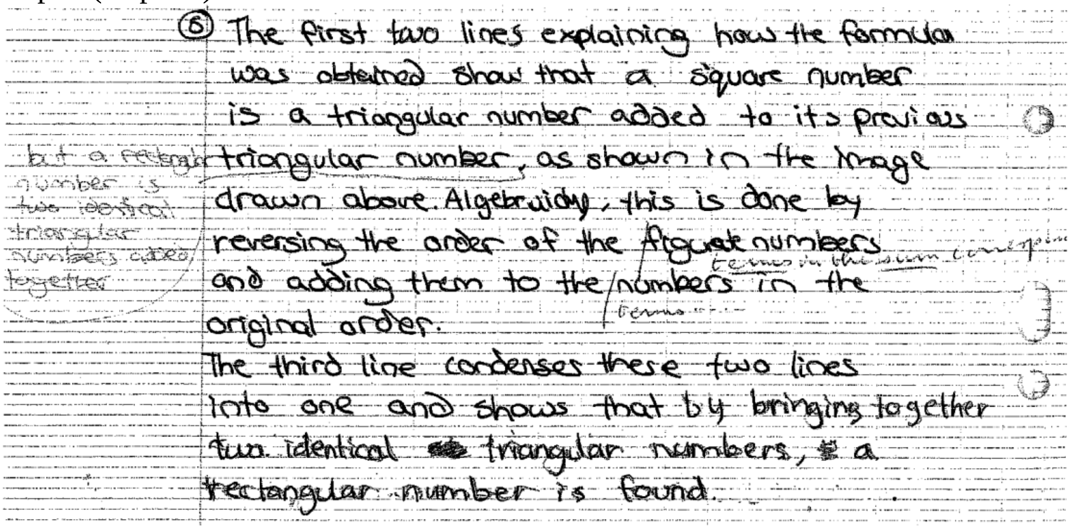
La suite de la réponse atteste de la bonne compréhension du sens de la question par l’élève :

This showed us that a square number is composed of a triangular number added to the precedent triangular number. We showed this by putting one of the figures of a triangular number upside down and bringing it together with the figure that came before it to form a square.

- Question 5

Cette dernière question[161] porte sur la comparaison de deux types de preuves présentant des similitudes mais situées dans des registres différents (registre schématique et registre algébrique).

– Rép a. (Copie 1)



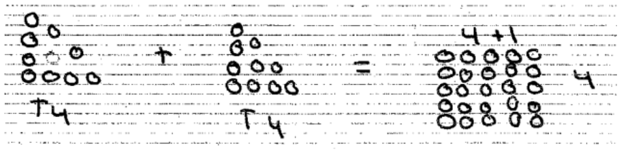
La réponse révèle **en apparence**, ou au premier abord, (voir suite du paragraphe pour une interprétation plus nuancée de l'ensemble de la réponse) une confusion entre les nombres concernés dans les Partie I et II de la séance centrale. En effet, l'élève parle de nombres carrés alors qu'ici, il s'agit de nombres rectangulaires. Les figures qui avaient été élaborées, en partie I ou II, sont proches. De plus, l'élève s'appuie sur la question précédente et est sans doute victime d'une **interférence** avec l'énoncé de celle-ci où, nous le rappelons, il était question **également** d'*actions alors effectuées* (*that you then performed*). La dernière phrase, en revanche, est très intéressante pour le fait qu'elle actualise d'une certaine manière, au niveau discursif, la mise en correspondance d'actions réalisées dans le milieu schématique et d'actions réalisées dans le milieu algébrique en tant qu'étapes d'une preuve. Tout aussi intéressante est la formulation *algebraically, this is done by…* ou encore la toute première phrase *the first two lines explaining how the formula was obtained…*

Ces phrases méritent un examen tout particulier. Le sens des mots utilisés et les questions de référence dans les divers milieux de la situation sont ici mis en relief ou tout au moins visibles au sein d'une même structure phrastique.

Dans la phrase *the first two lines explaining how the formula was obtained…* le groupe nominal sujet renvoie aux deux premières lignes de la démonstration algébrique, le gérondif *explaining* révèle une prise de conscience du rôle joué par la démonstration algébrique dans son ensemble (selon la consigne initiale, permettre d'établir la formule donnant le nième nombre triangulaire en fonction de *n*, mais chez l'élève, suite à ce qui pourrait apparaître au premier abord comme une confusion, montrer qu'un nombre carré est la somme de deux nombres triangulaires consécutifs) et du rattachement possible des deux premières lignes et de l'action d'addition opérée sur celles-ci à l'action analogue réalisée au niveau schématique. Nous faisons ici abstraction du fait que l'élève a repris l'exemple de la Partie II dans sa démarche d'articulation du travail dans les deux registres (algébrique et schématique). Dans la suite de la phrase, le verbe *show* atteste que l'élève a bien saisi l'articulation et formule la

[161] Voir Annexe 1, document 9, question 5.

suite en référence aux nombres figurés en soi par le biais de la proposition *that a square number is a triangular number added to its previous number*. La comparaison *as shown in the image drawn above* se réfère à la figure réalisée à la question 4. Ainsi donc, l'élève, malgré l'apparente confusion sur la situation sur laquelle porte la démonstration (nombre triangulaire et expression et non pas nombre carré et décomposition), a bien saisi l'idée générale de la consigne, à savoir l'établissement d'une correspondance entre deux types d'actions. La phrase suivante (*algebraically, this is done by…*) est un retour à l'action schématique et au processus d'inversion dont l'analogie avec celle réalisée au niveau schématique est, chez l'élève, parfaitement claire !
La dernière phrase, *the third line condenses these two lines into one and shows that by bringing together two identical triangular numbers, a rectangular number is found* est celle qui montre en fait que l'élève a saisi les similarités existant entre les deux parties de l'activité d'origine (Partie I et II) et effectue ici-même un retour à l'objet initial de la question 5, révélant au passage un point de vue très élaboré alors qu'au départ on aurait pu croire à une confusion pure et simple. L'articulation qu'elle propose entre les actions dans les deux registres est originale et soutenue au niveau phraséologique : recours au verbe *condense*. L'élève termine par une illustration schématique générique correspondant au rang 4 (voir dessin ci-dessous).



III.5. Expérience de la nécessité et connaissances

L'analyse des signes produits en phase adidactique (paragraphe III.2.) et des éléments (indices de représentations cognitives d'élèves) obtenus lors de l'évaluation (III.4, réponses à la question 5 notamment) va nous permettre de dire si oui ou non l'expérience de la nécessité a été réalisée de manière effective par les élèves. Une telle affirmation mérite un examen particulier. De quelle expérience de la nécessité s'agit-il ici et quelles sont les connaissances associées ?
La nature de l'activité de recherche de la Séance centrale porte sur l'établissement de preuves au niveau visuel (schématique) et sur leur rapport à des preuves algébriques, l'ensemble étant réalisé en phase adidactique puis institutionnalisé par l'enseignant.
Fondamentalement, la nécessité dont il est question ici, s'articule conjointement avec les notions de vérité, de preuve et de convaincance. Elle se situe sur deux niveaux qui se trouvent correspondre étroitement à des registres mathématiques. Elle consiste en un passage d'une expérience de la nécessité phénoménologique, c'est-à-dire impliquant les sens, à une expérience de la nécessité s'appuyant davantage sur la logique et sur le système de règles internes au registre algébrique. Dans le premier cas, elle repose sur une très forte convaincance des faits tandis que dans le dernier cas, la convaincance résulte de l'accoutumance à des règles usuelles et donc sans remise en cause de leur légitimité. La connaissance associée porte sur la conceptualisation de cette double expérience. Ceci amène l'élève à un niveau supérieur de conceptualisation dans la mesure où ses représentations consistent en des vues synthétiques portant sur des faits et des actions réalisées dans deux registres séparés. A ce propos, la réponse (à la question 5) de la Copie1 laisse apparaître dans

la formulation une articulation réussie (voir III.4.) du travail effectué dans les deux registres. L'ensemble des résultats fournis par les analyses a posteriori nous autorisent donc à affirmer que, d'une manière générale (après un examen en détail des réponses de chacun des élèves[162]), l'expérience de la nécessité a bien eu lieu. En ce qui concerne la connaissance de nature synthétique, elle n'était pas visée comme savoir explicite. Certains élèves l'ont en tout cas atteinte (voir III.4.). C'est uniquement à l'occasion de la séquence revisitée sur la Somme des Cubes que nous effectuerons de manière effective et explicite ce type de travail.
Une connaissance supérieure encore, celle du mathématicien, consiste dans la prise de conscience du fait qu'il n'y a finalement rien de surprenant à cela, c'est-à-dire au fait qu'une telle expérience double de la nécessité soit possible. En effet, le système de règles établies en algèbre se fonde lui-même sur les régularités du monde physique, sur leur interprétation idéalisée et sur un processus d'abstraction et d'objectivation symbolique par des signes (algébriques) dont l'usage a fait l'objet d'un consensus au cours de l'histoire. Il se trouve précisément et fort heureusement que chacun peut réitérer a posteriori et à loisir ce type d'expérience, par le biais d'une perception active de faits indubitables et réguliers et par la prise de conscience d'analogies.

IV. Niveau d'intégration et enrichissement lexical

IV.1. Niveau d'intégration de la séquence

Le niveau d'intégration peut être apprécié relativement à l'acquisition langagière en L2, au niveau de conceptualisation atteint par les élèves à l'issue de la séquence, à la capacité de ces derniers à traiter des problèmes mathématiques conformément à la pratique mathématique en elle-même mais aussi par le biais d'une utilisation pertinente et efficace du répertoire de formulations en L2.
L'évaluation du niveau d'intégration devrait être également, selon nous, un objet de recherche à part entière. En effet, elle présuppose une appréciation du niveau de conceptualisation qui, dans l'idéal, devrait pouvoir être quantifié. Elle passe indéniablement par l'évaluation des élèves en termes d'acquisition langagière ou encore en termes de compétences en référence au Cadre Européen.
Malgré toute la subjectivité que cela implique et qui, de toute façon, est inévitable, nous nous positionnons quant au niveau d'intégration de la séquence :

- l'acquisition lexicale et phraséologique est jugée satisfaisante en référence à la compréhension du fait du déchiffrement adéquat des consignes écrites et de la bonne réactivité des élèves en interaction
- en production, l'utilisation du lexique phraséologique est jugée assez satisfaisante du point de vue du niveau de langue et très satisfaisante du point de vue de l'adéquation avec le traitement mathématique.
- en termes de compétences, le niveau général visé étant au mieux B2 à l'issue de l'examen de terminales, nous pouvons donc légitimement dire que, en termes de savoirs langagiers (l2) visés et effectivement atteints, la séquence est très bien située relativement à ce point

[162] Pour des raisons de place disponible, nous n'avons examiné que quelques cas.

- en termes de savoirs visés mathématiques, le niveau de connaissances des élèves à l'issue de la séquence est considéré comme bien enrichi, du fait de l'éclairage particulier de la notion de preuve et de l'émergence effective de connaissances

IV.2. Vers un élargissement du répertoire de connaissances lexicales et notionnelles

Le répertoire lexical et phraséologique est indissociable du répertoire de représentations cognitives.
Le thème des nombres figuré aurait pu être l'occasion d'un travail plus approfondi autour du mot-concept *figure*. Ce type de travail pourrait être très enrichissant pour l'élève. Cet élargissement potentiel des acquisitions langagières (lexicales, notionnelles et culturelles) est présenté en tant que prolongement possible des travaux effectivement réalisés avec les élèves.
Nous citons ci-dessous un extrait du site etymology.online afin que le lecteur ait un aperçu des éléments d'ordre étymologique :

> figure (n.)
>
> c.1200, "numeral;" mid-13c., "visible appearance of a person;" late 14c., "visible and tangible form of anything," from Old French figure "shape, body; form of a word; figure of speech; symbol, allegory" (10c), from Latin figura "a shape, form, figure; quality, kind, style; figure of speech," in Late Latin "a sketch, drawing," from PIE *dheigh- "to form, build" (see dough).
>
> Philosophical and scientific senses are from use of Latin figura to translate Greek skhema. Meaning "lines forming a shape[163]" is from mid-14c. From mid-14c. as "human body as represented by art;" late 15c. as "a body, the human form as a whole." The rhetorical use of figure, "peculiar use of words giving meaning different from usual," dates to late 14c.; hence figure of speech (by 1704). Figure-skating is from 1835. Figure eight as a shape was originally figure of eight (c.1600). From late 14c. as "a cut or diagram inserted in text."

Le mot *figure* en L2 a trois signifiés (qui peuvent eux-mêmes être nuancés, c'est-à-dire détaillés avec plus de précision ou encore subdivisés)[164]:

a) a symbol that represents a number
b) a value that is expressed in numbers
c) a person or animal that can be seen only as a shape or outline

Ses significations sont plus précisément les suivantes :

1) *symbole numérique*
   figure = number symbol (synonymes : numeral, digit)
   to be good at figures
2) *caractère écrit ou imprimé*
   figure = written or printed character
3) *valeur, en particulier valeur numérique*
   value especially as expressed in numbers (syn. sum, price)
   sold at a low figure
4) *forme géométrique*
   figure = geometric form (as a line, triangle, or sphere) especially when considered as a set of geometric elements (as points) in space of a given number of dimensions[165]

---

[163] Cette caractérisation est essentielle dans l'accès aux signifiés du mot *forme* : l'identification et/ou la reconnaissance d'une forme passe par la perception d'un contour, lui-même souvent défini comme une ligne.
[164] Les informations sont tirées de l'article *figure* du dictionnaire Merriam-Webster.
http://www.merriam-webster.com/dictionary/figure

a square is a plane figure

5) *forme ou apparance corporelle*

figure = bodily shape or form especially of a person

a slender figure

figure = object noticeable only as a shape or form

figures moving in the dusk

6) representation graphique d'une forme, en particulier de celle d'une personne ou d'une entité géométrique

figure = the graphic representation of a form especially of a person or geometric entity

Autres significations:

a diagram or pictorial illustration of textual matter

a person, thing, or action representative of another

figure of speech

an intentional deviation from the ordinary form or syntactical relation of words

the form of a syllogism with respect to the relative position of the middle term

an often repetitive pattern or design in a manufactured article (as cloth) or natural product (as wood)

appearance made : impression produced

a series of movements in a dance

an outline representation of a form traced by a series of evolutions (as with skates on an ice surface or by an airplane in the air)

a prominent personality : personage <great figures of history>

a short coherent group of notes or chords that may constitute part of a phrase, theme, or composition

Exemples d'utilisation:

Are you sure of your figures?

I came up with a very different figure.

No precise figures are available yet.

The company had yearly sales figures of half a million units.

We could barely make out some figures moving in the mist.

The vase is decorated with figures of birds and fish.

The walls of the cave are covered with drawings of human and animal figures.

A collection of bronze figures

En ce qui concerne les mots et expressions qui suivent et qui sont utilisables dans notre séance, à savoir *figure*, *figurate number*, *geometric figure* et *figure out*, leur parenté (proximité sémantique du fait du partage d'un ou plusieurs signifiés) est manifeste. En effet, le signifié de *forme* est lié à l'un des signifiés du mot *figure* (L2) car il est étroitement associé aux *contours* du symbole numérique dans son écriture physique ; le concept de *nombre figuré* fait intervenir la notion de *forme* au niveau de l'*agencement* des objets de sa représentation figurative ; l'expression verbale *figure out* aurait pu être l'objet d'un apprentissage explicite car elle est très usitée en anglais.

[165] On remarquera la proximité sémantique de cette définition avec celle de nombre figuré.

Voici une définition de *figure out* :

1) figure out = calculate
   I'll try to figure out how much it'll cost. Je vais essayer de calculer combien ça va coûter.
2) figure out = understand [166]
   I couldn't figure out what it meant. Je n'arrivais pas à comprendre ce que cela signifiait.
   It took them about one month to figure out how to start the equipment.
   I can't figure him out at all. Je n'arrive pas du tout à le comprendre.
3) figure out = decide
   She had not yet figured out what she was going to do. Elle n'avait pas encore d'idée précise de ce qu'elle allait faire.

Sans avoir à effectuer d'étude approfondie, il est clair que les mots et expressions (mots-concepts) *figure*, *figurate number*, *figure out* partagent des signifiés avec *shape*, *outline*, *pattern* mais aussi avec *picture* (nom et verbe), *representation*, *decide*, *understand* etc…
Indépendamment d'une focalisation sémantique et phraséologique effective sur ces termes (à des fins d'apprentissage) et de la possibilité d'effectuer un travail didactique explicite à des fins d'enrichissement lexical et de meilleure conceptualisation, l'utilisation éventuelle de ces termes par l'enseignant et/ou par les élèves durant la situation n'avait pas été envisagée comme pouvant constituer un obstacle.
Par ailleurs, la séquence a été l'occasion d'effectuer de multiples *mises en correspondances* de tous ordres :

- sur le plan cognitif, entre des éléments de pensée verbalisés ou non, des images mentales ;
- sur le plan discursif, lors des descriptions concernant les schémas relatifs aux nombres figurés et les transcriptions algébriques.

Un travail sémantique, lexical et phraséologique autour du mot-concept *match* aurait été possible. Compte tenu de l'état de nos recherches à cette époque, cela n'a pas été effectué en tant que travail ciblé. Il en sera tout autrement pour la séance portant sur la Somme des Cubes (chapitre 7).
Les questions d'enrichissement du répertoire lexical et notionnel que nous venons d'aborder sont à contraster avec celles portant sur la notion de répertoire minimal de fonctionnement. Notre situation a bien fonctionné, ce qui situe le niveau lexical visé et effectivement approprié par les élèves comme garantissant un bon fonctionnement sur le plan mathématique et conceptuel et le rend très satisfaisant compte tenu du volume horaire disponible.

Conclusion

Les modalités selon lesquelles nous avions envisagé cette séquence ont été fortement conditionnées par la spécificité de la classe (classe de Première européenne), à laquelle nous avons déjà fait allusion, et les contraintes induites par les limites du volume horaire imparti. Nous avons malgré tout intégré des activités à focalisation linguistique (les séances interactives d'introduction) même si elles diffèrent de celles que nous rencontrerons au chapitre 7 et que nous avons réalisées à l'occasion de la Séance sur la Somme des Cubes. Comme nous l'avons vu, des documents ressources lexicaux et phraséologiques ont contribué

[166] Dans ce cas, *figure out* peut être rapproché de *picture* (verbe) comme on peut le voir dans l'expression suivante :
I can easily picture it exprssion qui signifie en L1 *j'imagine très bien* (je vois bien ce que vous voulez dire).

à cette occasion à enrichir et consolider le répertoire de formulation. En effet, le lien entre les descriptions de formes, de dispositions d'objets dans la vie courantes sont des concepts quotidiens au sens de Vygotski. Les élèves ont une bonne conceptualisation de ces notions et possèdent, en étroite corrélation avec celles-ci, des capacités de formulation dans la L1 assez naturelles. La possibilité de description des phénomènes de perception de formes ou de dispositions particulières, dans la vie courante, peut donc être verbalisée naturellement (mais en L1) par les élèves, lorsque c'est nécessaire, c'est-à-dire sans que les élèves aient à se focaliser sur la formulation. Avant de confronter les élèves avec d'autres situations, pour lesquelles il sera nécessaire de distinguer également les notions abstraites de forme et de disposition géométriques, nous veillerons, dans nos ingénieries à venir (chapitre 7, séance 3, par exemple) et malgré un volume horaire imparti toujours limité, de rattacher le contenu de l'une des séances à des expériences, ou à des situations de la vie courante, à l'occasion desquelles les notions de formes et de dispositions pourront être utilisées plus naturellement en L2. Ceci permettra une consolidation au niveau sémantique et langagier en L2 et offrira aux élèves la possibilité de s'approprier, de manière certes limitée mais plus efficace, un lexique phraséologique très fréquent dans la communauté de discours mathématique, à savoir celui qui porte sur la *géométrie perceptive*. Le type de discours qui s'y rapporte est plutôt difficile à acquérir en L2 alors qu'il est relativement, ou en tout cas, plus naturel dans la L1. Il repose sur l'habitude d'effectuer, sur le plan de la formulation en langue naturelle, la distinction entre forme, disposition et objet géométrique. Notons au passage que le passage des expressions correspondantes de la L1 à celles de la L2 n'est pas en général transparent. On peut ajouter également que les types de formulations de la géométrie perceptive se rencontrent également dans la vie de tous les jours dès qu'il s'agit par exemple de *disposer des objets de manière à ce qu'ils forment une figure particulière* ou dès que l'on souhaite modifier *une configuration* d'un point de vue *géométrique*. En mathématiques également, dans des branches autres que la géométrie, et sur le plan représentationnel[167], on est souvent amené à parler de *disposition* d'objets mathématiques particuliers relativement à d'autres, ou de *manière de placer* ou *modifier l'emplacement* de certains objets, avec des préoccupations de *disposition géométrique particulière* (matrices *rectangulaires*, *triangulaires*, *triangulation* de matrices, méthode du Pivot de Gauss dans la résolution de systèmes d'équations linéaires, permutations *circulaires*…).
Par ailleurs, il nous apparaît que nous aurions pu, d'un point de vue épistémologique et parce que cela s'y prêtait relativement bien, saisir l'occasion du thème d'étude pour approfondir l'idée du Gnomon, mais nous avons fait le choix de nous contenter, pour la classe de Première, d'une brève allusion à ce sujet, lors de l'énumération des divers nombres polygonaux[168]. Il aurait été possible en effet, en l'absence de contraintes ou en modifiant les objectifs initiaux, de faire davantage allusion aux Anciens en précisant la manière très efficace dont ils ont découvert et illustré de nombreuses propriétés arithmétiques, et à cette occasion, d'en donner des exemples. Les Anciens utilisaient en effet le fameux Gnomon, sorte d'équerre (dans le cas des nombres carrés), ou plutôt, motif en forme d'équerre, constitué de cailloux (ou de n'importe quels objets tenant lieu d'*unités*), comme moyen d'accroître de manière algorithmique les nombres figurés en passant ainsi d'un nombre figuré donné au nombre de rang supérieur par l'adjonction d'un tel Gnomon. La référence à un Gnomon

[167] C'est-à-dire relativement aux divers registres sémiotiques utilisés en mathématiques.
[168] Voir document 3

permet, elle aussi, d'établir un lien entre une preuve dite visuelle reposant explicitement (figurativement) sur l'emploi d'un tel gnomon et une preuve algébrique.
En ce qui concerne la situation centrale, les productions d'élèves montrent sa richesse. A ce stade de la recherche, elle nous a conforté dans notre intention de réserver une part importante aux phases adidactiques lors des séances futures car l'adidacticité permet l'émergence de nouvelles connaissances et constitue une opportunité idéale pour faire l'expérience de la nécessité.
Ajoutons enfin que la dimension ludique de la situation centrale, étant donné le plaisir effectivement manifesté par les élèves à cette occasion, n'est pas négligeable[169].

[169] Le côté ludique a été très présent dans cette situation : en témoigne un épisode où, alors que les élèves commençaient à préparer leur poster, l'une d'elle est venue demander à l'observatrice : "Madame, est-ce que je peux dessiner des flamants roses sur le poster?" à quoi l'observatrice a répondu : "I have absolutely nothing against flamingos!". Les posters ont été enrichis de flamants roses, de crocodiles, de bonhommes mangeant des sushis… et les élèves ont quitté la salle après la mise en commun, un grand sourire aux lèvres.

CHAPITRE 7. SITUATION *SOMME DES CUBES*

Introduction : les identités algébriques en Terminale S

Les situations que nous allons étudier participent d'une séquence menée en 2012-2013 avec des élèves de Terminales S. Nous nous proposons d'examiner plusieurs situations dont le thème mathématique commun est celui des identités algébriques. Chronologiquement, la première situation a été celle de la découverte du gnomon. Elle a été déjà abordée au chapitre 6, lors de l'étude épistémologique du concept. La deuxième situation est celle intitulée *Somme des Carrés* mais la situation centrale est celle intitulée *Somme des Cubes*. Elle donnera lieu à une étude approfondie. Afin de ne pas trop alourdir le contenu de ce chapitre, nous avons reporté au chapitre 8 l'étude spécifique de la *Somme des Carrés*. Nous ne l'envisagerons dans ce qui va suivre qu'en tant qu'elle contribue à l'étayage de la *Somme des Cubes*.
En 2014-2015, nous avons revisité le thème des identités et des preuves visuelles avec d'autres élèves en intégrant d'autres éléments théoriques. La nouvelle approche, détaillée au chapitre 8, aura une dimension sémantique plus importante car elle donnera lieu à des activités spécifiquement orientées en ce sens (travail sémantique explicite). La dimension langagière, bien que point crucial de chacune des approches, sera elle aussi davantage valorisée suite à une modification des savoirs langagiers visés et du fait de l'introduction d'un nouveau type de tâches (entre autres, travail collaboratif de recherche portant sur le lexique et la phraséologie, synthèse effectuée par l'enseignant avec rattachement au répertoire de connaissances anciennes, etc…). La notion de Gnomon est commune aux deux séquences mais sa dimension-outil sera sujette à des variantes compte tenu des différences de contenus mathématiques entre les deux séquences.

I. Analyse a priori de la séquence

I.1. Le contexte de la séquence

Les élèves sont ceux qui ont participé à la séquence des nombres triangulaires[170].
La progression de l'enseignant est telle que les élèves ont déjà traité les thèmes suivants :

- problèmes d'optimisation (second degré et dérivées),
- second degré et paraboles
- configurations de géométrie plane
- probabilités discrètes (probabilités conditionnelles, loi binomiale)
- démonstrations par récurrence (applications)

I.2. Enjeux de la séquence et ingénieries

La séquence est centrée sur la notion de Preuve Visuelle et sur les identités algébriques. Plusieurs types de preuves sont envisagés : preuve en 3D, preuves schématiques et preuves algébriques.
Le rapport à l'espace physique intervient à deux niveaux :

[170] Ils étaient alors en Première S (au Lycée Louis Barthou, à Pau).

— au niveau des représentations en perspective, dans le cas de la Somme des Carrés (Première preuve visuelle)
— au niveau des manipulations concrètes (avec de vrais cubes-unités), lors de la phase adidactique de la Somme des Cubes ; ceci permettant un moyen de contrôle du sens des identités algébriques.

La notion de gnomon doit faire l'objet d'une découverte lors de l'établissement d'une identité en phase adidactique, puis doit être consolidée et réinvestie lors de la Seconde Preuve de la Somme des Carrés avec cette fois une dimension-outil.

Le travail d'élaboration du répertoire lexical et phraséologique est focalisé sur le thème des *patterns* et sur les *manipulations* d'objets.

Les ingénieries mises en place à l'occasion de la séquence vont être de plusieurs types :
— élaborations de documents à fort potentiel visuel (documents supports de type Powerpoint, documents écrits à focalisation lexicale) ; ils doivent permettre une appropriation de la notion de gnomon et du principe d'extension schématique
— élaboration de situations adidactiques permettant l'établissement de conjectures, la réalisation de schémas, le passage à la généralisation ; elles doivent conférer une place importante aux raisonnements et à la validation
— élaboration d'un répertoire minimal de formulation et insertion dans la séquence à des moments spécifiques (en amont d'une séance, pour une introduction de termes nouveaux ; en début de séance, sous la forme d'un descriptif des consignes ; en fin de séance, sous forme de synthèse)
— insertion de phases interactives à des fins d'appropriation du sens des consignes, de contrôle d'acquisitions (évaluations diagnostiques quant aux notions mathématiques et au lexique), ou encore d'introduction de nouvelles notions (notion de preuve visuelle en 3 dimensions, par exemple)

I.3. Déroulement prévu

- Séance 1 : découverte du gnomon

— phase adidactique de découverte (cf chapitre 6, II et plus particulièrement II.4.)
— phase interactive d'institutionnalisation par l'enseignant
— distribution d'un document de synthèse basé sur la notion théorique d'extension et d'hérédité schématique (cf chapitre 6, III.) et examen détaillé interactif du contenu de ce document[171]

- Séance 2 : première preuve visuelle de la *Somme des Carrés*

— phase interactive sur la base d'un document Powerpoint (cf Annexe, *Somme des Carrés*)
— distribution de plusieurs documents de synthèse ; ils contiennent des représentations 3D, une analyse de la première preuve visuelle et un lexique centré sur la notion de *pattern* et sur la phraséologie liée aux manipulations d'objets (cf Annexe 3)

- Séance 3 : séance de consolidation lexicale

— distribution d'un document de type *matching* (l'objectif est de mettre en correspondance des figures et des photographies avec des descriptions centrées sur une phraséologie ciblée)

[171] Nous rappelons que la notion d'extension et d'hérédité schématique a été développée spécialement pour cette séance et étudiée au chapitre 5.

— phase de travail par groupes de deux (20 mn)
— phase interactive de présentation, de correction et de synthèse

- Séance 4 :deuxième preuve visuelle de la *Somme des Carrés*

— phase d'introduction interactive sur la base d'un document PowerPoint
— distribution d'un document et phase d'appropriation des consignes[172]
— phase adidactique d'établissement de la seconde preuve basée sur l'utilisation de gnomons (travail en groupes de deux)
— phase interactive de présentation des résultats par les élèves et d'institutionnalisation par l'enseignant
— distribution d'un document de synthèse centré sur l'utilisation du gnomon et l'extension schématique

- Séance 5 : séance centrale sur la *Somme des Cubes*

— phase d'introduction interactive sur la base d'un document PowerPoint
— distribution d'un document et phase d'appropriation des consignes
— phase adidactique d'établissement de la preuve schématique basée sur l'utilisation de vrais cubes et la mobilisation de gnomons (travail en groupes de quatre)
— phase de présentation multimodale
— phase de synthèse et d'institutionnalisation

II. Analyse a priori de la *Somme des Carrés* et de la *Somme des Cubes*

II.1. Situation intitulée *Somme des carrés*

II.1.a. Introduction

La situation des nombres carrés, composées de plusieurs séances, a pour but de sensibiliser les élèves aux preuves visuelles en leur présentant, d'une part une preuve en 3D, puis, d'autre part une autre, plus délicate, en 2D. L'objectif est en fait d'amener les élèves à assimiler les caractéristiques d'une preuve visuelle au sens habituel puis de discuter du statut de preuve en insistant sur la nécessité d'une généralisation explicite au niveau schématique. Ce point aura déjà été abordé lors de la découverte du gnomon et aura donné lieu à la distribution d'un document de synthèse contenant ce type de généralisation.
Nous avons en ligne de mire la séance-phare portant sur la somme des cubes et pour laquelle nous souhaitons aller jusqu'à la notion de preuve multimodale, de manière effective, cela s'entend.
Les figures élaborées pour cette séquence et en rapport avec la notion d'abstraction progressive ne seront examinées qu'au chapitre 8, ceci afin de ne pas surcharger la présente analyse.

II.1.b. Première preuve visuelle

Elle concerne l'identité algébrique suivante :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$

[172] Ce document figure en Annexe 3 sous la rubrique « document fourni aux élèves » et s'intitule :
Sum of consecutive square numbers, second visual Proof.

Elle doit être établie suite à une réinterprétation de l'identité algébrique somme des carrés. Le but est d'établir un rapport étroit entre l'expression $3(1^2 + 2^2 + ... + n^{2)})$ et 3 pyramides de l'espace.
La place des représentations visuelles en 3D est ici essentielle. Il en va de même de la qualité des documents de synthèse et des figures ainsi que du lexique qui les accompagne
L'ingénierie mise en place repose également sur des figures particulières relevant du concept d'abstraction progressive et permettant un glissement de la 3D vers la 2D schématique. Ce point est examiné au chapitre 8.

II.2.c. Deuxième preuve visuelle

La séance doit débuter par une phase interactive. Celle-ci est l'occasion d'un retour sur la première preuve visuelle sur la *Somme des Carrés* mais surtout d'un rappel sur la notion de Gnomon. Les élèves devront ensuite s'approprier le contenu d'un document écrit et établir en phase adidactique une deuxième preuve visuelle pour la même identité algébrique.
L'obstacle envisagé vient de la nécessité de transformer des gnomons en forme de L (L-shaped gnomons) en Gnomons linéaires afin de les insérer dans des interstices (espaces vides) d'une grille aux dimensions imposées (cf Annexe 3, Deuxième preuve visuelle et chapitre 8, I.).
A l'issue de la Séance, un document de synthèse est distribué après l'institutionnalisation en classe par l'enseignant. Ce document contient des représentations 2D schématiques actualisant le principe d'extension schématique.

II.2. Analyse a priori de la situation intitulée *Somme des Cubes*

II.2.a. Enjeux et contenu de la séance

La séance a pour principal objectif que les élèves établissent **par eux-mêmes** une preuve visuelle de la propriété concernant la somme des cubes, de manière schématique, en percevant clairement la généricité de leur schéma et du principe sous-jacent et qu'ils décrivent en L2 le cas $n = 4$ sans disposer des cubes correspondants (voir infra).
En termes de contrat, la production d'un schéma *conforme* est implicite. D'où l'intérêt de susciter en début de séance une bonne représentation de la notion de preuve visuelle par un retour en phase interactive et par des consignes claires dans les consignes écrites. En ce qui concerne le recours à des gnomons, le contrat est alors explicite ; de même pour ce qui concerne la généralisation.
La dévolution n'est donc pas totale mais contrainte. Ce fait est décisif car l'objectif est la comparaison de deux types de preuves étroitement associées (voir chapitre 8 pour un approfondissement de ce point et une expérimentation à valeur de prolongement, mais pour une autre identité algébrique).
La propriété arithmétique concernée ici est la suivante :

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Du point de vue de la langue, nous souhaitons savoir jusqu'où les élèves pourront aller sans recourir à la L1 et rien ne garantit qu'ils aillent jusqu'au bout des objectifs visés.

Nous avons confiance dans la robustesse de la situation mathématique. En toute logique, celle-ci devrait bien fonctionner du point de vue mathématique mais également avec un certain niveau d'intégration. Elle devrait en effet permettre une dialectique constructive entre formulation et validation, en L1 et en L2.
Du point de vue strictement mathématique, l'objectif de cette séance, en tant que faisant partie de la séquence, consiste au minimum à amener les élèves à faire évoluer leur représentation du concept de preuve tandis que les phases d'institutionnalisation incluront l'établissement d'une correspondance entre les manipulations physiques et le sens opérationnel et formel lié à la syntaxe algébrique. En terme de savoir visé, l'évolution de la représentation des élèves autour de la notion de preuve, vue comme traditionnelle, dont l'emblème serait la preuve algébrique ou la preuve géométrique, vers celle plus élargie, incluant la notion de preuve multimodale, constitue donc un des objectifs.
Le milieu initial choisi est donc un milieu matériel permettant une mise à disposition d'un certains nombres de cubes-unités et la réalisation d'actions physiques effectives.
L'intégration du linguistique et du mathématique doit avoir lieu au niveau local, pragmatique, procédural mais aussi au niveau de connaissances dites *méta*, par retour réflexif sur des termes-concepts tels que *pattern*, *match*, *fit*, *fit into*, etc...

II.2.b. Variables didactiques et choix

Les objets matériels (cubes, crayons de couleur, papier A3) apparaissent nécessaires, suite aux premiers éléments d'analyse. A cela, il faut rajouter un vidéoprojecteur pour l'enseignant.
La contrainte liée au temps disponible a été prépondérante dans la détermination de nos choix didactiques. Nous ne disposions plus que d'une séance de deux heures si nous souhaitions conserver un temps raisonnable pour la préparation de nos élèves à l'épreuve de fin d'année, épreuve spécifique d'enseignement européen sur laquelle nous nous sommes déjà positionné et dont nous avons déjà décrit les caractéristiques (épreuve encore trop focalisée sur la partie calculatoire et formelle de la pratique mathématique, etc...).
Pour que les élèves puissent engager de manière rapide et efficace dans la manipulation et la schématisation, il est nécessaire, selon nous, de raviver en début de séance les connaissances relatives au gnomon, et de réactiver le répertoire minimal L2. Ce répertoire est visible à partir du document Powerpoint et sur la transcription que nous joignons en annexe.
Nous avons choisi de faire établir la conjecture à partir de l'interaction dialoguée en se servant du Powerpoint comme support. Le caractère interactionnel permet de consacrer une part suffisante à la composante linguistique (L2), ce qui autorisera, la phase adidactique à ne pas être cantonnée dans la L1 quant aux interactions verbales à l'intérieur des groupes. En effet, la première phase fournira des éléments de formulation en L2 disponibles pour les interactions ultérieures, pour les annotations des posters et de façon certaine pour la phase multimodale.
La quantité de cubes disponibles, quant à elle, est une variable didactique. Elle est limitée à 36, c'est-à-dire à la somme de 3 cubes consécutifs.

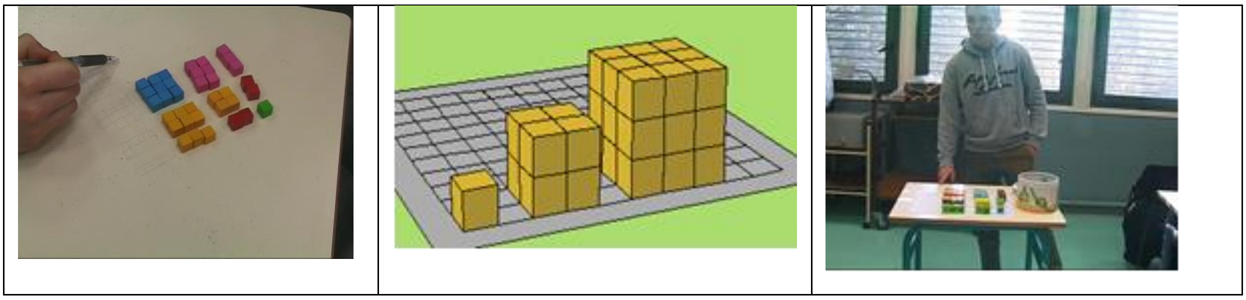


Figure 7.1

La limitation est imposée par le fait que nous ne disposons pas d'assez de cubes-unités mais aussi par le fait que la tâche principale de la démonstration orale, prévue une fois que la schématisation aura été réalisée, la généralisation entrevue, et la généricité clairement perçue, consistera en une explicitation du principe d'extension au niveau $n=4$. Pour cette dernière phase, les cubes correspondants ne seront pas disponibles. Ce fait est volontaire et a pour but que les élèves soient contraints de verbaliser en entrant simultanément dans une description portant sur des objets idéalisés (en L2), en l'absence des cubes et en utilisant la multimodalité (la gestuelle notamment).

De plus, rajouter un cube supplémentaire, c'est-à-dire passer au rang $n=4$, signifierait rajouter $4^3=64$ cubes de plus. Cela ne faciliterait en rien la production de la conjecture et, de toute façon, n'apporterait pas plus de convaincance quant à la perception de la généricité. De plus, un nombre plus important de cubes-unités serait moins aisé à disposer en ce qui concerne le gnomon physique.

Le choix du format A3 pour les posters constitue également une variable didactique. Plus grand, le poster prendrait trop de place sur les tables, compte tenu du fait que les manipulations et les des cubes agencements qui en résultent doivent être concomitants. Plus petit, c'est-à-dire en A4, le format ne permettrait pas de faire figurer suffisamment de commentaires ni des schémas annexes.

Comme variable dépendant de la composante langagière (L2), il reste à déterminer le temps à consacrer à l'interaction initiale, c'est-à-dire la part que l'on consacrera à la réactivation du lexique minimal et à la bonne appropriation des consignes. Ce temps est fixé à une vingtaine de minutes plus une dizaine de minutes pour la lecture individuelle des consignes écrites. La séance ayant une durée exceptionnelle totale de deux heures, il devrait rester environ 20 à 25 minutes pour la phase finale (phase multimodale). Une soixantaine de minutes environ sont réservées à l'élaboration des schémas sur feuilles A3 et à la validation au sein des groupes.

L'institutionnalisation est prévue pour une séance ultérieure et ne sera pas détaillée, une étude similaire ayant été faite à l'occasion de l'étude de la séquence des *Nombres Triangulaires*.

II.2.c. Schèmes mobilisables et représentations

Les techniques issues de la didactique des langues seront mises à profit :

- ◊ *consolidating* à travers les séances qui précèdent, *scaffolding* et *warming-up* pour la séance elle-même.
- ◊ délimitation précise du répertoire minimal de formulation et focalisation sur une phraséologie indispensable, pour que chacun des schèmes de formulation accompagnant les schèmes d'action (concrète et/ou idéalisée) soit disponible :

match with, fit the cubes into…, L-shaped gnomon, lay the cubes flat, etc…[173]

◊ recensement des principaux schèmes de perception et d'action :

le fait de mettre à plat des cubes ;

le fait de les disposer selon un carré en partant d'un coin, ou d'un angle,

le fait de percevoir la possibilité d'une extension ;

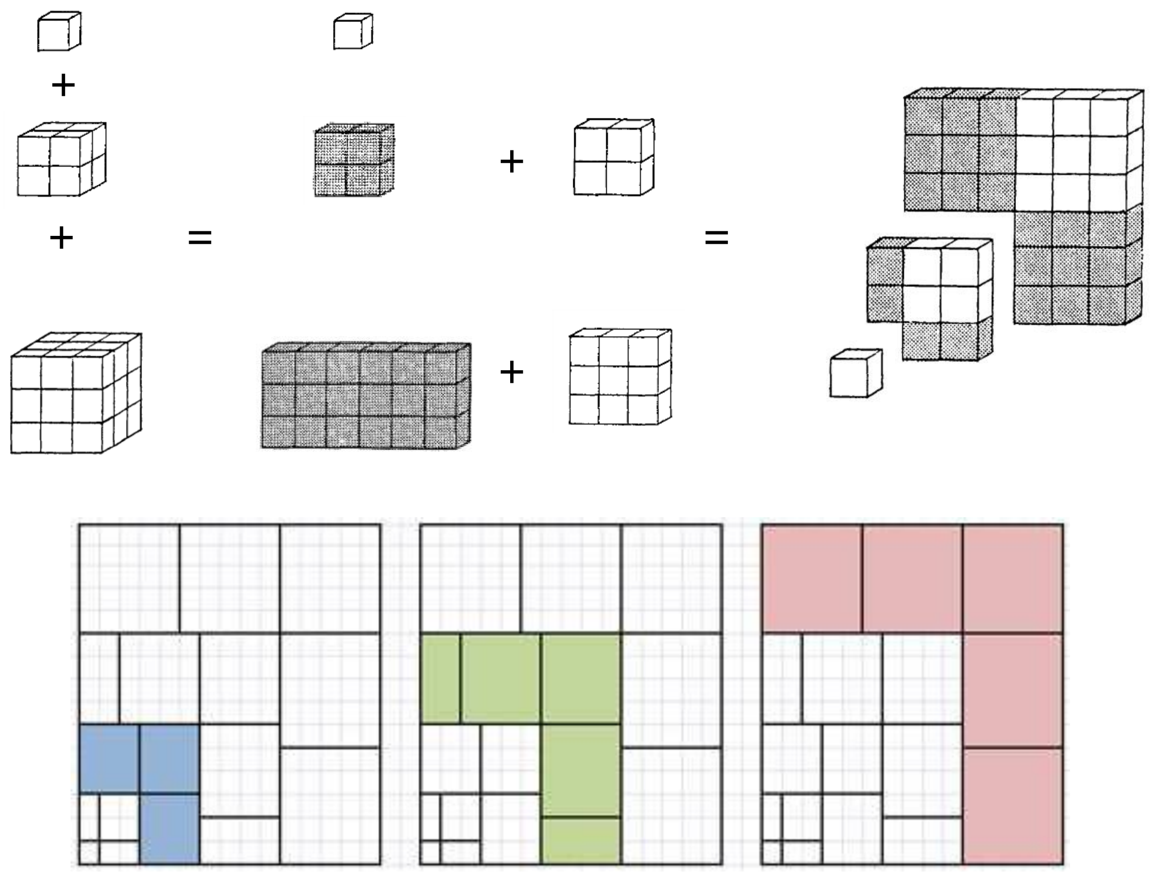
les schèmes perceptifs permettant, d'une manière plus générale, de déceler les analogies, au niveau statique ou encore de parcourir visuellement une zone du micro-espace pour déceler des régularités et délimiter des zones, de manière dynamique ;

les schèmes relatifs à la visualisation active, c'est-à-dire impliquant l'imagination : mouvements, déplacements idéalisés (ces schèmes s'enracinent dans les manipulations d'objets concrets et apparaissent comme des corrélats idéalisés), afin de découvrir dynamiquement des algorithmes au niveau mental ;

schème de décomposition active par la pensée en détachant certaines zones que l'on peut manipuler idéalement (cela rejoint notre conception d'espace idéalisé superposé à l'espace physique) ;

les techniques habituelles de dessin : représentation de cube aplati (avec ou sans la conservation de la spatialité ressentie), perspectives, représentations 3D ;

Figure 7.2 décomposition 3D ou 2D et mise à plat



[173] voir Annexe 4

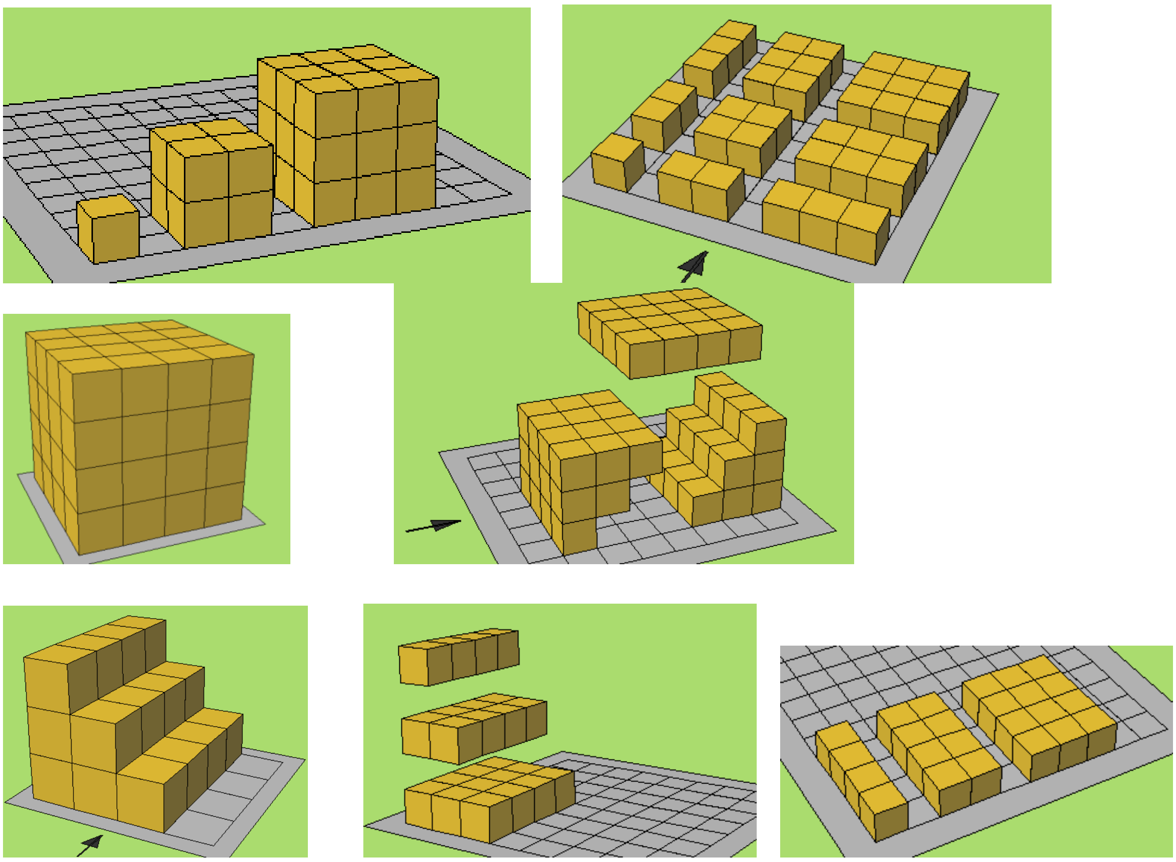


Figure 7.3 représentations en perspective réalisées avec Wisweb

Pour une telle séance, dont les savoirs visés sont multiples, le seuil entre les connaissances anciennes et les connaissances émergentes (Zone de Développement Proximal au sens de Vygotski) se doit d'être appréhendé de manière évolutive au cours de la séance. Pour l'instant, la ZPD est présentée dans sa version *anticipatrice* des phénomènes didactiques. Face aux résultats fournis par la contingence, comme on le verra lors de l'analyse a posteriori, des nuances seront à apporter.

◊ Bien délimiter la ZPD suppose aussi de formuler, dès le départ (lors de l'utilisation du Powerpoint), des consignes les plus claires possibles :

Purpose of the introduction: *establish a **conjecture*** for the formula concerning the sum of the cubes.

Make a **poster**

for explanations

and,
if possible,

a generalization

Purpose of the next part of the activity (group work): elaborate a **Visual Proof** of the previous property

All manipulations
will have to be

accompanied

by a **verbal** (oral) **description**

and, if possible

a **schematization**

La notion de preuve visuelle doit être, à nouveau, clairement définie, et qui plus est, ici, car elle comporte deux volets :

practical
(using real cubes)

The **Visual Proof,**
as a demonstration,
must be **both** **and**

schematic
(making diagrams)

Le fait que les gnomons n'ont pas de taille fixée est fondamental et doit donc être souligné :

Recall

a Gnomon **is usually**
L-shaped
(has the form of the letter L)

neither of
its dimensions (including *width*)
is **necessarily** fixed

Nous insisterons sur la nature du principe d'extension, en rappelant le lien étroit qu'il entretient avec le principe d'hérédité sur lequel repose l'habituelle démonstration par récurrence :

you must be able
to explain or demonstrate

why,
if something works at **some** level (for
some particular value of n),

it will **necessarily** work
at the **next** level (for n+1).

We will try

to keep close

to the principle

of Proof by Induction

Comme nous l'avons déjà indiqué, la perception du principe d'extension dès les premières manipulations, devrait permettre de déboucher sur une traduction schématique de l'hérédité (voir figure suivante).

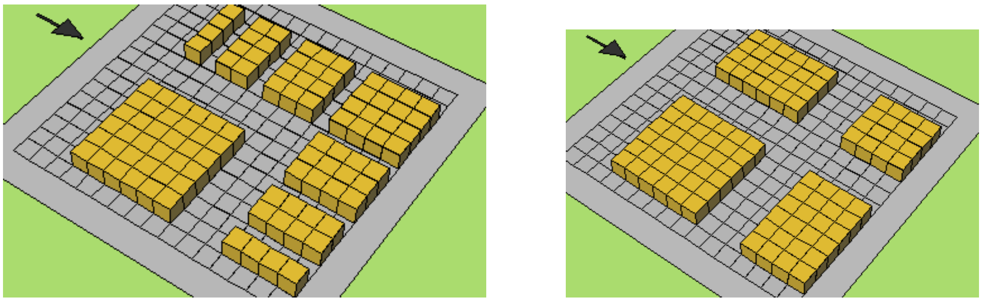


Figure 7.4 mise à plat des cubes au rang 4 (utilisation de Wisweb)

Nous serons volontairement redondant, en insistant, par souci de consolidation linguistique, mais aussi pour avoir un maximum de garanties que les objectifs visés soient les plus clairs possibles, sur des points tels que ceux qui suivent:

assuming (and checking) that something works (holds, is true) at **some** level (for some particular value of *n*), **we must show** (explain, demonstrate) that it will **necessarily** work at the **next** level (for n+1).	You will have to **explain** ***how*** the ***particular situation*** **can be *extended*** to the ***next level***

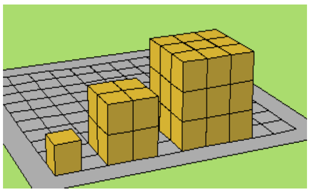
Figure 7.5

Dans ce qui précède, l’idée de nécessité est évoquée explicitement. Les injonctions participent de l’étayage d’ensemble qui a pour objectif de permettre aux élèves de *faire l’épreuve de la nécessité*.

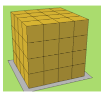
Signalons enfin que la dernière partie de l’activité concerne un point crucial (phase multimodale) d’où la mise en relief sur la diapositive (voir ci-dessous).

Cubes available
(disponibles)
for the ***practical***
demonstration

(until n=3)

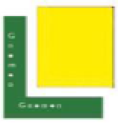


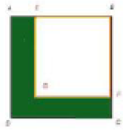
Next cube (for n=4) :
not available!

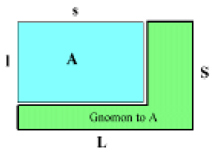


Try to **guess** *what the next step would be* if you had more cubes.

Le lecteur désireux d’obtenir plus de détails trouvera en annexe l’ensemble du Powerpoint ainsi que les transcriptions de la partie dialoguée, interactive, qui l’accompagne.



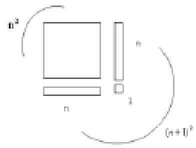


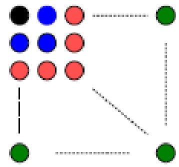


explain or demonstrate

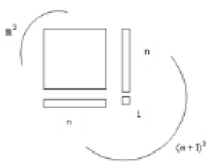
why,
if something works at some level
(for some particular value of *n*),

it will necessarily work
at the next level (for n+1).

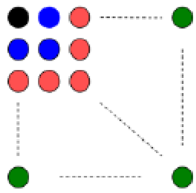




The diagram opposite
illustrates the fact
that adding a Gnomon
to a square
gives the next square.
But this diagram says **nothing**
about the sum of odd
numbers.



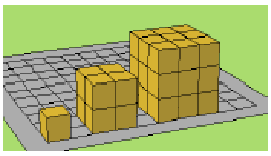
The picture opposite
contains an **explicit**
principle of extension



The possibility of extension is
materialised by a **dotted line**

Cubes available :

(until n=3)



Next cube (for n=4) : not available!

Introduce order while arranging the (small) cubes

arrange methodically

think of a generalization of the way you arrange the small cubes.

II.2.d. Consignes en L2, niveaux de milieux et répertoires

Des consignes explicites telles que celles que nous avons mentionnées ou celles qui suivent apparaissent comme de véritables garanties de bon fonctionnement.

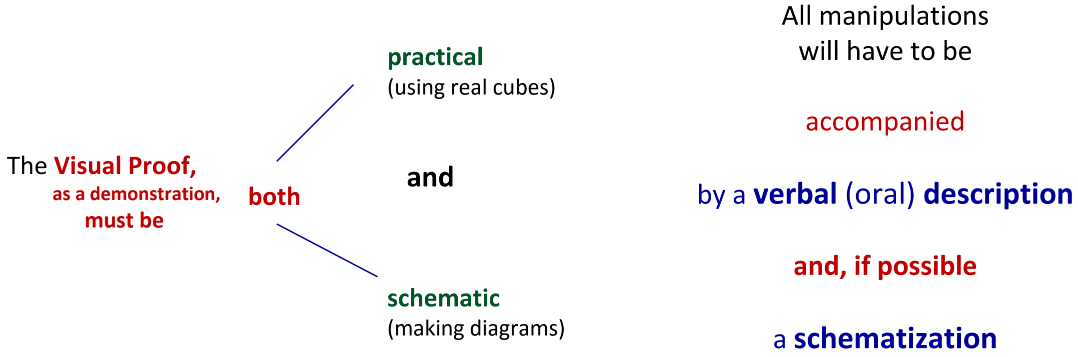


Figure 7.6

- Phase initiale de conceptualisation et persistance en mémoire du sens des consignes

La phase initiale d'appropriation des consignes succède à la phase interactive au cours de laquelle la conjecture a été établie.
La propriété générale est rappelée sur le document-support (cf Annexe 4) et il est explicite que les élèves ont seulement établi une conjecture.
Les mots essentiels sur lesquels l'enseignant souhaite que les élèves se focalisent sont mis en relief (en gras sur le document).
Il est clair que les manipulations elles-mêmes, dans le fait de manipuler des cubes, vont participer de la preuve dite *concrète*. Ce point a été établi en phase interactive.
Il est également clair pour les élèves qu'ils vont devoir élaborer des schémas pour établir un autre type de preuve.
La phase de description verbale apparaît comme repoussée à la fin de la séance (*anticipate a verbal description the manipulations performed*).
Elle participera de la preuve dite multimodale.
Le document met en relief le fait implicite d'avoir à établir des conjectures inhérentes à l'établissement de la preuve visuelle en incitant les élèves à étudier les cas particuliers. Cette composante du travail est double et ce point est clairement visible dans la séparation des consignes mais surtout la disposition en parallèle en ce qui concernera le rapport au milieu concret et ce qui portera sur le rapport au milieu schématique (cf figure ci-dessous).

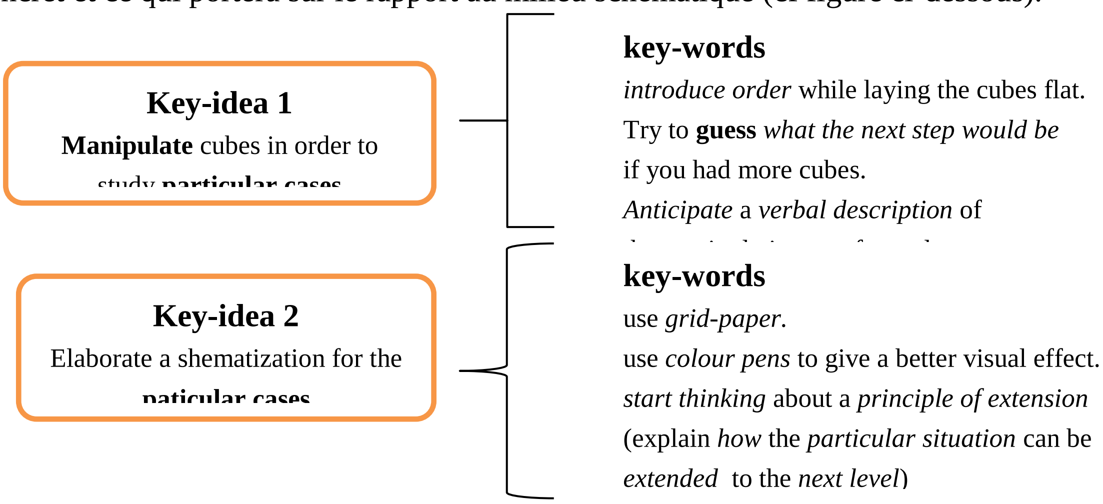


Figure 7.7

Le point suivant du document a pour but de faire prendre conscience aux élèves que la preuve va pouvoir être établie par recours à un gnomon particulier (*special gnomon*)
Il faut enfin noter l'insistance de l'enseignant quant à la nécessité de rendre la preuve la plus convaincante possible en insistant sur le principe d'extension lié à l'hérédité de la preuve:

> The **convincingness** of the proof is based on the following fact :
>
> you must be able to explain or demonstrate ("making both a **physical and a schematic demonstration**") why, if something works at some level (for some particular value of n) it will **necessarily** work at the next level.

- Le milieu matériel : des premières manipulations vers les premiers schémas

La spécificité de la situation est de permettre un rapport aux cubes-unités physiques. Les élèves vont très naturellement commencer par disposer les cubes-unités de manière à constituer des cubes plus grands par empilement. La mise à plat des cubes va les faire passer dans de milieu objectif effectif. Les toutes premières manipulations se feront sans doute sans anticipation, par essais.

- Le milieu heuristique (milieu objectif) : la découverte des règles

Il est attendu que les élèves interprètent les manipulations concrètes de mise à plat et les représentations schématisées des dispositions ainsi obtenues selon deux règles :

- règle relative à la constitution du carré obtenu par les mises à plat successives (le côté sera mis en relation avec la somme 1 + 2 + 3 +…)
- règle d'extension liée à l'ajout d'un gnomon
- règle relative à la constitution des gnomons eux-mêmes
- mise en relation du rang n avec les divers référents au niveau générique (pour des valeurs particulières de n) : le cube physique de taille n, le carré de côté n, le gnomon de valeur numérique[174] $2n$-1 intérieur au carré, le gnomon à ajouter, correspondant au cube suivant mis à plat et de valeur numérique $2n$+1

Dans le milieu objectif, les élèves découvrent les règles mais ne les formulent pas encore. Le principe d'extension des figures se dégage. Les gnomons apparaissent physiquement mais l'expérience de la nécessité sera intimement liée à l'entrée dans le milieu de référence.

- L'élève apprenant et le milieu de référence

C'est ici que la validation au sein des groupes intervient dans toute sa force. Les élèves ont vu se dégager des possibilités. Le passage au cas général nécessite de faire apparaître au niveau des schémas particuliers produits un principe d'extension explicite. Il est attendu que les élèves annotent les schémas de manière à faire figurer le rang de chacun d'eux en tant qu'étape du processus d'emboîtement des carrés et des gnomons successifs.
La validation devrait porter sur le lien entre ce qu'ils font concrètement au niveau des cubes physiques, au niveau des schémas et sur les règles qu'ils tenteront d'expliciter verbalement mais au niveau générique et peut-être au niveau général. La généralisation schématique relève de l'institutionnalisation en ce qui concerne la production d'un schéma condensé du type de celui que nous avons élaboré pour les nombres triangulaires. Ce schéma condensé et étroitement associé à la démonstration algébrique par récurrence aura été rappelé (cas de la situation des nombres triangulaires) lors de la phase interactive précédant la situation de recherche (voir (II.2.c). Il est peu probable que beaucoup d'élèves aillent jusqu'à l'établissement d'un tel schéma. Si c'est le cas, le milieu se rapprochera fortement du milieu

[174] nombre total de carrés-unités du gnomon

didactique car il ne manquera que la caution de l'enseignant pour instituer la connaissance en savoir officiel. Ils savent que ce qui importe est surtout le fait de pouvoir décrire verbalement (en L2) l'étape de rang 4, celle pour laquelle ils ne disposeront plus de cubes-unités en nombre suffisant et pour laquelle c'est la conceptualisation du principe d'extension qui primera sur une généralisation schématique formelle effective.
Enfin, si cela s'avère nécessaire, l'enseignant prévoit de donner des indications par un questionnement adéquat, c'est-à-dire de manière à conserver une part importante d'adidacticité (cf Bloch, 1999).
Nous rappelons qu'il est attendu plusieurs modalités de description de la constitution interne des gnomons. Il est probable que les élèves produisent des figures 3D du fait de l'importance du milieu matériel physique et de la place accordée aux manipulations 3D (y compris en vue de la phase multimodale finale).

- La phase multimodale et le milieu didactique

Le succès de la présentation multimodale, s'il est effectif, c'est-à-dire cautionné, validé par l'enseignant, deviendra un élément de référence de l'institutionnalisation qui suivra la séance.
Il est probable, sous réserve qu'il reste suffisamment de temps pour cette phase, que certains élèves puissent effectuer une présentation multimodale claire, situe au rang 4, compte tenu de ce qu'ils auront produit dans le milieu de référence et que nous pouvons légitimement en attendre. Une présentation multimodale correcte placera les élèves juste en-dessous de la situation didactique car elle attestera du fait que l'élève aura clairement fait l'expérience de la nécessité. En ce sens, elle en sera un indice fiable.

- Productions et acquisitions langagières

La phase multimodale, est prévue en L2, tout comme l'institutionnalisation. Les commentaires des schémas seront également produits en L2. Seule la phase adidactique présuppose une acceptation de travail en L1, le professeur préférant privilégier la composante mathématique d'une situation qui ne relève pas d'un contenu d'enseignement officiel et qu'il n'a jamais expérimenté avant (faire établir par les élèves eux-mêmes des figures ayant le statut de preuve visuelle). L'analyse a posteriori des phases de validation permettra de dire si une contrainte de travail en L2 dans la situation adidactique était envisageable ou non. Le choix de tolérance du recours à la L1 repose indirectement sur l'appréciation subjective du répertoire didactique de formulation (L2) à ce stade de la séquence : plusieurs îlots discursifs anticipés comme moments possibles de la validation semblent difficilement réalisables totalement en L1. Un travail d'analyse des productions en L1 constitueraient un moyen de rejouer la situation. Ceci a été envisagé en 2014-2015, lorsque nous avons revisité le thème des identités (cf chapitre 8), mais n'a pu être réalisé faute de temps. Un autre argument en faveur d'une tolérance de travail en L1 et que de toute manière, une grande partie du travail en groupes échappe au contrôle direct de l'enseignant, excepté lorsqu'il passe dans les groupes. La validation en L2, en tant que production langagière, ne bénéficierait donc pas de la possibilité d'un apport de corrections ou de commentaires par l'enseignant, sauf peut-être à partir d'enregistrements mais dans ce cas, a posteriori.

III. Analyse a posteriori de la séquence

III.1. Analyse a posteriori de la Situation intitulée *Somme des carrés*

Nous rappelons que les élèves ont l'habitude de travailler en groupes et de se confronter à des situations adidactiques.
Hormis les problèmes rencontrés lors de la phase adidactique, la situation centrée autour des deux preuves visuelles relatives à la somme des carrés s'est convenablement déroulée. En phase adidactique en effet, les élèves n'ont pas pensé à modifier les gnomons en forme de L pour les placer dans des interstices rectilignes. Ce point a bien sûr été repris et explicité par l'enseignant.
A l'issue de la situation des nombres carrés, les élèves, selon nous, sont en mesure de repérer des gnomons, de les disposer ou redisposer d'une certaine manière, se sont fait une bonne représentation de la notion générale de preuve visuelle, saisissent ce qu'est le principe d'extension au niveau schématique, ont une bonne conscience des faits linguistiques impliqués : nécessité de commenter, d'argumenter, d'expliciter verbalement, en L2, que ce soit à l'écrit ou à l'oral.
Il a également été distribué aux élèves d'autres documents, notamment un résumé des principaux éléments, de nature mathématique, concrète (visuelle), et linguistique. Le lecteur les trouvera en annexe (annexe 3).
Cette séance a été l'occasion pour les élèves de se rendre compte que des actions sur le milieu objectif peuvent très bien ne pas aboutir. Il y a donc, pour ce type d'activités, un véritable enjeu et on ne sait pas à l'avance si on pourra expliciter un principe d'extension de manière claire. Il y aura donc désormais nécessité d'effectuer des actions efficaces, adéquates avec un principe d'extension des figures, certes clairement perçu, mais aussi, du point de vue langagier, formulé explicitement et interprété de manière partagée, ceci en L2. Ce dernier point est, au passage, celui où se situent les éventuels obstacles à une validation qui fasse l'unanimité.
On peut noter par ailleurs que la seconde preuve visuelle a été établie sur la base d'un rapport idéalisé aux objets concrets. Les processus interprétatifs ont lieu, pour l'essentiel, relativement à une représentation de pyramides mises à plat mais les pyramides physiques n'ont pas constitué un véritable milieu matériel puisqu'elles ont simplement servi de référence initiale sans être directement accessibles physiquement.
Dans la prochaine séance, le rapport à des objets concrets (les cubes) va jouer un rôle essentiel, cela dès l'entrée dans le milieu matériel, puis par des va-et-vient successifs avec les autres niveaux de milieu. En effet, il va favoriser une meilleure idéalisation des actions sur les schémas, puis de celles portant sur les symboles.

III.2. Analyse a posteriori de la Situation intitulée *Somme des Cubes*

III.2.a. Remarques générales et modèle d'analyse des raisonnements

La séance de la somme des cubes suit celles qui ont porté sur la somme des carrés et les deux preuves visuelles que nous avons traitées avec nos élèves, de manière didactique, dans le cas de la première, et adidactique dans le cas de la seconde. Cette séance avait été annoncée longtemps à l'avance et les élèves savaient qu'ils auraient l'occasion de manipuler de vrais cubes. Ils savaient aussi que cette séance serait riche au sens où ils devraient découvrir seuls, au travers de manipulations de cubes-unités, une propriété arithmétique qu'ils devraient modéliser schématiquement, formuler, généraliser, mais aussi décrire en L2 de façon multimodale, à la fin du travail en groupe. Ceci, c'est-à-dire, le fait de savoir à l'avance en quoi consisterait la séance, a joué, selon nous, quant à leur implication dans les séances précédentes. La notion de gnomon, et l'utilisation que l'on pouvait en faire, était encore bien présente dans les esprits, et il était clair qu'il s'agirait d'un élément-clé pour la réussite de la séance. Les connaissances acquises dans le milieu de la séance précédente étaient donc disponibles.

Nous présentons ci-après le tableau regroupant, selon les niveaux de milieux, les fonctions des raisonnements, le niveau d'utilisation des signes ainsi que l'usage et l'actualisation du répertoire didactique (cf Bloch et Gibel, 2011) **à la fois** dans une perspective anticipatrice et d'un point de vue synthétique quant aux résultats des analyses qui vont suivre. Du point de vue des signes qui étaient susceptibles de se produire suite à l'analyse a priori (que nous n'avons pas, à ce moment-là, synthétisé dans un tableau) mais aussi parce que le modèle d'analyse des raisonnements présuppose (implicitement) une forte probabilité de formation de signes de types spécifiques (majoritairement des icônes et des indices dans le milieu M_{-2}, par exemple). Il y a de toute façon une coïncidence entre les deux, à une exception près : il s'agit en effet, comme nous allons le montrer, du recours (non anticipé) par l'un des groupes à deux types de gnomons. Pour éviter la présentation de deux tableaux similaires, nous ne présentons que la version synthétique (voir ci-après). Cela dit, nous ne nous positionnons pas quant à la systématicité présupposée implicitement dans la formation des types de signes. Le modèle a, en tout cas, très bien fonctionné en ce qui nous concerne, dans sa fonction anticipatrice.

	Milieu M-2	Milieu M-1	Milieu M0
Nature et forme des raisonnements, des intuitions et des autres processus raisonnés	**R1.1 SEM / PHY-SCH** Identifier quels sont les possibles Actions sur les cubes-unités physiques. Actions au niveau schématique : identifier les gnomons (plusieurs types de gnomons possibles). Conjectures ponctuelles : apparition d'un lien entre rangs des nombres carrés et des gnomons, étiquettes et opérations sur les nombres. Mise en correspondance termes à termes entre les éléments des agencements physiques, ceux des schémas particuliers (*patterns* schématiques) et les éléments numériques associés (étiquettes, symboles)	**R1.2 PHY-SCHEM/ SYNT/ SEM** Calculs à caractère générique et formulation de conjectures étayées Application à la situation de rang n=4 (il n'y a plus de cubes disponibles) Explicitation de la règle constitutive des gnomons Dégagement du principe d'extension au niveau schématique Niveau sémantique davantage mobilisé. Articulation des éléments constitutifs du gnomon et de l'extension schématique (gestion délicate dans le cas de deux gnomons)	**R1.3 SCHEM/SYNT** La propriété générale, conjecturée dans le milieu physique et schématique, est légitimée selon des règles algébriques. Travail dans le registre algébrique La propriété générale est rattachée à une figure particulière qui tient lieu de preuve visuelle classique. La propriété générale est étroitement associée à un schéma généralisé. Comparaison des types de preuve (la convaincance est sujette à débat)
Signes dans les processus raisonnés	**R2.1 SEM / SCHEM** Schémas particuliers Etiquetage numérique et symbolique Analyse des objets et sens référentiels des symboles ou des étiquettes. Les signes sont ici des légisignes icôniques et indiciels	**R2.2 SCHEM/SYNT/SEM** Légisignes symboliques-dicents ou argumentaux, locaux ou génériques. Recours au sensible (agencements physiques et schématiques) pour contrôler le sens. Les deux registres sont très étroitement associés.	**R2.3 SCHEM/SYNT** Légisignes symboliques-argumentaux sous-tendant des preuves Schémas généraux : utilisation de points de suspension sur les schémas (extension schématique)
Usage et actualisation du répertoire didactique	R3.1 SEM / SCHEM Répertoire antérieur, règles constitutives élémentaires : un nombre carré de rang donné est associé à une somme d'entiers consécutifs impairs et conjointement, à un emboîtement de gnomons en forme de L Calculs algébriques sur des	R3.2 SCHEM/SYNT/ SEM Enrichissement des énoncés au niveau argumentaire Annotations des posters.	R3.3 SCHEM/SYNT Concaténation de schémas et de formules. Mise en parallèle des actions et des formulations dans les divers registres didactiques mathématiques : physique (concret), schématique, algébrique sans oublier le

Sous-répertoire de formulation (niveau lexical et phraséologique) : description et usage	nombres entiers Actualisation : introduction (découverte) d'un gnomon à *épaisseur* variable (cas des cubes) Mobilisation du lexique phraséologique L2 (non détaillé ici) en compréhension (pour les consignes) Retour sur les consignes, expression des premiers points de vue (en L1), etc…	Anticipation de la présentation des posters en L2, échanges entre élèves en L1. Anticipation de la phase multimodale (L1 et L2) Mobilisation (à l'écrit) du lexique L2 lié à la désignation, aux nombres figurés, aux manipulations sur des objets	registre multimodal (c'est-à-dire multiple car s'appuyant conjointement sur les registres précédents) Nombreux va-et-vient entre, d'une part, énoncés (en L2) reposant sur un lexique conceptuel, lié à la désignation, aux nombres figurés, aux manipulations sur des objets, et d'autre part, schémas et écritures mixtes (semi-formelles et L2) Interactions en L2

Tableau 7.1 raisonnements, processus raisonnés, signes et répertoires

Désormais, la présentation synthétique va servir au repérage et ainsi faciliter les analyses qui vont suivre (voir en particulier paragraphe III.3.d.).
Après avoir présenté le tableau synthétique, nous commençons par passer en revue quelques points importants liés directement au fonctionnement du modèle d'analyse des raisonnements. Ces points sont les suivants :

- identifications des observables produits en phase adidactique
- évaluation du répertoire didactique antérieur
- signes produits

En ce qui concerne la phase adidactique, les observables produits à cette occasion sont les suivants :

- schémas particuliers, pour découvrir et conjecturer
- schémas à valeur générique
- schémas généraux
- étiquettes, références des figures 3D (figures en perspective cavalière)
- formules algébriques
- commentaires, annotations en L2
- interactions filmées (les observables donnent lieu à des transcriptions et des images extraites)

Les schémas vont soit être des schémas réalisés au brouillon, lors des phases initiales de recherche, soit des schémas destinés à figurer sur les posters et donc le plus souvent réalisés avec soin.
Les schémas comporteront parfois deux types de gnomon (voir III.3.b et III.d).
L'évaluation du répertoire antérieur, c'est-à-dire du répertoire didactique lorsque débute la dévolution, repose fortement sur les acquis considérés comme partagés par les élèves. Ils sont dépendant des séances antérieures en ce qui concerne notamment la découverte puis l'utilisation des gnomons. En particulier, la situation des nombres carrés (voir chapitre 8) a

permis un élargissement et une mise en fonctionnement de ce concept tandis que l'ensemble de la séquence a contribué à la mise en place d'un répertoire minimal de formulation (lexique L2 considéré comme partagé).
En ce qui concerne les signes produits, les formules algébriques jouent un rôle particulier. Des questions se posent à leur égard :

- quel est le statut des signes mobilisés ?
- quel lien les écritures algébriques entretiennent-elles avec les schémas juxtaposés ?
- quels raisonnements sous-jacents ont accompagné ou précédé ces écritures ?
- quel est, ou quels sont, les niveaux de preuve effectivement atteints ?

Nous reviendrons sur ces questions après avoir fait suffisamment fonctionné le modèle d'analyse des raisonnements, à savoir à la fin du paragraphe III.2.e. Néanmoins, répondre à ces questions devrait certainement avoir des conséquences sur la manière d'envisager les signes produits en phase adidactique à l'occasion du retour sur ces derniers au moment d'une institutionnalisation (vue comme idéale). En effet, il est clair que l'institutionnalisation se doit de reposer sur une analyse fine des productions effectivement réalisées par les élèves mais surtout des raisonnements concomitants. Le modèle n'a certes pas pour vocation de prendre à sa charge la spécificité de notre situation expérimentale mais il doit nous permettre de ne pas perdre de vue des éléments qui pourraient se révéler essentiels pour notre analyse. Ainsi, il nous incombera, quant à nous, de tenter de mettre en relief les points délicats, c'est-à-dire en particulier ceux relatifs aux questions que nous venons de mentionner et donc indirectement de proposer une réponse à ces dernières.

III.2.b. Résumé du déroulement effectif de la séance

Lors de l'interaction du début de séance, on peut constater sur la vidéo que les élèves réagissent bien aux questions de l'enseignant. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe d'analyse des transcriptions.
Puis les élèves entrent dans la phase adidactique.
L'enseignant-dévolueur n'a pas eu à intervenir de manière fondamentale car les élèves sont rapidement passés dans le milieu objectif. La généricité s'est très vite révélée aux élèves du fait de la possibilité offerte de manipuler de vrais cubes. Chacun des groupes a produit un diagramme très clair, conformément à ce que l'on attendait. Nous examinerons en détail dans le paragraphe suivant les schémas produits, en les confrontant à l'objectif visé, à savoir l'élaboration d'une preuve visuelle et si possible, l'explicitation du principe d'extension au niveau du schéma.
En fin de séance, l'un des élèves a effectué une *démonstration multimodale*. Nous examinerons plus loin la transcription de l'extrait-vidéo correspondant.

III.2.c. Analyse des schémas produits

- Considérations générales et exemples représentatifs

En termes de niveaux de milieux, on peut dire que les élèves se sont très vite emparés des consignes et ont rapidement produit des actions sur les cubes matériels. Le répertoire d'action avait été enrichi grâce aux séances précédentes et l'interaction élève-enseignant sur la base d'un PowerPoint a permis de raviver les connaissances utiles, à la fois mathématiques et lexicales, ainsi que la composante-outil de l'objet Gnomon. Les élèves ont alors très rapidement enchaîné sur une production de représentations schématiques dont certaines

allaient pouvoir tenir lieu de Preuves Visuelles. Le milieu s'est donc presque d'entrée révélé comme objectif, les élèves s'étant mis très vite à agir, du fait aussi de la richesse de la situation adidactique proposée. Les premières conjectures ont pu être établies dès que les cubes ont été mis à plat et, presque en suivant, représentés schématiquement. Les manipulations sur les cubes concrets se sont doublées de manipulations idéalisées sur les cubes figurés (c'est-à-dire schématisés par des carrés). Compte tenu des réalisations des élèves, comme nous allons l'illustrer ci-après, nous pouvons affirmer que la représentation par les élèves du concept de Preuve Visuelle, concept qui a été en ligne de mire dès le début de la séance en tant qu'objectif explicite, peut être considérée comme conforme au savoir visé correspondant et donc à la représentation que l'enseignant se fait par rapport à ce concept.
A ce stade, les élèves font des va-et-vient entre les niveaux didactiques[175] M_{-2} et M_{-1}. C'est la force du caractère concret des cubes matériels utilisés, des nombres associés aux divers agencements, qu'il s'agisse des cubes ou de leur représentation par des carrés, qui le permet. Les élèves représentent et perçoivent la correspondance numérique entre les divers référents sensibles et notamment les regroupements de cubes-unités pour former des cubes de côté 1, puis 2, puis 3.
Les élèves sont, de plus, conscients du caractère générique de leurs écritures symboliques, celles-ci allant de pair (simultanément ou au travers de va-et-vient cognitifs) avec la perception d'une généralisation schématique idéalisée et surtout ressentie.
Les questions soulevées mentalement[176], ou pressenties dès l'entrée dans la phase adidactique, donnent lieu à une première série de réponses au travers des actions effectuées avec de vrais cubes. Les premières actions qui se dessinaient mentalement s'actualisent dans un rapport au concret effectif mais aussi par suite de la bonne compréhension des consignes formulées en phase interactive avec l'enseignant (niveau M_{-2} et M_{-2} sup, voir Partie Théorique, chapitre 3, V.3). L'élève tente de se faire, ou commence à, élaborer une représentation globale des actions qu'il vient d'effectuer sur le milieu matériel, de mettre en relation ses premiers résultats, de les réinterpréter au vue de la consigne initiale. Il est bien sûr encore trop tôt pour que le schéma global portant sur l'ensemble des actions que l'élève vient de réaliser s'articule parfaitement, c'est-à-dire conformément à la consigne.
Les élèves sont montés dans le niveau M_{-1} lorsqu'ils sont parvenus à percevoir (mentalement) que les choses allaient pouvoir s'agencer complètement au niveau formel et/ou langagier, que les pseudo-signes (éléments de pensée tels que mots intériorisés, images mentales) s'articulaient déjà. Nous pouvons même affirmer qu'ils se trouvaient au niveau M-1sup lorsque la généricité a été perçue de manière totalement convaincante, sur le plan cognitif (voir tableau, paragraphe III.2.a.). A ce stade, les élèves n'étaient plus dans l'incertitude et avaient en général déjà réalisé une objectivation des éléments perceptuels et de leurs relations. Grâce au rapport direct et effectif avec le milieu matériel, et surtout la possibilité d'y revenir quand bon leur semblait, à des fins de contrôle des productions schématiques, les élèves ont localement eu conscience de la légitimité de certaines inférences

[175] Les élèves ont besoin d'un contrôle du sens. Le retour conjoint vers les milieux physiques et schématiques permet de valider, pour soi d'abord, puis auprès des pairs, un raisonnement, une conjecture afin de s'en convaincre totalement.
[176] L'élève qui entame une série d'actions le fait soit de manière imprécise, un peu au hasard, soit en étant fortement imprégné du sens de la consigne mais sans verbalisation intérieure, soit en accompagnant ses actions d'un questionnement et/ou d'une analyse immédiate intériorisés et verbalisés pour lui-même. Parfois, les trois attitudes se succèdent, à tour de rôle, ou sont quasi-simultanées. Nous n'examinons pas ici la question de verbalisation intérieure sous l'angle d'un éventuel rapport à la L2.

au niveau de la réalité sensible (perception de relations causales du point de vue matériel, physique ou temporel) ou en rapport avec les pseudo-signes.
Ce n'est que lorsqu'ils ont produit un schéma conforme à ce que l'enseignant attendait pour une preuve visuelle classique qu'ils sont montés au niveau M0inf, voire presque M0 lorsque le principe d'extension a été actualisé de manière schématique mais aussi dans la phase multimodale (voir ci-dessous, les exemples significatifs et leur analyse, ainsi que les annexes, pour d'autres exemples).
Sur la figure suivante, on appréciera la verticalité des annotations sur le côté droit, ce qui traduit une volonté de conserver une totale symétrie et constitue un indice d'une bonne représentation mentale du principe d'extension schématique le long de la diagonale principale.

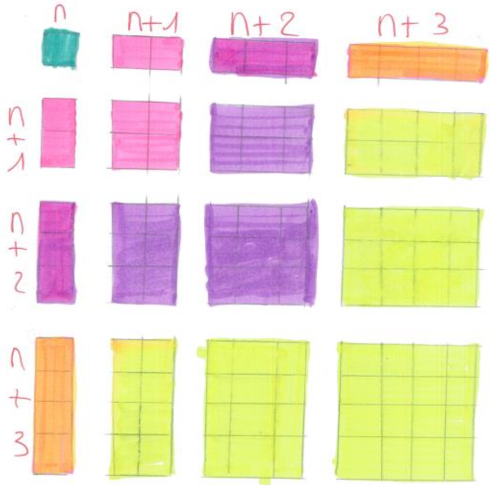


Figure 7.8

Le symbole *n* permet d'objectiver l'incrémentation d'une unité et traduit une volonté de passage à la généralisation malgré sa non-conformité. On retiendra son caractère de notation ou symbolisation provisoire.
Ci-dessous, on trouve les commentaires en L2 qui rattachent le schéma produit aux actions et aux manipulations effectives, concrètes :

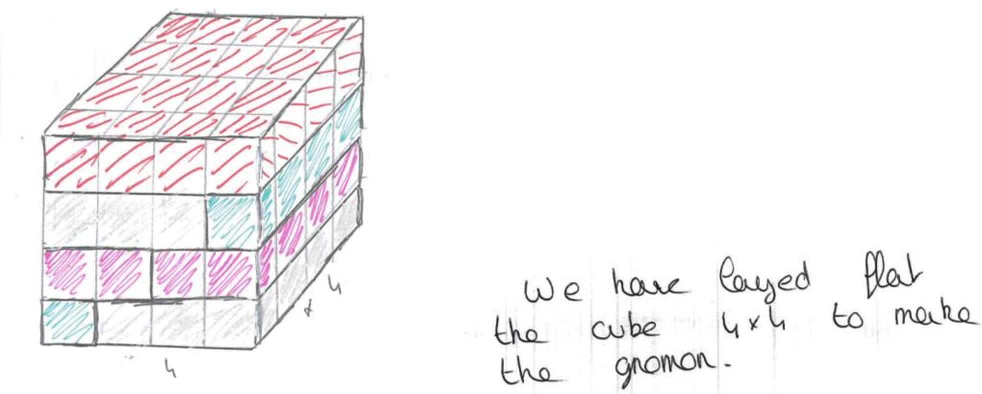


Figure 7.9

Le lien entre le schéma, son rang (4) et la formulation linguistique sont explicites. Le gnomon auquel il est fait allusion est convenablement référencé au niveau linguistique.

L’article défini *the* s’applique gnomon spécifique de rang 4, même si ce dernier n’est pas représenté à cet endroit.

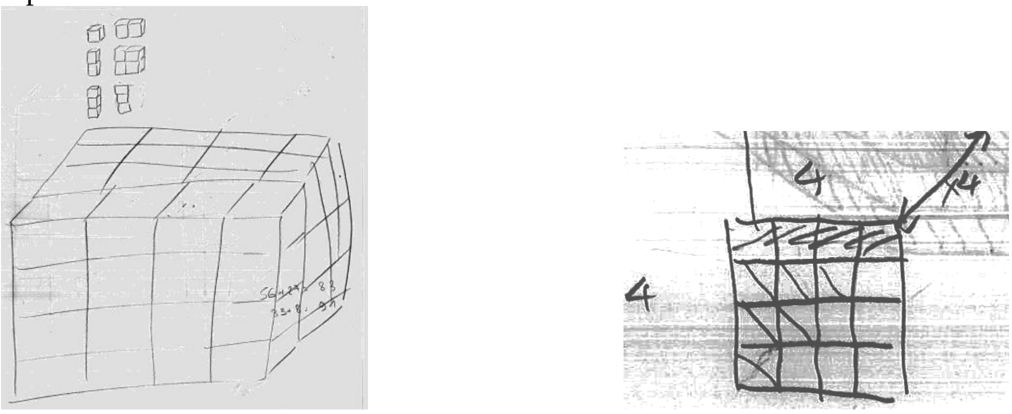


Figure 7.10

La figure précédente manifeste le caractère générique, qui s’est traduit par la possibilité de passer au rang suivant alors que les élèves ne disposaient plus de suffisamment de cubes.
Le passage à la généralisation (pour le principe de décomposition d’un cube) après la conjecture à partir du cas n=4 est, ci-dessous, illustré et commenté.

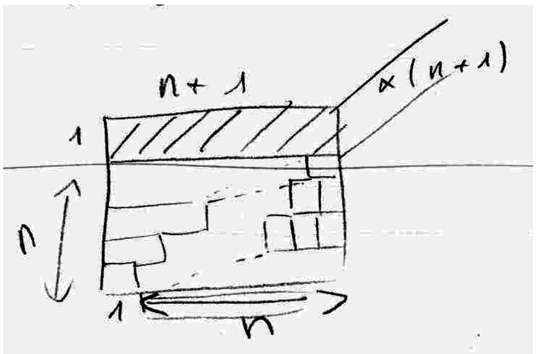
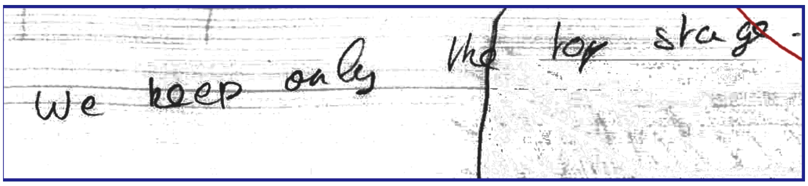


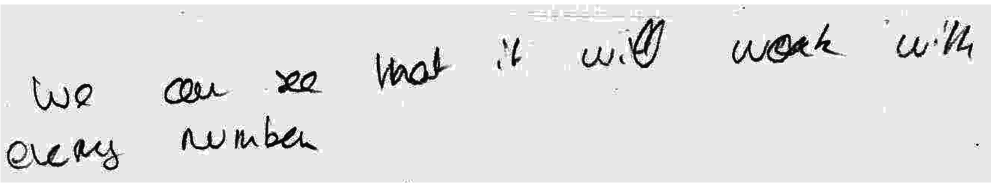
Figure 7.11

La possibilité de détacher par la pensée la couche supérieure de dimensions1x (n+1)x(n+1) est explicitée par des hachures. Elle est d’ailleurs commentée en L2 sur une autre figure (voir ci-dessous).



Cela signifie (nous entendons au sens conceptuel), malgré l’imprécision de la formulation, que la couche supérieure ne sera pas modifiée. L’élève emploie d’ailleurs *stage* au lieu de *layer*.

Les élèves ne perdent pas de vue l'objectif final qui consiste à généraliser, comme en témoigne le commentaire ci-dessous :



Le besoin de ressentir la spatialité apparaît avec la figuration des deux traits en diagonale : la profondeur est constante et vaut $(n+1)$, ou bien encore, le nombre de cubes est systématiquement $(n+1)$ le long de cet axe oblique.

- Analyse plurielle et intégrée d'un schéma sur un exemple représentatif

a) Considérations préliminaires

Le schéma ci-dessous va être analysé sous plusieurs angles différents : didactique, sémantique, syntaxique, sémiotique et cognitif. Nous utilisons ici un très grand nombre de points développés en Partie Théorique : le rôle et la lecture des flèches sur un diagramme, points développés au chapitre 2, IV.2, tous les développements théoriques sur la sémiotique dont notamment ceux présentées au chapitre 3, IV.2, l'analyse de la phraséologie et les questions d'ordre phraséologique abordées au chapitre 4, etc…

Premièrement, il décrit le principe de mise à plat du cube précédent, au niveau général.

Le lien avec ce qui se passe au rang *n* figure également à travers les dimensions du carré (voir figure et extrait agrandi).

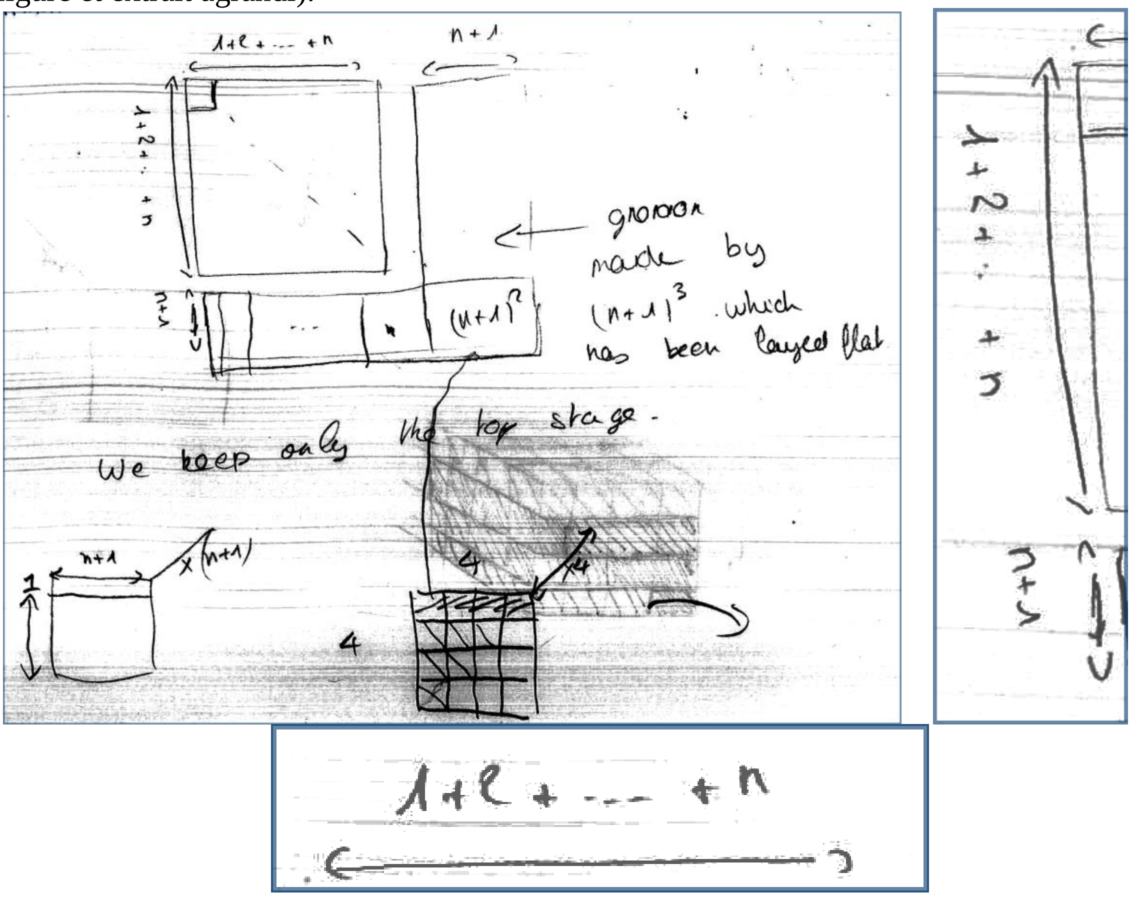


Figure 7.12

b) Changements de milieux, hérédité schématique et expériences généralisantes

Comme on peut le constater, les schémas de ce poster, dans leur ensemble, sont d'une grande richesse et d'une grande clarté. Les élèves sont passés du niveau M_{-1}, au niveau $(M_0)_{inf}$. L'hérédité schématique est incontestable et s'accompagne d'arguments linguistiques. L'axe d'extension schématique est matérialisé par la diagonale. Le schéma produit en totale adidacticité est le schéma attendu dans l'analyse a priori. Nous ne détaillerons pas plus que nécessaire, pour des raisons d'économie et parce que nous le ferons sur un autre exemple (voir infra, dernier point du III.2.c.)) l'expérience mentale généralisante sous-jacente. Elle a manifestement eu lieu et, dans le cas présent, élève la preuve visuelle au rang de *démonstration figurée* (voir chapitre 3).

En examinant néanmoins en détail les éléments de la figure 8.12, on peut voir deux étapes cruciales dans le parcours raisonné et expérientiel des élèves. Le stade générique, correspondant à la figure 3D de rang 4 (à droite sur la figure 8.12 bis, ci-dessous) élaborée dans le milieu de référence (le moment où le poster est réalisé avec soin) a certainement été précédée de dessins au brouillon correspondant à un travail en phase heuristique. La figure généralisée en perspective, avant la mise à plat a été rajoutée sur la partie gauche, comme on peut le voir à gauche sur la figure 8.12 bis. L'expérience généralisante est double et concerne, d'une part, le découpage d'un cube en deux prismes à face triangulaires (ibid) mais aussi l'extension schématique, qui est actualisée dans le schéma génralisé (figure 8.12).

Dès lors, le poster met le lecteur face à deux types de preuve : une démonstration figurée de qualité, destinée eplicitement à une lecture externe mais aussi une preuve pour soi (pour les élèves eux-mêmes, à travers des figures génériques, marques de preuves intellectuelles et pragmatiques au sens de Balacheff, et dont l'une concerne simplement le découpage du cube 3D et l'autre est celle qui sous-tend le processus raisonné aboutissant au schéma généralisé.

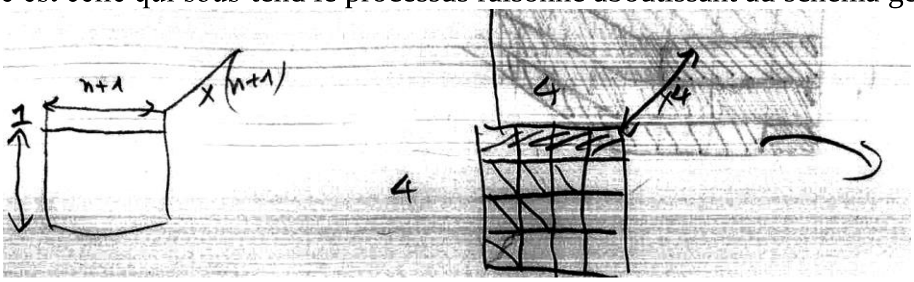


Figure 7.12 bis Généricité et généralisation du découpage du cube 3D

c) Rapport à la L2

Nous nous proposons d'examiner si une erreur en surface n'est pas la manifestation d'une interférence pré-énonciative qu'il conviendra alors d'examiner précisément.

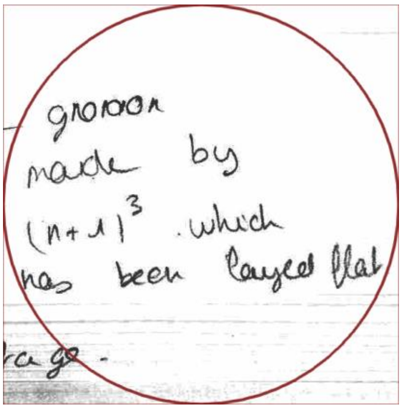


Figure 7.13

Le commentaire ci-dessus explicite le rapport direct avec la manipilation concrète, rapport bien conceptualisé et résultant des processus raisonnés en phase heuristique et suite aux expériences généralisantes en milieu de référence. On remarquera que l'élève utilise *made by* alors que *made from* semblait pertinent et correct syntaxiquement ; révélant ainsi, *au premier abord*, c'est-à-dire dans *une lecture linguistique et cognitive en surface*, soit un problème général de maîtrise syntaxique, soit un relâchement au niveau de la vigilance linguistique, mais qui ne l'empêche pas de raisonner convenablement et de laisser transparaître la cohérence du raisonnement.

Un examen plus précis, intégrant des considérations sémantiques et syntaxiques, à la fois linguistiques et mathématiques, devrait montrer qu'il y a certainement ou très vraisemblablement télescopage entre *made* ou *made (up) of* et *represented by*. C'est ce que nous faisons ci-après.

d) Etude des conditions pré-énonciatives comme sources d'interférence en production

Le télescopage, évoqué au c), est vraisemblablement dû à l'interférence entre plusieurs points qu'il convient d'examiner en détail, compte tenu de l'ensemble des informations que fournissent les schémas et leurs commentaires.

Premièrement, la représentation interne synthétique de la situation à l'issue de la production des schémas semble totalement conforme chez les élèves (voir point a)). Le passage de la représentation interne de la situation, que l'on peut donc légitimement estimer très, voire parfaitement, cohérente, à la production d'une formulation synthétique faisant sens, mais non totalement correcte du point de vue syntaxique, montre qu'il y a eu des obstacles dans le recours aux bons segments préconstruits, aux bonnes collocations dans la gestion syntaxique ; sans doute dûs à une intention énonciative visant une trop grande concision pour une prise en compte d'un nombre élevé de contenus sémantiques et représentationnels ; induisant ainsi une complexité élevée dans la gestion lexique-syntaxe en production.

Le lien entre les éléments sémantiques participant de la représentation interne synthétique, à l'issue de l'élaboration des schémas et leur influence sur la phase de production écrite mais en termes de pré-énonciation, dépend de trois caractéristiques fondamentales de l'objet gnomon : son aspect *constitutif*, son aspect *constructif* et son aspect *représentatif*.

Nous considérons que ces points sont qualifiables d'éléments pré-significatifs, voire expressément pré-sémiques. Ils ne sont pas encore attachés à une formulation explicite et sont

en ce sens *pré-* sémiques ; qui plus est, ils ne le seront même pas (d'un point de vue explicite et lexical) mais seront à la source de l'interférence et nous considérons et allons tenter de montrer, qu'ils sont certainement sémantiquement perçus par l'élève.
En termes d'éléments *pré-significatifs*, à partir d'une *lecture perceptive synthétique* des schémas par l'élève, figurent, entre autres : *la couche*, *le niveau*, *la profondeur*, *le découpage*, *la mise à plat d'un gnomon*, *la structure par couches d'un cube discrétisé en cubes-unités*, *etc*... En termes de segments pré-construits (collocations) ou , compte tenu de l'évaluation du répertoire lors des analyses apriori et du travail en amont, figurent, entre autres : *layer*, *stage*, *depth*, *made*, *made of*, *made up of*, *made from*, *lay flat*, *top stage*, *top layer*, *bottom layer*, *represented by*, *composed of*, etc… Par ailleurs, la dualité (d'appréhension cognitive et perceptive des faits sur le plan mathématique) fortement susceptible d'être activée sur ses deux pôles est la suivante : statique/dynamique. Sa traduction en production devrait logiquement se traduire par un *état* pour l'aspect statique des figures abouties, et par une *action* pour l'aspect dynamique de toute construction séquentielle ou simplement pour celui des manipulations physiques d'origine. Les points sur lesquels l'interférence semble porter sont les suivants (voir ci-dessous, figure 8.13 bis, pour les flèches concernées) :

— d'une part, l'aspect **constitutif** (*statique*) des gnomons (présence d'une flèche horizontale de renvoi au gnomon schématique et gnomon lui-même),
— **et/ou** l'aspect **constructif** (*dynamique*)du gnomon schématique *par mise à plat de couches successives* à partir de la constitution du gnomon 3D (présence d'une flèche reliant l'élément schématique $(n+1)^2$, à l'intérieur du gnomon schématique, à la figure 3D extérieure à l'ensemble du carré généralisé, pour la seule prise en compte de la couche supérieure, etc…). Ces points donnent très vraisemblablement lieu à une intention *pré-énonciative* d'utilisation de *made (up) of* (consitué ou fait de…) ou simplement de *made* ou encore de *made by + gerund* (obtenu en …),
— et d'autre part, l'aspect **représentatif**, cette fois sur la base très vraisembable d'une intention pré-énonciative d'utilisation de *represented by*, comme semble confirmer la flèche horizontale de renvoi au gnomon schématique dans son seul aspect de renvoi.
—

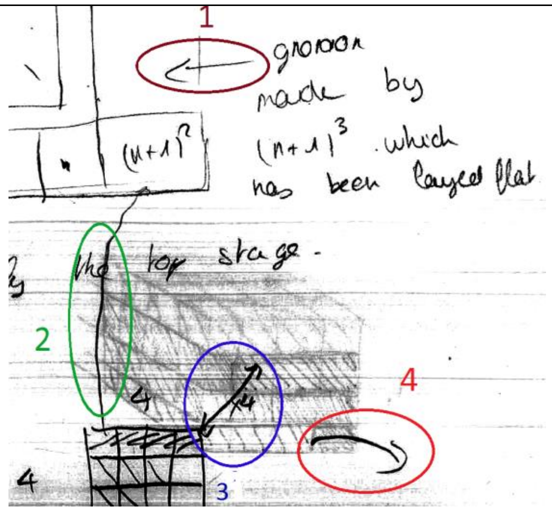
a) flèche horizontale de renvoi au gnomon schématique : en marron et numérotée 1 sur la figure b) flèche reliant l'élément schématique $(n+1)^2$, à l'intérieur du gnomon schématique, à la figure 3D extérieure à l'ensemble du carré généralisé : verte et numérotée 2 c) la double-flèche bleue, numérotée 3 sur la figure ci-contre ; elle n'a pas le même rôle : elle ne traduit que la profondeur dans la schématisation de la figure de rang n=4 d) la flèche rouge, numérotée 4, semble isolée mais traduit certainement la mise à plat de la figure 3D « *estompée* »	

Figure 7.13 bis Extrait de la figure généralisée commentée

e) Conclusion et conséquences théoriques

En conclusion, l'interférence soupçonnée est ici finalement clairement identifiée et semble très vraisemblable. Elle donne a posteriori d'une part, un sens à la notion de pré-énonciation dans un contexte sémantique à la fois mathématique et linguistique *parfaitement délimité,* du fait de la profondeur de toutes les analyses de la situation dans sa globalité ; d'autre part, nous permet de conforter notre positionnement à l'égard de l'existence d'un niveau sémantique pur de gestion du sens pour la pensée. En effet, l'observation, dans le cas présent d'une interférence dans une phase pré-énonciative de production lexico-syntaxique entre, d'une part, des éléments non plus pré-représentationnels mais représentationnels effectifs et identifiés et, d'autre part, des éléments pré-significatifs clairement identifiables, fait apparaître ce qui pourrait semble-t-il être décrit comme des pressions ou des contraintes pré-énonciatives ou pré-verbales. On notera au passage que ces pressions pré-énonciatives sont situées sur un niveau sémantique alors que d'autre pressions internes peuvent être d'ordre psychologique, émotionnel, voire issue de l'externe en passant par le corporel lui-même ou liées à l'environnement physique…

La production elle-même, a posteriori montre une parfaite maîtrise par l'élève des éléments sémantiques purs avant verbalisation effective en L2. Compte tenu de la grande cohérence d'ensemble de la formulation et de la très grande précision du contexte schématique, il semble que la verbalisation ait eu lieu du niveau smantique-conceptuel directement vers la L2.

Soit dit en passant, l'élève qui a rédigé le commentaire et les perspectives en 3D de qualité est précisément celle qui souhaitait que la communication au sein du groupe ait lieu en totalité en L2 (voir transcriptions, infra), ce qui conforte notre dernier point de vue.

f) Lecture sémiotique

A partir de la figure 8.13, nous considérons maintenant le co-texte du symbole $(n+1)^3$ et son statut sémiotique. Le symbole figure au sein d'un commentaire linguistique écrit (*gnomon made …layed flat*), et son statut est de faire référence à un objet concret : *le cube dont les côtés mesurent* (n+1). L'élève est au niveau sémantique et n'éprouve pas le besoin d'entrer dans une formulation plus précise. Le symbole $(n+1)^3$ fait sens pour elle et cela, apparemment, lui suffit. A **l'intérieur** de cet énoncé, considéré comme **destiné à la lecture**, $(n+1)^3$ a un interprétant de type légisigne indiciel dicent, de par son rôle manifeste d'indice au sens peircien et donc référentiel sur le plan du triangle sémiotique linguistique (voir chapitre 3, IV.2 pour le fait que les deux aspects sémiotiques se rejoignent). Par ailleurs, relativement au processus de pensée de l'élève, compte tenu des autres éléments figurants sur le schéma et des points d'analyse précédents, l'interprétant du même signe est un légisigne symbolique argumental puisqu'il est convenablement interprété dans son rapport direct à l'expression algébrique. Celle-ci apparaît de manière analogue à celle d'un produit de trois dimensions, l'interprétant fonctionnel de type produit étant en tout cas conforme pour dénombrer le nombre de cubes-unités du volume physique d'un cube. Du point de vue du raisonnement sous-jacent, cette fois, l'énoncé et les schémas juxtaposés traduisent convenablement la perception et l'expression du principe de décomposition du gnomon. De plus, c'est l'ensemble de la figure sous sa forme généralisée, du fait du recours aux points de suspension et à leur placement cohérent, et les commmentaires, qui permetent de d'affirmer que l'expérience de la nécessité a bien été réalisée.

La correspondance [symbole algébrique / référence concrète] est ici manifeste. Elle joue un rôle fondamental pour la *convaincance* de la démarche de schématisation dont l'objectif est de constituer une preuve visuelle ; objectif parfaitement atteint et qui plus est, adidactiquement.

- Autres schémas

Dans la suite de notre analyse, et pour ne pas commenter de manière redondante, nous regroupons désormais les schémas similaires.
Les schémas suivants révèlent tous que la notion[177] de preuve visuelle est bien claire chez les élèves : représenter la propriété de manière figurée, explicite et pour un nombre fini de cubes consécutifs tout en illustrant la généricité de la méthode par un coloriage et une disposition suffisamment claire (disposition basée sur un ordre dont la nature est algorithmique) et (par conséquent) convaincante.

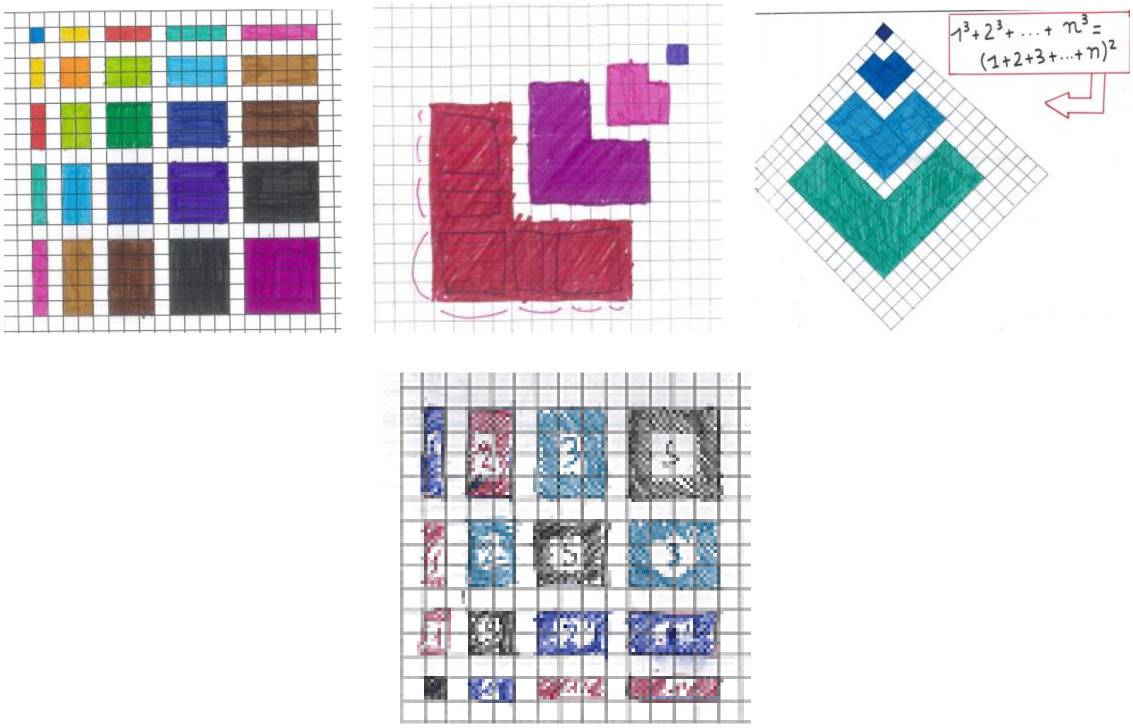


Figure 7.14

[177] Dans la pratique, la notion de preuve visuelle n'est pas toujours clairement définie. Elle repose en effet sur de nombreux implicites.

Le schéma ci-contre est original dans la mesure où l'élève insiste sur la **chronologie de l'élaboration** en reprenant à chaque fois, minutieusement, chacune des étapes précédentes.
On remarquera l'extension abusive de la règle de désignation des adjectifs ordinaux par attribution du suffixe *–th* au cas n=3 au lieu de l'écriture conforme attendue : 3 *rd* (pour *third*).

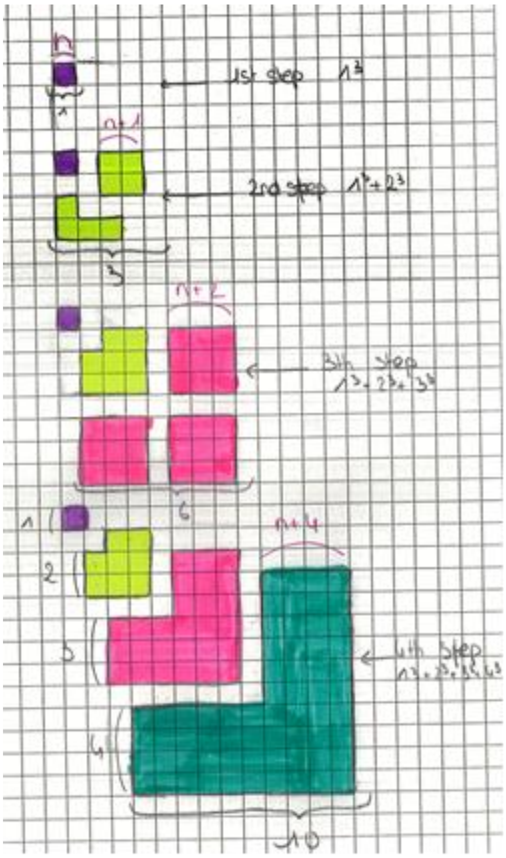


Figure 7.15

Certains schémas reposent sur une manière parfois différente de disposer les cubes à plat :

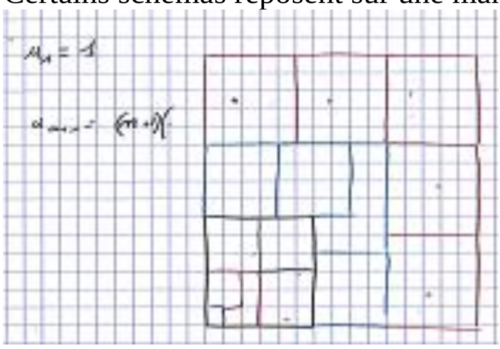
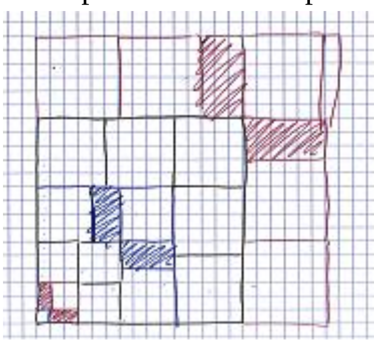
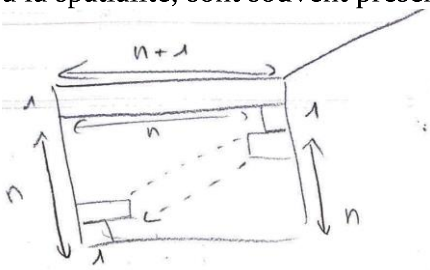
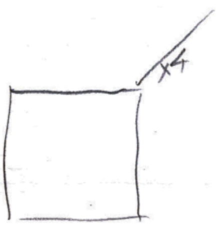


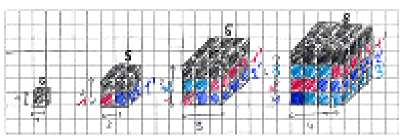
Figure 7.16



Cette méthode avait été anticipée dans l'analyse a priori. Le problème est alors, pour l'élève, de percevoir la généricité au niveau des cas particuliers (rangs) considérés.
Les schémas 3D ou semi-3D, dans le but, ou par besoin, de conserver un rapport au concret et à la spatialité, sont souvent présents :







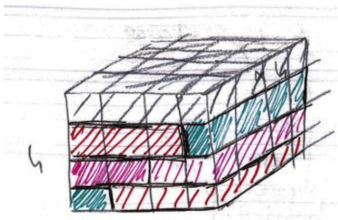


Figure 7.17

Le principe d'extension schématique selon un axe est souvent explicité, comme on peut le voir sur la figure ci-contre.

Les carrés situés sur la diagonale sont d'ailleurs entourés à cet effet ou du fait de leur rôle particulier dans la mise à plat des cubes correspondants.

Figure 7.18

On relève presque systématiquement la présence de l'écriture algébrique de la propriété, mais avec parfois des incorrections.

Sur la figure ci-contre, la parenthèse de la première égalité révèle une erreur :

$$((n-1)^2+n)^2$$

Elle trahit une confusion sur la relation liant la somme correspondant au rang n-1 à celle correspondant au rang n.

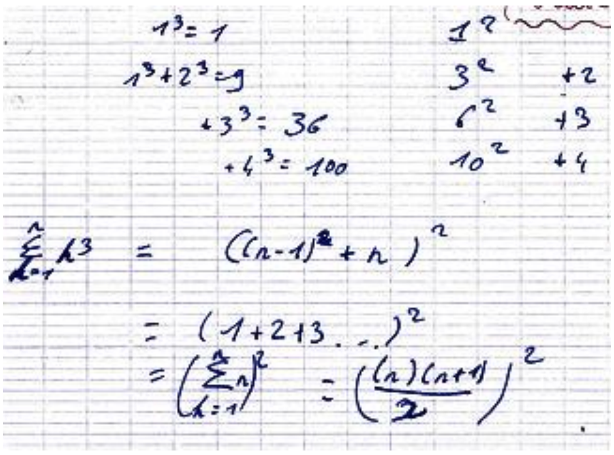


Figure 7.19 Calculs algébriques

Le terme impropre (n-1), avec les *ratures* qui se situent au niveau d'un exposant qui, très certainement, correspond à un carré (c'est-à-dire la somme au rang précédent), n'a pas de statut fondamentalement algébrique mais renvoie au fait de considérer « globalement », sur le plan de l'évocation (tout en l'objectivant par un symbole), ce que l'élève a fait avant (ou que les élèves du groupe ont fait avant). L'élève se situe donc au niveau sémantique.
Elle cherche à établir un lien au niveau syntaxique alors que manifestement, les productions schématiques avaient fourni toute la convaincance nécessaire. Cette égalité résulterait selon nous davantage de la volonté d'établir un lien entre les deux situations concrètes mais directement **à partir du registre numérique**, comme on peut le voir avec la correspondance entre les carrés et le fait de passer au cube suivant (sans forcément, il nous semble, établir un lien avec le fait de mettre à plat) :

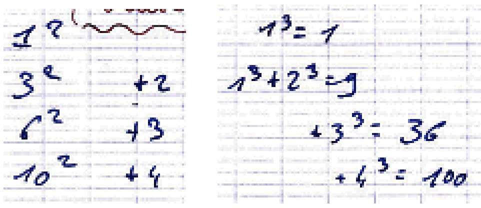


Figure 7.20

La deuxième égalité, en revanche, est correcte, comme on peut le voir sur la figure.

Les élèves ont donc fait l'expérience de la nécessité (c'est le cas de l'ensemble des groupes, soit dit en passant) au niveau des manipulations concrètes et lors de la traduction sous forme de schémas, comme on a pu l'observer, mais pas sur le plan algébrique. Le rapport entre les deux traitements serait étudié lors de l'institutionnalisation. Mais l'objectif consistant à élaborer la preuve visuelle sous forme de schéma a été, quant à lui, amplement atteint.

g) Recours à un gnomon 3D

Nous allons maintenant examiner une production très originale.

Ce qui n'avait pas été anticipé, en effet, c'est que l'un des groupes décide de recourir *effectivement* à l'utilisation d'un gnomon 3D, car nous avions envisagé cette éventualité en termes d'analyse a priori mais en pensant que les élèves ne s'engageraient pas sur ce terrain.

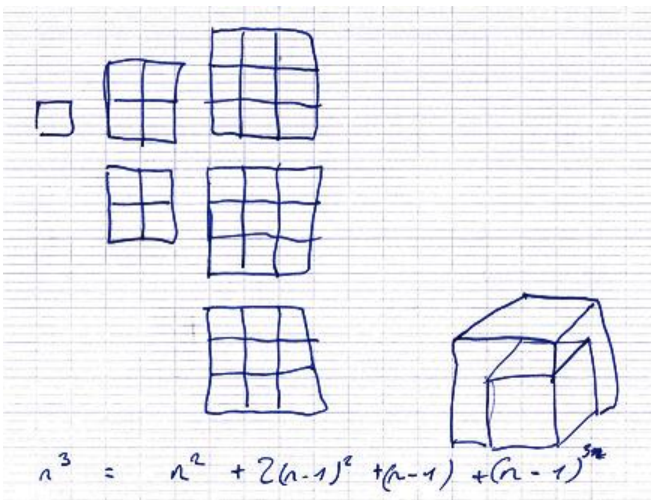


Figure 7.21

Comme on peut le voir ci-dessus, les cubes apparaissent comme des emboîtements de gnomons 3D successifs. Les élèves de ce groupe sont parvenus à proposer une décomposition de ce gnomon.

Le schéma précédent est accompagné de calculs qui témoignent de la difficulté de passer à la généralisation (voir figure ci-contre).

L'élève en charge du calcul tente de légitimer le passage à la généralisation dans le registre algébrique mais en tenant compte de contraintes de disposition schématique (voir ci-contre schéma annoté d'une flèche latérale).

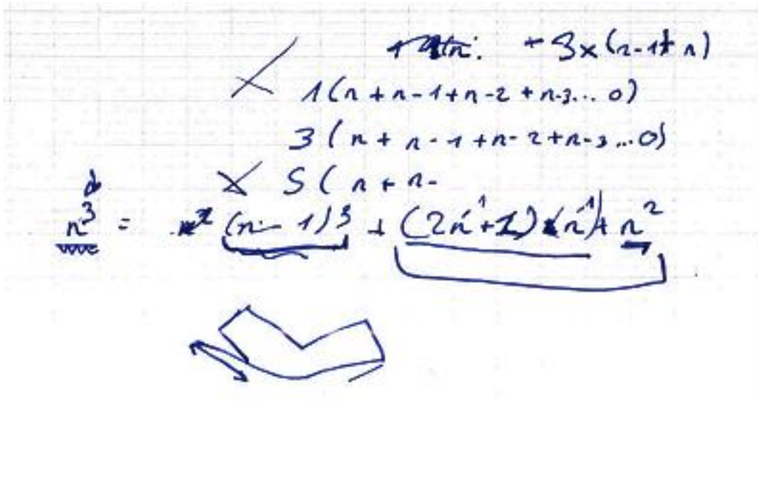


Figure 7.22

C’est donc l’articulation, sur le plan des représentations mentales, au niveau *des mises en correspondance entre les éléments des deux registres*, qui semble poser problème lorsque l’élève effectue une expérience mentale généralisante mais complexe. Or la formule obtenue à la figure 8.21 était correcte et aurait supporté une démonstration par récurrence. Nous reviendrons en détail au paragraphe suivant.
Par ailleurs, il se trouve que l’une des élèves prenait des cours de dessin et elle est donc venue apporter son aide en proposant deux groupes de dessins.
Le premier correspond vraiment à un gnomon tenant lieu de structure 3D pouvant être étendue au rang suivant et cela quel que soit n :

gnomon + cube de rang 2 = cube de rang 3, etc...

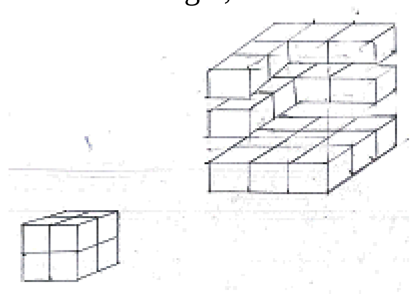


Figure 7.23 cube et gnomon 3D (perspective)

Le deuxième groupe de dessins représente une autre manière de procéder, pour les cas où n est pair seulement :

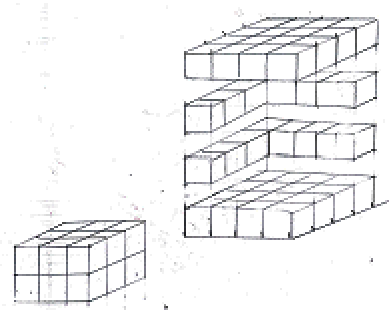


Figure 7.24 représentation en perspective

Ce sont ces deux types de dessins qui ont inspiré le schéma suivant, schéma pour lequel les élèves ont même réussi à exhiber deux principes de mise à plat, le deuxième étant présenté comme manifestement reproductible pour les rangs pairs seulement (« *for n even* ») :

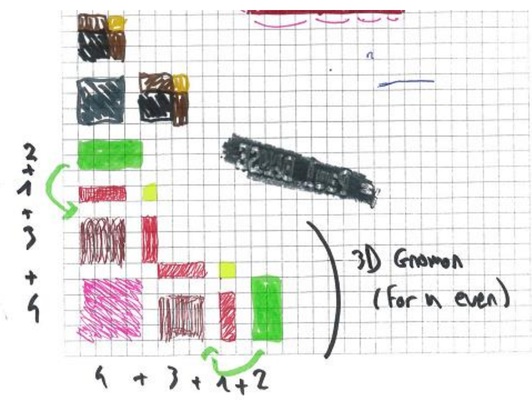


Figure 7.25 Mise à plat d’un gnomon 3D pour n pair

On remarquera que ce qui est indiqué comme gnomon 3D correspond au cube complet de rang 4 (voir plus haut le 2ième groupe de dessins de l'élève). De plus, les flèches trahissent le souci d'introduire de l'ordre dans l'agencement à plat de cubes-unités schématisés.
Les élèves sont ici confrontés à la gestion d'un objet mathématique *étagé* (voir Partie Théorique, types d'objets). La notion de gnomon intervient ici à deux niveaux : le gnomon 3D servant à expliciter le moyen physique pour passer d'un cube au suivant ; et le gnomon lié à l'hérédité schématique (visible sur la figure). Comme c'est le cas généralement pour ce type d'objets, la gestion en est délicate. Le phénomène présent revient en effet à prendre en compte, et surtout articuler, l'extension du gnomon 3D (comment on passe d'un cube au suivant), et l'extension schématique (comment on passe d'un carré au suivant). L'articulation qui lie les deux phénomènes d'extension est à rapprocher de celle qui relie la croissance pour une série (ce serait ici l'objet *somme des cubes*) à celle de la suite (ici, la suite de terme général n^3). Nous n'examinerons pas la possibilité de regarder, sous l'angle de la généralisation explicite, le point de vue adopté par les élèves (voir figure 8.25).
Un dernier point enfin : les élèves ont travaillé en groupes, et par conséquent, tous les arguments échangés au sujet de la validation ne sont pas accessibles directement, malgré quelques extraits vidéo concernant ces échanges. De toute façon, la plupart des échanges sur les questions de validation ont vraisemblablement eu lieu pour la plupart en L1, sans doute même lorsqu'ils ont porté sur la rédaction en L2 des commentaires à faire figurer sur les posters ou sur l'anticipation de la production multimodale finale, prévue dès le départ également en L2.

- Production formelle et schémas comme indices de raisonnements sous-jacents

Nous revenons dans ce paragraphe sur la figure 8.21 et la proposition formelle suivante :
$n^3 = n^2 + 2(n-1)^2 + (n-1) + (n-1)^3$ (1)

a) Statut dans la transcription

Il s'agit d'un énoncé écrit, qui accompagne une figure et qui résulte d'un parcours raisonné en phase adidactique. Le co-texte immédiat ne contient aucune formulation langagière. La figure et l'énoncé formel (égalité algébrique) font partie d'un ensemble plus vaste de schémas et de commentaires figurant sur le poster correspondant ; ensemble dont nous avons déjà tiré de nombreux renseignements (voir paragraphe précédent et figure 8.22).
Le schéma et l'énoncé ont donc été élaborés, dans leur version sur poster, plutôt vers la fin de l'activité ; c'est-à-dire certainement suite à une appréhension synthétique d'un grand nombre de résultats obtenus en phase heuristique.

b) Examen de la formule algébrique en elle-même

L'égalité obtenue par le groupe d'élèves ayant recouru au gnomon 3D est correcte, comme on peut le voir aisément en développant le second membre :
$n^2 + 2(n-1)^2 + (n-1) + (n-1)^3 = n^2 + 2n^2 - 4n + 2 + n - 1 + n^3 - 3n^2 + 3n - 1 = n^3$

L'égalité n'est pas immédiate, loin s'en faut, et est obtenue sur la base d'une expérience généralisante dont il faut retrouver la trace à partir des éléments figurant dans l'ensemble du poster ou imaginer ce qui a pu tenir lieu de support mental.

c) Première lecture sémiotique

Cette lecture est effectuée sans rapport direct au processus raisonné effectif sous-jacent. C'est une lecture externe.
L'égalité (1) est une égalité correcte. Du point de vue du modèle de Bloch et Gibel (2011), il s'agit d'une *proposition* sans preuve *apparente* donc d'un *indice* du point de vue de sa fonction dans la situation ; c'est-à-dire en quelque sorte *en surface*. On pourrait se contenter de dire que le rapport aux agencements physiques dans le milieu objectif ou heuristique a permis d'établir des conjectures, dont on n'a pas la chronologie et que dans le milieu de référence, celles-ci aboutissent à la formule syntaxique (1).
Du point de vue du savoir savant ou d'un point de vue simplement épistémologique, l'égalité est conforme ; elle est constituée d'une égalité algébrique qui n'est pas rattachable à une formule reconnue comme *remarquable* relativement au savoir savant mais les élèves ont quand même décidé de la faire figurer sur le poster, ayant peut-être reconnu un fait non anodin à l'issue de leur démarche heuristique. La conformité du raisonnement lui-même n'est pas prise en compte dans la lecture en surface mais nécessite de reconstruire ce raisonnement ; qui se trouve être propre à l'élève ; ou du groupe d'élèves si l'établissement de l'égalité a donné lieu à une confrontation de points de vue représentationnels dans le but d'aboutir à un consensus. Dans ce cas, le contenu sémantique du raisonnement individuel de chacun des membres peut être attribué, à l'issue de cette confrontation et de la validation qu'elle implique, à n'importe lequel d'entre eux ; ce que nous ferons après par simplification.
Dans une lecture peircienne, mais en surface toujours, le signe global correspondant à l'égalité (1) apparaît comme un légisigne (comme tout signe mathématique) et dit quelque chose de son objet (même valeur pour deux écritures algébriques) ; il est donc indiciel, même lorsqu'on le rapporte à l'élève. Toujours rapporté à l'élève qui produit le signe, ce dernier résulte d'un processus interprétatif reposant, selon Peirce, sur une succession d'interprétants discrétisés mais que nous ne tenterons pas d'appréhender selon ce point de vue car la séquentialité qu'il implique *ne s'accorde pas facilement avec la continuité du processus mental*, lequel s'accompagne d'une production de sens et prend la forme de tout un parcours raisonné *avant* d'aboutir à la production du signe lui-même. Le signe (légalité (1)) est donc l'actualisation physique d'une interprétation *finale* et *synthétique*, suite au parcours raisonné qui y conduit.

d) Deuxième lecture : lecture sémiotique, représentationnelle et expérientielle

Il s'agit maintenant d'une lecture plus approfondie du signe en lui-même (interne à la proposition) en termes peirciens et dans son rapport au raisonnement individuel qui y conduit et en rapport avec des éléments représentationnels.
L'égalité résulte d'un parcours raisonné. Si l'on fait abstraction de tout un ensemble de considérations particulières liées à la chronologie effective des faits, il est fortement probable que l'égalité a été établie par plusieurs mises en correspondance directes entre des éléments physiques (les cubes) et des éléments des représentations schématiques 3D, puis entre ces éléments schématiques et les termes individuels de chacun des membres de l'égalité algébrique : $n^3; n^2$; deux éléments du type $(n-1)^2; (n-1)$ et $(n-1)^3$.

Chaque symbole individuel, à l'issue de l'appréhension synthétique, ou dans une certaine chronologie ou séquentialité dans la représentation mentale dynamique qui y conduit, a un

interprétant qui met en relation chaque representamen avec un des éléments de la figure 3D générique (figure 7.23) mais *au sens d'une expérience mentale généralisante* (au sens de Balacheff).
Les deux membres de l'égalité correspondent à un interprétant du volume *physique* (discrétisable en cubes-unités et non en points géométriques) en termes de décomposition en cubes-unités :

— pour le membre de gauche, n^3 est l'expression d'un volume physique sur la base d'une décomposition en n couches successives comportant n^2 cubes-unités chacune; ou directement par analogie avec un produit de trois dimensions, ce qui serait moins conforme ;
— pour le membre de droite, on reconnaîtra un gnomon 3D et le cube de rang inférieur ; n^2 correspond à la couche inférieure du gnomon (généralisé mentalement) ; les deux representamens $(n-1)^2$ correspondent chacun à deux faces latérales et $(n-1)$ correspond à une colonne de cubes empilés dans l'angle délimité par les deux faces latérales.
Il reste le cube de rang inférieur, à savoir $(n-1)^3$ qui vient physiquement s'emboîter dans le gnomon, soit au niveau des cubes matériels et pour n=2 dans ce cas (contrôle du sens), ou mentalement, avec *superposition* de la *perception externe* (portant sur la figure schématique 3D ou sur l'agencement matériel) *et de la perception interne* portant sur des éléments de pensée idéalisés correspondants, mais avec un attachement d'une grandeur arbitraire et variable (n).

L'interprétant du *signe égale*, du point de vue du signe global (l'égalité algébrique), est sémiotiquement descriptible en disant qu'il est *la marque de la préservation numérique quantitative*. Autrement dit, le processus raisonné de l'élève mobilise le *constituant de signification mathématique du symbole* « = » (il ne donne très certainement pas lieu, lors de l'expérience interne, et à aucun moment, à la mobilisation du pseudo-signifiant langagier verbal correspondant à *égale* ou quoi que ce soit de similaire et de verbalisé intérieurement), du seul fait de la mise en correspondance mentale terme à terme et du sentiment de cohérence que procure une expérience généralisante, sur la base d'une figure schématiques très claire ou d'un agencement physique génériques explicites, c'est-à-dire *accessibles aux sens*. Dit encore autrement, l'expérience mentale généralisante porte sur des éléments de pensée, attache du sens, mais ne mobilise pas de mots intériorisés ; en tout cas pas nécessairement, loin s'en faut.

e) L'énoncé formel et le statut de preuve

Comme nous l'avons montré précédemment, l'égalité (1) a été établie dans un rapport initial direct au sensible puis sur la base d'une abstraction progressive vers le pôle algébrique.
La convaincance des résultats intermédiaires et des représentations synthétiques internes correspondantes a été préservée le long de ces étapes et le produit algébrique final peut être contrôlé par mise en rapport direct et a posteriori avec le sensible d'une part mais surtout, la généralité repose sur une expérience mentale dont on soupçonne fortement qu'elle a eu lieu.
L'énoncé est donc la marque d'une preuve intellectuelle (mentale) et pragmatique, au sens de Balacheff (voir chapitre 3, I.5.) et la figure 8.23 a tenu lieu de support à l'expérience mentale. En l'absence de commentaires langagiers, cette figure tient lieu de preuve visuelle générique pour soi (pour l'élève) et la destination à la lecture de l'enseignant est implicite, contrairement

à ce qui s'est passé dans le cas du groupe auteur du schéma analysé supra (voir le point intitulé : *analyse plurielle et intégrée d'un schéma sur un exemple représentatif*).
Néanmoins, l'égalité (1) n'a pas donné lieu à une démonstration au sein du seul registre algébrique, démonstration du type de celle que nous avons effectuée au paragraphe b).
On remarquera au passage que cette démonstration ne nécessite pas de récurrence.
Comme nous l'avons mentionné plus haut, les élèves ont été davantage mobilisés pour rattacher ce résultat à l'extension du gnomon schématique, qui, dans leur cas, a un double aspect : intégrer l'extension du gnomon lié à l'hérédité et celle liée à la mise à plat du gnomon 3D constitutif du cube, celui-ci devant aussi être mis à plat sous forme de « L » (voir supra figure 8.25 ainsi que le paragraphe correspondant).

f) Remarques d'ensemble et conclusion

Si l'observateur avait pu suivre le travail du groupe dans sa totalité, il aurait été possible de conforter ces points de vue mais aussi de suivre les changements de milieux ainsi que l'actualisation en surface du système organisateur du groupe. Il est clair que celui-ci a été sollicité puisque l'égalité (1) est le produit d'un consensus reposant sur des validations successives avant d'être reportée sur le poster. En termes situationnels, il aurait donc été possible également de mettre en parallèle les éléments du tableau qui va suivre et qui récapitule les principaux éléments d'analyse pour cet épisode reconstruit, avec un repérage des niveaux de milieux (ce que nous ferons en revanche dans le tableau synthétique pour l'ensemble de la situation ; voir III.2.g.). Sans éléments chronologiques, ceci est malheureusement trop indéterminé.

Manifestations situationnelles en surface	Pôle mental et représentationnel ⟷ pôle expérientiel Parcours raisonné	
Recours au répertoire de formule (volumes et aires décomposées en unités ; dénombrement) Changement de milieux et changements de registres Réorganisation successives du système organisateur Aucun contrôle de l'enseignant et adidacticité totale dans l'organisation interne du groupe, etc…	Sollicitations d'éléments représentationnels pour chaque représentation cognitive discrétisée comme moment fort (changement de registre en surface) et mises en correspondance mentales entre les éléments attachés à chacun des registres Nombreux points d'attachement de sens (préservation de la valeur numérique ; absence de calculs effectifs, etc…)	Expériences internes (mentales et généralisantes) Confrontations de représentations individuelles (de points de vue raisonnés) dans les échanges (visibles dans les transcriptions d'autres épisodes pour ce groupe) Nombreux moments de pensée sans verbalisation Pensée perceptive et analytique Contrôle du sens dans un rapport au sensible, etc…

III.2.d. Première analyse de quelques extraits de transcriptions

Nous avons déjà évoqué, lors de l'analyse a priori, certains éléments relatifs au Powerpoint élaboré par l'enseignant comme support pour la présentation des consignes et comme moyen d'engager les élèves activement au niveau linguistique mais aussi cognitif.
Nous examinons ici quelques passages relatifs aux transcriptions de l'enregistrement vidéo.

- Phase interactive d'introduction avec support Powerpoint

Nous citons ci-après un extrait de cette phase. L'ensemble de la transcription figure en annexes.

L'enseignant met à profit les techniques CLIL, notamment le « warming up ».

Les élèves réagissent immédiatement au questionnement de l'enseignant.

La suite de ce passage concerne l'établissement de la conjecture portant sur la somme des cubes consécutifs.

Les autres vignettes du PowerPoint, excepté une, et la suite des transcriptions, ne sont pas présentées ici pour des raisons évidentes de place. Elles sont toutes en annexes et attestent d'un investissement général et prononcé de la part des élèves. Ils attendaient cette séance depuis longtemps. Ils savaient qu'ils auraient accès à de vrais cubes, chose qui n'arrive pas fréquemment en lycée !

La première phase est un « warming-up » 1. P The topic is about cube numbers About the sum of consecutive cube numbers Is that clear to you what a cube number is? (s'adressant à E1) Give me an example of cube number. 2. E1 8 3. P Why is it a cube? 4. E1 It's 2 times 2 times 2 5. P [?] sum of consecutive cubes What is the first cube? 6. E1, E2 ensemble: 1 7. T Justify why 8. E2 It's 1 times 1 times 1 9. T 1 cubed is equal to 1 (répète en insistant sur la dernière syllabe) 1 "cubed" The purpose of the first part of the activity is to establish a conjecture. That's what we are going to do now Establish a property but only at the level of a conjecture. (s'adressant à toute la classe) Does anybody know the formula giving the sum of consecutive cubes?	Premières vignettes du PowerPoint ayant servi de support à cette phase interactive Warming-up et établissement de la conjecture Sum of the consecutive cubes The formula for the sum of the consecutive cubes of integers is one of the most elegant in elementary mathematics Purpose of the introduction : *establish a conjecture* for the formula concerning the sum of the cubes

10. E3 You should multiply the sum of the consecutive squares and …heu and [?] by the… (inaudible)
11. P There is square behind this but it's the sum of the consecutive numbers [légère pause] all "squared"[178]

[178] all squared : le tout au carré

La vignette suivante est rédigée comme suit :

Consider the following sums :

n = 1 $1^3 =$?

n = 2 $1^3 + 2^3 =$?

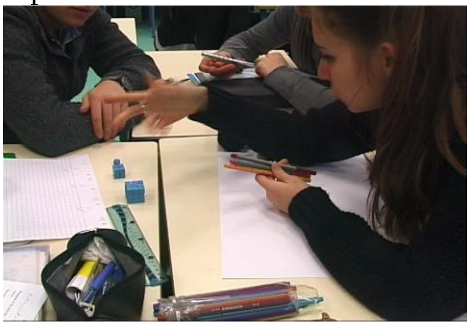
n = 3 $1^3 + 2^3 + 3^3 =$?

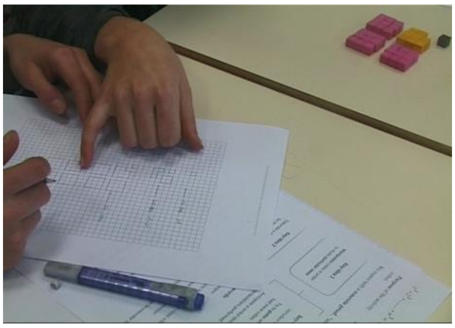
n = 4 $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 =$?

Elle donnera lieu à un passage où les élèves sont très réactifs.
Le but de l'enseignant est que les élèves reconnaissent le carré d'une expression qu'ils avaient rencontrée dès la première à l'occasion de la séance sur les nombres triangulaires et qui portaient sur la somme des entiers consécutifs.
La suite des transcriptions montre que les élèves ont une représentation conforme à celle que l'enseignant s'était faite lors de son analyse a priori. La séance avait donc, à ce stade, très bien débuté. La conjecture sera établie et les consignes concernant la suite de la séance clairement établies (voir annexes).

- Phase adidactique d'élaboration des schémas

Nous effectuons ici un bref résumé de cette phase. Nous reviendrons en détail au paragraphe suivant sur cette phase essentielle en repérant alors les niveaux de milieu et en nous focalisant sur l'analyse des raisonnements.
La phase adidactique a été retranscrite et figure en annexe (Annexe 4). Elle s'est déroulée en L1. Néanmoins, elle est très riche, non seulement du point de vue de l'élaboration des schémas (tous visibles en annexes et déjà analysés au III de ce chapitre) mais aussi du fait que c'est à ce moment que les élèves agissent à divers niveaux de milieux. Nous nous contentons ici de résumer cette partie de l'enregistrement vidéo en soulignant l'investissement de l'ensemble des groupes.
Comme on peut le voir sur les photos ci-dessous, les échanges ont été nombreux et les tâches bien réparties :





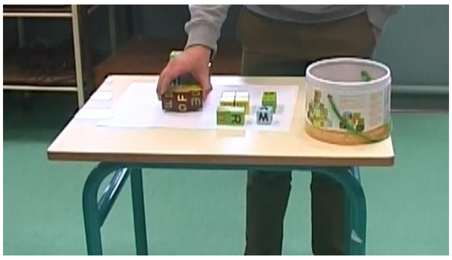
Les représentations de chacun sont confrontées à celles de leurs pairs. Le milieu est suffisamment riche pour que la validation passe par une bonne interprétation des actions et une discrimination assez rapide des actions qui *aboutissent* de celles qui ne peuvent se traduire par une généralisation effective. On peut voir, sur l'enregistrement, des élèves tenter des dispositions qui sont rejetées par leurs camarades. Les discussions sont animées et les élèves prennent un plaisir manifeste lorsqu'ils perçoivent que les choses vont bien s'agencer. Tant que les élèves ne voient pas pourquoi ils obtiennent un carré, ils continuent d'essayer de trouver un moyen qui satisfasse chaque membre du groupe.

Les élèves sont totalement investis dans la tâche. Leur satisfaction est grande lorsqu'ils se mettent à colorier les schémas produits. Aucun élève n'est resté en retrait lors du travail en groupe.
Certaines interactions avec l'enseignant ont même eu lieu spontanément en L2, alors que ce n'était pas un objectif initial pour la phase adidactique. Cela montre a posteriori que même en phase adidactique il aurait été possible d'imposer des échanges en L2 au sein des groupes. Nous avons privilégié la dimension mathématique dans cette phase. Nous aurions pu être encore plus ambitieux…

- Phase multimodale

Voici un extrait de la transcription de la phase multimodale[179]. Il correspond au début de la phase.

1.	P	Are you ready ?
2.	E	Yes.
3.	P	Show me something.
4.	E	At first we have three cubes.
		One big, one medium and one little. So, we can see that the cube can be decomposed "of" a square and, heu, two little row(s)…. Yes?
5.	P	Yes.
6.	E	And then the second one…
7.	P	You may use both hands!
8.	E	OK.
		When we compose the three cubes we have the big square.
9.	P	So where is the big square?
10.	E	Here.
11.	P	Yes.
		So what would be the next step?
12.	E	[hésite]
		The next step would be … four…
		The row of four cubes…



[179] La transcription complète figure en annexes (Annexe 4).

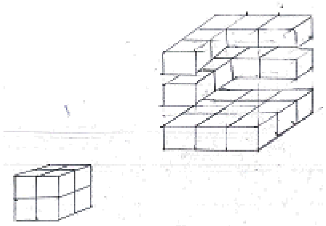
Comme on peut le voir, l'élève s'engage de suite dans la présentation. Lorsque les cubes ne sont plus en nombre suffisant, il est incité par l'enseignant à recourir à une description verbale de la situation au rang 4. La gestuelle et l'utilisation de déictiques jouent un rôle essentiel.

III.2.e. La situation de recherche et les niveaux de milieu

Nous nous référons dans ce paragraphe à la transcription figurant en Annexe 4 et au tableau synthétique relatifs aux raisonnements et aux signes produits selon les niveaux de milieu (cf III.2.a.)
La phase adidactique débute par la distribution du document-support et des cubes. Les élèves se placent en groupes de trois ou quatre. La caméra passe de groupe en groupe.
L'objectif de ce paragraphe est d'analyser les extraits en mettant en relief les niveaux de milieux, les raisonnements à l'œuvre et les représentations de la situation qui sont alors mobilisées. Nous examinons sur quels éléments porte la validation et quelles en sont les modalités.
Nous nous focalisons sur des extraits représentatifs. Le milieu objectif et le milieu de référence feront l'objet de deux paragraphes distincts, même si parfois des va-et-vient ont lieu entre les milieux. Nous examinons ensuite les interventions significatives de l'enseignant. Enfin, un point est consacré aux raisonnements et aux formulations discursives.

- Interactions en milieu objectif

Lorsque la caméra arrive sur le premier groupe[180], celui-ci a déjà amorcé sa phase d'investigation :

		[…]	
1.	E1	On peut faire des gnomons 3D *Un élève dessine une figure en perspective* *Deux élèves manipulent les cubes* (E2, E3)	
2.	E2	Non, c'est pas comme ça le gnomon 3D.	
3.	E3	Non, c'est comme ça. En fait tu rajoutes 1 en bas. Et .. ; [pause] sur les côtés.	
4.	E2	Oui Faut que ce soit en biais, oui. E2 *rajoute un cube en prolongeant la disposition amorcée par* E1	
5.	E1	Attends. Après il va falloir qu'on cale ça avec des stylos pour que ça fasse bien droit. *E2 place des stylos*	

[180] Ce groupe est précisément celui qui a recouru à l'utilisation d'un gnomon 3D. Comme nous l'avons constaté lors de l'analyse des schémas produits, ce groupe considérera par la suite un autre gnomon au niveau schématique cette fois.

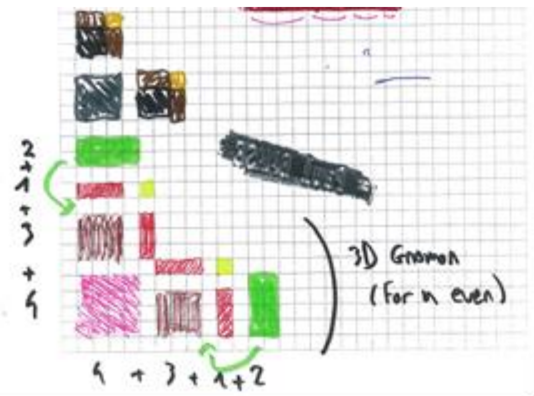
Le milieu est ici clairement le milieu objectif. Comme on peut le voir, les élèves confrontent déjà leurs représentations. La possibilité de recourir à des gnomons 3D a déjà été évoquée lors de l'analyse des schémas. Ce groupe est manifestement d'accord sur la démarche elle-même (recourir à des gnomons 3D), ce qui constitue une amorce de validation mais elle ne porte que sur l'objectif des actions. En revanche, E2 et E3 sont en désaccord sur l'objet gnomon à considérer (lignes 2 et 3). Les questions pratiques d'agencement sont encore étroitement tributaires du milieu matériel : nécessité de caler les cubes empilés pour constituer un gnomon 3D (ligne 5).

Un fait est certain : les élèves sont ici clairement davantage dans le sémantique. Ils vont ensuite se diriger davantage vers le schématique puis le syntaxique. Les formulations ne portent en effet pas encore sur l'explicitation éventuelle de règles constitutives des agencements physiques.

Notons au passage qu'en termes de répertoire de formulation, il est clair que l'îlot discursif créé autour de l'idée de stabilité (ligne5 et 6, amorce en ligne 4) ou d'instabilité est difficilement reproductible (sous cette forme en tout cas) en L2 et donc que le lexique mobilisé ici ne fait pas partie du répertoire L2. Par ailleurs, la remarque de l'élève E3 est significative (ligne 7) lorsqu'elle s'exclame « English », sous-entendant que son camarade devrait s'exprimer en L2. La réponse négative de E1 atteste que la langue n'est pas ici sa priorité. On remarquera qu'à cette occasion il est complètement pris par sa tâche et sa représentation de la situation est ici presque exclusivement dirigée sur l'interprétation de la figure gnomonique 3D.

En référence au modèle d'analyse des raisonnements (cf tableau III.2.a.), des possibles sont identifiés (case R1.1 du tableau) : l'idée d'utiliser un gnomon, idée qui émerge naturellement du processus de conceptualisation du problème à partir du sens de la consigne et des connaissances attachées au répertoire antérieur (case R3.1.), débouche sur l'identification d'un gnomon 3D. A ce stade, les élèves n'envisagent pas encore la nécessité de faire intervenir par la suite un gnomon 2D (et conjointement un gnomon algébrique) pour établir l'hérédité schématique et l'hérédité algébrique. Le milieu est donc pleinement objectif en ce sens. Néanmoins, la volonté d'établir avec précision la constitution d'un gnomon 3D et d'en faire émerger une règle va conduire les élèves à se rapprocher du milieu M_{-1} (milieu de référence).

La difficulté va consister pour ces élèves à relier la possibilité de mise à plat d'un cube sous la forme d'un gnomon en forme de L, d'épaisseur variable liée au rang *n* du cube considéré, avec le fait que ce gnomon sera lui-même obtenu en mettant à plat le cube de rang *n* composé du cube de rang précédent et du gnomon 3D correspondant (voir figure ci-contre).



— Suite de l’épisode (voir Annexe).
E1 et E2 ont déjà entamé un processus de généralisation[181] à partir de l’exemple générique qu’ils sont en train de considérer, comme ne témoigne les lignes 8, 10, 11, entre autres. Leur milieu est toujours le milieu objectif mais le symbole *n,* présent dans chacune des occurrences discursives est, à travers le changement de statut de la figure 3D (elle est devenue générique), la marque de l’entrée dans ce processus. La phase discursive examinée est comparable, dans sa forme, à celles qui sont typiques des analyses de Radford (cf chapitre 2, IV.4), elles aussi portant sur des patterns et sur leur transcription algébrique.
La référence directe au milieu matériel au niveau énonciatif, visible dans la formulation des interventions, est ici prépondérante. C’est aussi une marque de l’attachement au milieu objectif. Les élèves s’appuient sur les cubes physiques et le gnomon 3D physique dans l’espoir de faire émerger, ou voir apparaître, une règle constitutive.
Dans la suite du paragraphe en cours, nous reviendrons sur le groupe 1 à l’occasion de l’étude des formes de validation dans le milieu de référence (voir ci-dessous intervention ligne 70). Le milieu sera alors clairement le milieu M_{-1}. L’enseignant sera conduit à donner un coup de pouce pour réorienter les élèves vers la nécessité de prendre en compte un gnomon 2D (case R2.2 du tableau). La figure examinée précédemment (voir ci-dessus), est réalisée dans le milieu de référence.
L’extrait relatif au groupe 3 laisse apparaître une mise en correspondance entre les cubes physiques (« 1, 8 » à la ligne 21) et les côté des carrés obtenus par mise à plat (« 1, 3, 6 », même ligne).
L’extrait suivant, relatif au groupe 4, est aussi emblématique des confrontations de représentations dans le milieu objectif. Les échanges sont ici plus animés (ligne 27, ligne 31, ligne 41). L’élève E1 s’est fait une représentation erronée et les autres membres du groupe ont clairement perçu que son interprétation du gnomon n’était pas la bonne. La remarque de E3, à la ligne 40 (« fais autour ») est une manière de guider E1 pour qu’il redispose convenablement les cubes sous forme de gnomon en forme de L. Les élèves ne sont plus dans le même milieu. E3 a saisi le principe d’extension du carré à l’aide d’un gnomon qui s’emboîte parfaitement. Elle est déjà dans le milieu de référence et tente de faire valider son point de vue. E1 n’a pas fait encore l’expérience de la nécessité. Il lui faudra adhérer à la représentation de E3 pour cela. C’est ce qu’il commence à faire à partir de la ligne 42 (lignes 42 à 47).
En ce qui concerne le groupe 5 et l’extrait relatif aux lignes 48 à 53, le milieu objectif donne à voir une référence explicite à la forme du gnomon (« ça, ça fait un L »). La ligne 50 est la marque d’une volonté de E1 à rechercher un gnomon en forme de L, suite à l’expérience didactique antérieure et aux rappels lors de la phase interactive précédant la phase adidactique.

- Le milieu de référence et les formes de validation

Lorsque les élèves commencent à dessiner sur les posters, ils sont déjà depuis un certain temps dans le milieu de référence. Sur les transcriptions figurent des photos où l’on distingue parfois que le processus de schématisation est déjà bien engagé. Elles correspondent aux

[181] Soyons clair : le processus de généralisation est ici engagé de manière sémantique en tant que pure possibilité. L’actualisation de ce processus par des schémas et des formulations explicites relève du milieu de référence. La pensée verbalisée est ici doublée d’une pensée sans verbalisation mais anticipatrice au niveau sémantique pur. La perception active (de faits objectifs) est fortement mobilisée dans ce milieu.

interactions relevant presque systématiquement de phases de validation. Lorsque la preuve visuelle semble complète, la validation porte souvent sur la phase suivante, à savoir l'anticipation de la présentation multimodale (ce qui se passe au rang 4).
En premier lieu, les premières formes de validation concernent la validité du décryptage du gnomon physique, en vue de le schématiser. La possibilité de mettre à plat un cube et de le redisposer selon un gnomon spécifique, c'est-à-dire selon une règle explicitable est au centre des débats.
Ici aussi, les échanges peuvent être animés lorsque certains membres du groupe partent sur une mauvaise voie. A des fins d'illustration, nous examinons dans ce qui suit l'extrait concernant le groupe 4, lignes 22 à 47).

[…]

32.	E2	Mais t'es bête ou quoi
		E1 *persiste dans sa manière de voir et de faire*
	E2,	Non, arrête… mais arrête
33.	E3	C'est pas ça qu'il faut faire
		[…]

La forme du gnomon conditionne les recherches. Elle est mobilisée comme argument lors de certaines phases de validation :

48.	E1	[…] Et après, ça fait [hésite]
49.	E2	Non, il en manque là.
50.	E1	Ça c'est un L …non…
		Ah non, c'est pas un L.

La validation, comme on peut s'y attendre, porte aussi sur le processus de généralisation (cf III.1, cases R1.2 et R2.2 du tableau). Les discussions sont nombreuses quant à l'identification et à la conformité des référents du symbole *n* à partir des agencements physiques et des schématisations au niveau générique. Les désaccords initiaux laissent place à un consensus final sous le contrôle du sens référentiel. Le milieu matériel est régulièrement mobilisé pour l'obtention d'un accord. Les gestes sont également très nombreux. Nous citons un extrait relatif au groupe 2 (lignes 83 à 86) :

83.	E2	Le nombre d'après, c'est (n+1) au cube
84.	E4	4 au cube, c'est 4 fois, heu…
		Ça fait 16 x 4, 24, 64…voilà
		Ça fera 36 + 64, ça fera 100
		Ah, ben je sais !
		[E4 *perçoit la possibilité de généraliser*]
85.	E1	Ça rajoute le nombre de côtés chaque fois…
		Ce qu'il y a à rajouter, c'est le nombre
		E2 *et* E4 *discutent à part sur le cas algébrique*
86.	E4	*n*, déjà, ça va être sur le côté […]

- Fonctions des interventions de l'enseignant en phase adidactique

Nous signalons que durant toute la phase l'enseignant a pris soin de ménager l'adidacticité (cf Bloch, 1999). Il était donc important pour lui de ménager et contrôler son discours pour ne

pas révéler la solution des points délicats. Parfois le seuil entre une indication qui permet de débloquer une situation en impasse et dévoiler une réponse au problème est ténu.
L'enseignant rappelle la consigne et se montre exigeant :

23.	P	Vous vous arrêtez à 3. Moi, je veux l'étape suivante…

Il peut aussi valoriser l'avancée dans le travail :

56.	P	Ça commence à être sympa ça !

Ou encore :

117.	P	L'extension, c'est vraiment ça

Parfois, il montre que la voie empruntée n'est pas nécessairement la meilleure, ou en tout cas peut reposer sur une confusion d'interprétation. Dans le cas de la stratégie adoptée par le groupe 1, le gnomon envisagé par les élèves est un gnomon physique 3D. Il leur faudra malgré tout utiliser un autre gnomon pour l'extension schématique. Il est indispensable que les élèves en prennent conscience au risque de ne pas faire aboutir leurs investigations déjà bien avancées, cela dit. Il revient donc à l'enseignant d'intervenir :

70.	P	L'idée des gnomons, c'est pas forcément au départ Eh oui ! P *ne veut pas révéler la solution* C'est peut-être pour passer d'une somme à la somme n=4, d'accord ? Là je veux un seul carré de façon … D'abord vous commencez avec 1 ensuite vous rajoutez le cube suivant…

A cet égard, nous insistons sur les décisions prises par l'enseignant lors de la phase adidactique et notamment celles qui concernent le groupe précédent (groupe 1). Dès le départ, c'est-à-dire dès que le groupe 1 oriente son projet sur la base d'un gnomon 3D, l'enseignant sait que la voie va être plus compliquée. Ménager l'adidacticité, c'est ici pour lui, accepter que les élèves prennent des risques mais aussi ne pas dévoiler une voie plus simple, ce qui pourtant faciliterait le suivi de la situation (car il s'agit bien plus d'un suivi que d'un contrôle). Par ailleurs, il entrevoit dès le début qu'il lui faudra certainement intervenir pour rappeler le sens de la consigne (voir intervention ultérieure, ci-dessus).
Les élèves peuvent aussi perdre de vue certains points essentiels de la consigne. Le fait d'expliciter le principe d'extension est essentiel. Il repose sur une expérience de la nécessité préalable quant à la possibilité de mise à plat selon une règle.

80.	P	C'est quoi les dimensions du grand carré ?
81.	E1	C'est ça, là …
82.	P	Et le suivant, vous voyez ce que c'est ? Je ne vous dis pas plus… Par contre, il faut me dire pourquoi ça marche Il faut me dire pourquoi ça va venir pile… C'est ça l'idée, hein ? […]

Une fois la preuve visuelle établie sur la base des cubes disponibles, certains groupes ont tendance à s'arrêter, pensant le travail achevé.

Le professeur rappelle que la production des posters est suivie d'une phase multimodale et que celle-ci nécessite d'anticiper une formulation du principe d'extension dans le cas du rang 4.

92.	P	Là, vous avez réussi Vous avez assez de cubes pour pouvoir faire la somme jusqu'à trois Et après ça fait un carré Et après je veux l'étape suivante… Mais vous n'avez plus assez de cubes Va falloir que vous m'expliquiez… Vous essayez de me donner une méthode… de me dire pourquoi ça marche. Ok ? Vous pouvez faire des dessins à côté, d'accord ?

C'est le fait de demander d'*expliquer pourquoi ça marche* qui est le plus récurrent dans les interventions de l'enseignant. C'est en effet souvent à cette fin que l'enseignant intervient (voir les passages précédents et aussi la longue intervention à ligne 109, par exemple, dans un même ordre d'idées).

- Raisonnements et formes discursives

Les raisonnements sont ici repérés à partir des interactions. Néanmoins, il est remarquable que, d'une manière générale, de nombreux raisonnements à l'œuvre dans cette situation soient très fortement associés aux phases énonciatives. Les élèves échangent tout en pensant à voix haute. Le milieu matériel est très prégnant, ce qui permet souvent de contrôler l'adéquation des intuitions au problème par des actions immédiates ou une référence à portée de main. De plus, la confrontation aux représentations de l'autre est aussi un moyen de s'assurer de la conformité ou de la solidité de sa propre manière de voir:

12.	E3	Parce que ton n c'est 3 Non, c'est n-1.
13.	E2	Parce que $(n-1)^2$ c'est ça et ça…

Les tentatives sont multiples et le vécu récent et partagé est rappelé en mémoire :

19.	E1	On avait 100 tout à l'heure…

Ou encore, plus loin (E1 également) :

Tout à l'heure, les nombres qu'on avait…
La somme des nombres positifs,
On avait1, 8… on avait 1, 3, 6…

Autre fait significatif, les raisonnements sont menés à la fois pour soi mais également en se confrontant aux représentations et aux raisonnements parallèles et simultanés des autre membres du groupe :

30.	E2	Ça c'est 2 au cube
31.	E1	Oui mais si tu les ajoutes les deux ça fait quoi… Ça fait plus un carré, ça fait un rectangle Si je le mets là ça fait un rectangle

La reproductibilité (et l'adaptation) d'actions selon des règles est un leitmotiv de la situation. Le raisonnement s'accompagne donc aussi d'un jugement sur le succès d'une méthode :

35.	E3	C'était très bien ce qu'on a fait. Là, regarde A la limite on peut faire pareil ici

Il se manifeste aussi directement par des conseils et est ou non suivi d'acquiescement ou encore est en attente d'être validé par l'autre :

44.	E1	Il faut que tu le rajoutes comme ça pour que ça fasse un gros carré.
45.	E2	Comme ça…[?]

Le raisonnement passe souvent aussi par un retour aux consignes afin de bien s'en imprégner mais il implique également un partage des tâches :

		E1, E2, E3 *relisent les consignes*
67.	E1	Allez, je le dessine
68.	E2,E3	Nous, on fait « algébrique » E3 *prend la feuille quadrillée* […]

Enfin, il est manifeste que la situation se prête à des raisonnements verbalisés reposant sur un usage massif de déictiques :

119.	E1	Là, il y a le 2, là, le 3, là le 4

11.	P	Là, ça va pas « rentrer pile »

91.	E1	Colle-moi les trois là !

57.	E2	Là, tu le mets comme ça.

25.	E3	Parce que là, si on met sur le côté…

La situation se prête aussi à des renvois directs au milieu matériel :

39.	E3	Tu pars de la base autour… 1, 2, 3 hop 1, 2,3…

Le milieu matériel offre la possibilité de reproduire les actions pour se convaincre ou convaincre autrui. Il permet un renvoi direct de l'énoncé sur une représentation physique statique ou dynamique comme en témoignent les nombreuses occurrences du type : « Regarde… »
Signalons que le lien entre raisonnements et niveaux de milieux a été évoqué lors des deux premiers points (voir plus haut).
Ajoutons que le milieu de référence est aussi celui des raisonnements synthétiques, ceux où la vue d'ensemble des actions établies et de l'expérience de la nécessité effective et récente se traduit par une cohérence des représentations. La phase d'élaboration des posters (nous les avons analysés et le soin apporté en témoigne) prend en compte les détails de présentation

comme des marques d'un raisonnement achevé qui se veut le plus adéquat possible avec cette vision d'ensemble et l'ensemble des raisonnements qui y ont conduit :

89.	E1	Tu fais ça et après je changerai de couleur pour le quatrième…
90.	E2	Regarde Parce que là, on les a rajoutés Donc ceux-là, il faudrait… Il faut que tu les rajoutes E1 *efface la dernière partie et reprends en tenant compte de la remarque de* E2

Notons au passage que même cette phase donne lieu à une forme de validation spécifique.
Le raisonnement à voix haute se traduit parfois par des exclamations lorsque l'expérience de la nécessité débouche sur un moment fort de compréhension du principe sous-jacent :

84.	E4	4 au cube, c'est 4 fois, heu… Ça fait 16 x 4, 24, 64…voilà Ça fera 36 + 64, ça fera 100 Ah, ben je sais ! [E4 *perçoit la possibilité de généraliser*]

A cette occasion, E1 a déjà saisi et prolonge le raisonnement de E4. E1 embraye par une explicitation (au niveau général) de ce que E4 vient de saisir au niveau sémantique pur car E4 a seulement accompagné d'une verbalisation à voix haute la partie générique de son raisonnement calculatoire :

85.	E1	Ça rajoute le nombre de côtés chaque fois… Ce qu'il y a à rajouter, c'est le nombre […]

Dans un même ordre d'idée, l'étape de rang 4 (c'est d'ailleurs aussi celle qui concerne l'échange précédemment cité) pour laquelle il n'y a plus assez de cubes, est un moment de vérification pour soi que le principe d'extension est bien conceptualisé mais aussi un moment de partage du sens:

107.	E1	Là, tu en as 1, 2, 3… Là, tu vas en avoir 4 E1 *fait une référence au gnomon suivant*
108.	E2	T'en auras 4 ici aussi

Le raisonnement prend parfois des formes originales. C'est le cas lorsque l'enseignant recourt à un argument de symétrie mais aussi d'esthétique pour faire remarquer la particularité (disposition non symétrique) de l'agencement schématique produit par l'un des groupes :

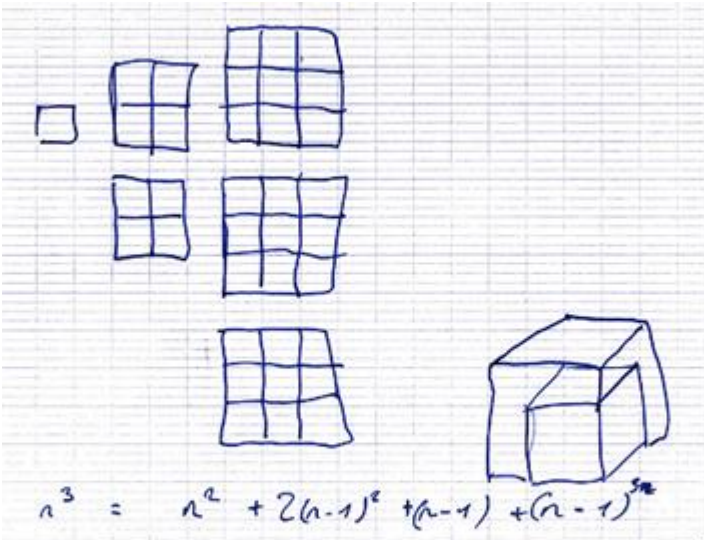
109.	P	Ah, vous avez mis les cubes comme ça, c'est curieux …oui, on peut… Et on n'aurait pas pu avoir une disposition plus symétrique ? C'est pas plus « joli » le symétrique » ?... Vous voyez la symétrie par rapport à… P *fait un geste le long de la diagonale principale* […]

Une dernière chose enfin : la phase d'institutionnalisation, non retranscrite, a donné lieu, elle aussi à des raisonnements particuliers. Ceux-ci sont sous l'influence du discours de l'enseignant et dépendent des éléments repris dans sa synthèse. Les faits significatifs de la situation adidactique servent alors de référents dans le discours de synthèse tout comme les raisonnements produits lors de cette phase et dont nous venons de décrire certains traits représentatifs (voir également point suivant).
Il est clair également que tout n'a pu être filmé et que de nombreux échanges ont ainsi échappé à notre analyse. Néanmoins, l'analyse des schémas produits (III.3.b.) permet indirectement de compléter notre analyse des transcriptions d'échanges verbaux.

- Statut des signes produits (examen d'un cas particulier)

Nous avons posé, au paragraphe III.2.a, quelques questions concernant l'interprétation des signes produits en phase adidactique. Nous avons analysé quelques-uns des schémas produits (les plus représentatifs) et avons utilisé le modèle d'analyse des raisonnements dans le paragraphe en cours en traitant des questions de référence des symboles algébriques et de leur place selon les niveaux de milieux et donc simultanément dans le tableau synthétique. Le modèle nous a conduit à repérer les signes produits, signes que nous avons certes récapitulés dans le tableau (cf III.2.a.). Cependant le statut de certains de ces signes et notamment des combinaisons de ces derniers (formules, c'est-à-dire en l'occurrence, égalités algébriques) mérite un examen particulier.
Le statut d'un signe, et plus précisément d'une formule algébrique, voire d'une succession d'égalités, résulte d'une reconstruction par le chercheur d'un parcours interprétatif de l'élève sur la base d'indices de raisonnements (cf Bloch et Gibel, 2011 ainsi que Gibel, 2015). De nos analyses précédentes, il ressort clairement que les signes produits sont en rapport étroit avec les manipulations effectuées sur les cubes physiques, que ce soit au début des phases de recherche ou à l'occasion de moments de contrôle du sens (grâce à ces mêmes cubes). Les formules figurant sur les posters sont juxtaposées aux divers schémas et les schémas eux-mêmes, dans leur situation médiante (et médiative) pour les raisonnements, participent de la notion d'abstraction progressive qui ici se trouve fortement illustrée. Les formules sont donc établies à partir de raisonnements initialement liés aux cubes physiques. Les representamens (au sens de la sémiotique peircienne) des symboles algébriques sont identiques à ceux que l'on retrouverait dans la démonstration par récurrence de l'identité portant sur la somme des cubes mais les interprétants sont ici dépendants de la présence matérielle des cubes ou de leur représentation schématique par des carrés-unités.

Sur la figure ci-contre, figure dont nous avons déjà parlé lors de l’analyse des schémas produits, l’égalité n’est pas établie suite à des manipulations algébriques mais résulte d’une généralisation sur la base d’une décomposition générique.
Nous avons montré que cette égalité est valide (ce n’est pas toujours le cas, comme on a pu le voir dans le cas de raisonnements non conformes).



De manière générale, la preuve se traduit par la concomitance d’égalités algébriques et de schémas génériques ou même généralisés mais les formules ne sont pas établies au sein du seul système de règles algébriques même si l’identité elle-même est formulée et ce, dès le début de la phase interactive d’introduction. Selon nous, et ce point résulte de notre analyse a posteriori, l’institutionnalisation doit reprendre cette question en montrant aux élèves que les changements de registres successifs conduisent à la preuve d’une identité algébrique sous une forme non-standard mais convaincante (preuve visuelle ou encore preuve multimodale). La prise de conscience de ce fait relève d’une connaissance supérieure. La question du parallèle entre les deux types de preuve, parallèle rendu possible a posteriori, est traitée au paragraphe suivant. Le fait d’obtenir de manière intermédiaire des égalités algébriques originales (parfois difficiles à justifier algébriquement, telles que celle mentionnée ci-dessus) n’a pas été abordé non plus en phase d’institutionnalisation par l’enseignant.
En dernier lieu, nous tenons à préciser que nous n’avons pas examiné la question de l’objet du signe (au sens de Peirce) car cela nous entraînerait à une distinction fine et délicate entre objets immédiats et objets dynamiques, à la fois pour des signes individuels mais aussi pour leurs combinaisons. Or nous avons choisi de nous exprimer en termes de référence multiple, dans la réalité sensible, sur les schémas ou au niveau algébrique, et nous estimons que la formulation de nos analyses, certes engagées résolument sur le terrain cognitif et linguistique, a permis un éclairage précis et suffisant des productions des élèves et de leurs raisonnements.
La question de perte d’information lors des changements de registres successifs (perte de la notion de *forme* effective, par exemple, lorsque l’on considère l’égalité algébrique stricto sensu) ne donnera pas lieu à un examen approfondi car les référents demeurent présents tout au long de l’activité et le sens peut donc être constamment contrôlé par mise en correspondance avec les agencements physiques.

III.2.f. Raisonnements et représentations

Nous revenons dans ce paragraphe de manière précise sur les raisonnements produits lors de la phase de recherche. Nous examinons les représentations du point de vue de leur évolution et du point de vue des processus interprétatifs. Les raisonnements, selon le modèle de Bloch et Gibel (2011) et comme nous l’avons fait pour notre situation, sont appréhendés du point de vue de leur fonction. Le modèle, que nous n’avions pas présenté dans l’analyse a priori dans sa fonction anticipatrice (pour des questions de redondance, de similitudes que l’analyse a posteriori a fait apparaitre de toute façon) présuppose une forte probabilité de formation de signes de types spécifiques (majoritairement des icônes et des indices dans le milieu M_{-2}, par exemple) L'analyse a posteriori l'a confirmé (voir tableau 7.1. et les analyses qui ont suivi).

Nous envisageons désormais les raisonnements du point de vue des types, c'est-à-dire en tant que modes de raisonnements, et non plus du seul point de vue de leur fonction au sein de la situation de recherche. La notion de représentation évolutive, découpée en sous-représentations intermédiaires, est également prise en compte.

Nous commençons par examiner le contrat initial. Il a deux facettes. Il comporte une dimension explicite : utiliser des gnomons ; suite au sens des consignes et à la recommandation explicite (« hint »). Il a aussi une dimension implicite, qui dépend fortement du répertoire de représentation des élèves (cognitive mais aussi imagée, figurée) car il va leur falloir:

1)trouver des gnomons qui, très probablement, ou a priori, s'empilent ou s'emboîtent ;
2)déceler la règle constitutive des gnomons ;
3)déceler et comprendre la règle qui permet d'étendre les schémas.

Cela dit, l'explicitation finale multimodale du principe d'extension figure " explicitement" comme objectif dans les consignes écrites de même que les injonctions à expliquer *pourquoi ça marche au niveau supérieur* (voir extrait du document PowerPoint, figure 8.6).

Le point (1) repose sur une recherche de signes iconiques et indiciels. Le succès de la mise à plat pour des petits rangs (n=2 ou n=3) va permettre de conjecturer une règle. Après lecture de la consigne, à ce stade, le statut de gnomon est en quelque sorte encore *rhématique* (au sens de Peirce), c'est *une pure possibilité*. Cela dit, par effet de contrat, les élèves savent qu'il existe. La recherche de gnomon relève donc d'un raisonnement abductif (voir Partie Théorique, chapitre 3, V.4.). Dans une perspective analogue, les cubes physiques sont une invitation à l'action dans le milieu sensible. Au départ, leur statut est également *rhématique* : les cubes en vrac dans le milieu matériel.

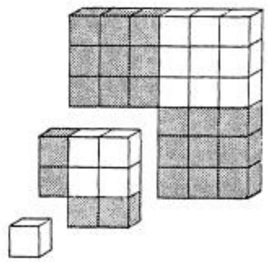
Puis, la disposition sous forme de carrés et la reconnaissance des premiers gnomons va permettre d'engager des raisonnements empirico-inductifs. En effet, les raisonnements visent à aller vers le général à partir de constats à valeur générique (point (2))

Ensuite, dès que les principes apparaissent comme explicitables (au niveau schématique), les contrôles que les élèves effectuent dans un deuxième temps quant à la validité des règles conjecturées (sur un plan sémantique et non nécessairement verbal), vont du général vers le particulier en tant que moyen de conforter l'hypothèse relative à la règle conjecturée. Les raisonnements sont alors empirico-déductifs. Ils sont en effet en partie empiriques car réalisés en rapport direct avec le sensible ou sur des schémas interprétés dynamiquement mais ils relèvent aussi des raisonnements déductifs dans la mesure où ils s'appuient sur la règle potentielle.

A ce stade, la représentation a évolué, suite à une prise en compte d'un plus grand nombre d'éléments conceptuels. L'articulation des connaissances émergentes est plus élaborée.

En termes d'expérience, la convaincance de la preuve dépend des expériences mentales qui accompagnent ces raisonnements. Une expérience mentale généralisante articulant des actions dans le sensible, la disposition des cubes, la forme et les dimensions du gnomon variable et donc aussi la règle d'extension, est nécessaire pour conférer un statut de preuve à la démarche.

Grâce à leur interprétation en termes d'indices de raisonnements, les schémas ont montré que l'expérience mentale généralisante a bien eu lieu. La représentation, à ce stade, lorsque la plupart des posters sont bien avancés, repose sur une représentation synthétique articulée sur le sensible.
Néanmoins, seule la présence du schéma généralisé permet d'élever la preuve visuelle au rang de *démonstration figurée* (voir Partie Théorique, chapitre 3, I.5. et figure 8.10). En effet, le gnomon est alors un gnomon généralisé schématique, au statut de symbole-argument complexe. La représentation de la situation dans sa globalité et l'expérience mentale synthétique qui l'accompagne s'appuient ici sur le signifié pur d'hérédité et sur sa transposition et actualisation dans le registre schématique (*l'hérédité schématique*).
Dans les phases intermédiaires, la règle associée à la constitution des carrés variables et celle correspondant à la constitution des gnomons sont de l'ordre d'icônes ou d'indices.



Sur la figure ci-contre, la dimension des carrés successifs est de la forme 1 +2 … ; le schéma seul ne permet pas d'en dire plus.
En tant qu'étape intermédiaire, un schéma analogue est encore indiciel de la règle constitutive du gnomon.

Il manque aux schémas ce qui relève de l'hérédité sur le plan mental. Il manque l'expérience de la nécessité pour légitimer pour soi la généralisation et établir que la dimension du carré sur le schéma généralisé (mentalisé ou non) est 1 +2 + ….+ n.
Pour ce qui est du gnomon, de son emboîtement parfait avec le carré généralisé et de sa constitution, l'expérience de la nécessité repose sur le fait de réaliser que le cube de rang n peut être mis à plat sous la forme du *bon* gnomon (c'est-à-dire du gnomon correspondant à la figure conforme ; voir figure 8.10).
En termes d'arguments verbalisés explicites, il s'agit de pouvoir dire que le cube est décomposable selon un principe qui garantisse de pouvoir obtenir le bon gnomon. Réaliser une figure 3D généralisée (avec points de suspension) et une mise en correspondance effective avec des flèches ou implicite au niveau du schéma peut dispenser de l'explicitation verbale (voir figure 8.10). Dans ce cas, le schéma maintient la preuve au niveau de l'expérience mentale mais élève la preuve au rang de *démonstration figurée* (voir Partie Théorique).

Dans la suite du paragraphe, nous examinons le rapport existant entre les preuves visuelles et les expériences concomitantes, avec la logique. Des questions se posent en effet : quelle est donc la place de la logique ? et quelle logique sous-tend les raisonnements que nous venons d'analyser ?
Un examen précis des diverses actions effectuées montre assez clairement qu'elle intervient dans le statut-même de l'articulation entre les actions dans les divers registres. En effet, la quantité numérique de cubes-unités doit être préservée lors de la transcription schématique (proche de l'idée de conversion au sens de Duval). Un cube de valeur n^3 doit donc être tel que le gnomon a la même valeur numérique sous réserve (recours à la logique) que la mise à plat respecte une règle cohérente. La logique intervient encore dans le fait qu'une couche (*layer*) obtenue dans le découpage (idéalisé) du cube doit correspondre à une zone schématique

spécifique *clairement identifiée*. De plus, la logique est sous-jacente dans la vigilance dans les dénombrements ou mises en correspondance effectués : *on ne doit rien oublier* ; *il n'en faut ni trop, ni pas assez*. A cet égard, l'abstraction progressive apparaît ici comme un moyen de faciliter la visualisation. En effet, la $3^{\text{ième}}$ dimension peut être évacuée puisque seules les valeurs numériques, vues comme des ensembles d'unités, comptent.
La logique intervient à un niveau global de la démarche et fonctionne ici comme garantie des résultats obtenus sur la base des expériences mentales précédentes et des éléments que nous venons d'examiner. Elle donne du sens aux conditions suivantes :
si je trouve le bon gnomon, c'est gagné (la preuve visuelle sera recevable) ;
et si je trouve la règle, le gnomon est le bon.
La logique n'est donc pas mobilisée ici comme elle pourrait l'être dans un raisonnement en géométrie. En effet, il n'y a pas véritablement d'enchaînements de pas de raisonnements typiques de la géométrie, c'est-à-dire avec recours à des arguments ternaires. C'est l'articulation raisonnée avec le sensible qui prime et les arguments de nature visuelle sont ici prioritaires : dispositions ou schémas explicites (voir productions en *étapes explicites* telles qu'à la figure 8.6). Les schémas dissociés (ibid.) donnent lieu à des expériences mentales non verbalisées mais ont valeur d'arguments.
Tant que l'hérédité n'est pas impliquée (dans le milieu M_{-2}), la logique mobilisée est la logique naturelle. Une fois dans M_{-1}, la logique prend, en quelque sorte, une autre coloration dès que le gnomon est généralisé et explicité. En effet, le principe qui sous-tend l'hérédité n'est autre que le principe de récurrence. Il a une forte connotation axiomatique et la logique qui sert de référence se situe à un autre niveau.

En ce qui concerne les signes produits dans la phase de recherche, les signes peirciens, iconiques ou indiciels mais aussi symboliques-argumentaux, ne mobilisent pas le signifié des mots correspondants. En termes peirciens, les interprétants sont automatiques et les objets dynamiques coïncident avec des éléments schématiques ou physiques. Dans les échanges, les mots servent à *réorienter* les processus interprétatifs ou à se *mettre d'accord* sur ce que chacun voit. La compréhension passe ici par une mobilisation de percepts, d'objets mentalisés et d'objets dynamiques mathématiques (éléments de signification accessibles ou perçus de manière automatique, sans passer par les mots) mais aussi d'éléments de pensée plus difficilement descriptibles (proches de sensations internes ou de percepts).
En ce qui concerne les questions de verbalisation intérieure, la chose est plus délicate à examiner. Il est difficile d'attester que c'est plutôt la pensée avec verbalisation intérieure qui est mobilisée que la pensée sans verbalisation dans telle ou telle situation ou phase. Les considérations qui portent sur ce point, synthétisées dans le tableau qui va suivre, ne sont donc pas attestées mais relèvent, avec une incontestable part de subjectivité, de notre propre manière d'interpréter ce qui relève des expériences mentales.
Néanmoins, il semble clair, au vu des analyses précédentes, que la perception active, sans verbalisation intérieure, est fortement mobilisée dans le milieu heuristique. Cela ne signifie pas que les symboles mathématiques ne soient pas *oralisés* intérieurement (nous revenons ci-dessous sur cette question). Les échanges entre élèves, en revanche, reposent sur un recours à la verbalisation (extériorisée dans ce cas). Nous considérons également que la gestion des éléments mentalisés permettant de réaliser l'expérience de la nécessité ne relève pas, ou peu, d'une pensée verbalisée.

Nous rappelons ici une remarque concernant la distinction entre verbalisation et oralisation (voir Partie théorique, chapitre 3, IV.2.d.). Nous considérons en effet que la verbalisation intérieure s'appuie sur l'évocation des mots et mobilise un sens qui est celui véhiculé par la langue. L'oralisation intériorisée est, en général, comparable au fait de produire un son (comme on produirait un bruit). L'oralisation intériorisée d'un symbole mathématique permet de mentaliser le symbole et ne mobilise que l'objet dynamique du point de vue de l'évocation. On peut ainsi oraliser intérieurement n^3 sans mobiliser le signifié du **mot** *cube*. On peut oraliser *vecteur* $\vec{u}$ sans mobiliser le signifié du mot *vecteur* et sans activer les éléments représentationnels (connectés en mémoire à ce mot). Une oscillation de l'attention, ou plutôt un changement de point de vue interne, peut amener celle-ci à se diriger sur le sens du mot, précisément pour *déclencher des représentations*.
Dans la situation de recherche que nous avons analysée, l'écriture 1 + 2 + …+ n se réfère à un objet immédiat (au sens de Peirce) qui est le côté physique du carré (généralisé). Le mot *dimension* n'a pas à être verbalisé intérieurement pour que l'association ait lieu sur le plan mental et fasse sens. Le sens est ici celui du sens véhiculé strictement par les écritures mathématiques mais en prenant en compte les questions de référence dans la réalité, d'un point de vue en quelque sorte peircien (voir Partie Théorique, chapitre 3, IV.2.).

III.2.g. Tableau synthétique

Au vu de la spécificité de nos analyses, il nous semble pertinent de compléter le tableau 7.1. par quatre rubriques, à savoir : « types de raisonnements, forme et contenu des échanges et des argumentations, niveaux de discours».

	Milieu M-2	**Milieu M-1**	**Milieu M0**
Types de raisonnements	Analyse des agencements et manipulations physiques et lecture raisonnée des premiers dessins Le dessin devient un schéma. Raisonnements empirico-inductifs élémentaires Interprétation visant à articuler les actions dans le milieu matériel et leur transposition au niveau schématique. Raisonnements empirico-abductifs (où se cachent le ou les gnomons ?)	Raisonnements empirico-inductifs (sur la base de figures à caractère générique) Expériences mentales raisonnées et locales articulant actions idéalisées au niveau schématique (et contrôlée dans le milieu physique) et formules algébriques Raisonnements à la fois empirico-inductifs (pour construire les schémas) et empirico-déductifs (pour les analyser)	Raisonnements logico-déductifs (preuve algébrique dissociée de son rapport au sensible) Interprétation synthétique articulant l'ensemble des actions au niveau schématique et la preuve algébrique (raisonnement analytique et synthétique, à dimension pragmatique).

Forme et contenu des échanges et des argumentations	Echanges entre élèves (L1 et L2) Argumentation pragmatique, articulée sur les descriptions des actions dans le sensible Formulation purement langagière dominante (ou mixte avec signes iconiques, indiciels)	Echanges entre élèves (L1 et L2) Annotations des posters (L2) négociée Descriptions plus fines des actions Arguments pour valider Formulation des règles (constitution des gnomons, règle d'extension) Formulation langagière et semi-formelle	Echanges entre élèves et enseignant (L2) L'identité algébrique est établie en phase d'institutionnalisation de manière interactive à partir du registre numérique Débat sur la convaincance des deux types de preuve Formulation en langue naturelle, semi-formelle et formulation formelle commentée (preuve algébrique)
Niveaux de discours	Langue familière, voire très familière Description d'actions en termes simples Usage massif de déictiques et recours à la gestuelle	Langue semi-familière Recours à des termes plus précis Niveau de discours plus élaboré avec prise en compte des objets mathématiques et des schémas	Niveau de langue soutenu Discours codifié et institutionnel sur les objets mathématiques et concepts para-mathématiques (gnomon dans sa généralité, notion de preuve) et sur des éléments conceptuels (principe de récurrence, hérédité)

Tableau 7.2 types de raisonnements, forme et contenu des échanges et des argumentations, niveaux de discours (page précédente)

III.2.h. Connaissances émergentes et expérience de la nécessité

L'algèbre fournit une manière efficace de procéder à l'établissement d'une preuve, notamment à travers la démonstration par récurrence, mais les manipulations concrètes permettent de retrouver un sens *d'origine*, sans doute souvent perdu de vue.

Le prolongement théorique qui nous a conduit à cerner et développer le concept d'hérédité schématique a été évoqué auprès des élèves (à travers l'explicitation du sens des points de suspension au niveau du schéma lui-même) mais n'a pas été approfondi, cela va de soi, compte tenu du fait que ce n'est pas une notion « standard », officielle, ou pas encore en tout cas.

Néanmoins, nous estimons que, même s'il est admis que l'algèbre permet d'objectiver des manipulations qui, à l'origine, sont de nature concrète et portent sur des objets géométriques, la schématisation figurale le permet également. Les deux nécessitent de toute façon des commentaires et des arguments complémentaires linguistiques. De plus, l'hérédité, visible au niveau schématique et au niveau phénoménologique à travers les manipulations concrètes, est apparue comme bien conceptualisée, sur le plan non verbal mais aussi au niveau purement langagier en L2, au travers d'une formulation spécifique que nous avons analysé à l'occasion de l'étude de la phase multimodale. Dans tous les cas, le principe algorithmique d'extension, perceptible par une perception active, est explicitable schématiquement et linguistiquement. La prise de conscience de ce phénomène et la possibilité de réinvestissement qu'il permet dans des situations similaires est une connaissance visée explicitement.

La notion de convaincance (convincingness) a bien sûr été au centre des préoccupations lors des débats (phases d'institutionnalisation) en L2. Le fait d'être convaincu, attesté pour cette situation, témoigne que les élèves ont bien perçu le principe d'extension au niveau schématique ainsi que l'explicitation de l'hérédité (au niveau schématique) mais surtout qu'ils ont réellement accompli et maîtrisé une nouvelle façon de faire des mathématiques.
Une dernière chose et non la moindre : le parallèle entre la preuve visuelle (schématique mais aussi multimodale) et la preuve algébrique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, représente en revanche une véritable connaissance supérieure. Ce point a été, certes brièvement, abordé en phase d'institutionnalisation mais n'a pas fait l'objet d'un savoir visé explicite et intentionnel (c'est-à-dire présenté comme objectif auprès des élèves et institutionnalisé comme tel). Cette question sera reprise au chapitre 8 (paragraphe II), lorsque le thème des identités aura été revisité. Cela dit, et ce n'est pas négligeable, nous avons montré dans l'analyse a posteriori que l'un des groupes a produit le schéma condensé correspondant.
En ce qui concerne l'expérience de la nécessité, ce point a été abordé à partir de l'analyse des schémas (voir III.3.b.). Tout ce que nous avions signalé et détaillé à l'occasion de la séquence sur les *Nombres Triangulaires* s'applique ici aussi (cf chapitre 6, III.5.). L'expérience de la nécessité peut donc être en toute légitimité considérée, une fois encore, comme ayant été effective et profonde.

Conclusion

A l'instar de ce qui s'était produit pour la situation des nombres triangulaires l'année d'avant, les élèves ont, dans cette nouvelle situation, apporté énormément de soin à leurs productions schématiques en les coloriant et y adjoignant des cubes en perspective très bien dessinés. Ceci le signe d'une grande satisfaction de leur part, chose qui, en plus de ne pas être négligeable en soi, est un indicateur de réussite pour l'enseignant.
La force de cette situation est de permettre des manipulations effectives, au caractère dynamique explicite car elles sont réalisées dans la réalité sensible. Ceci a pour effet de favoriser le caractère dynamique des manipulations idéalisées au niveau des schémas. La dualité statique/dynamique, composante essentielle de l'appréhension des objets mathématiques, et à laquelle nous avons fait allusion dans la Partie Théorique, prend ici plusieurs facettes, du concret à l'abstrait, de manière progressive car l'étape ultime, après la production de schémas, concerne la propriété arithmétique elle-même, énoncée, formalisée à l'aide de symboles algébriques.
Le répertoire d'action, contenant les actions effectives dans le sensible, s'est doublé d'actions idéalisées aux niveaux mentionnés précédemment. Ce n'est que par une institutionnalisation (envisagée mais non réalisée) que le parallèle entre les actions aux divers niveaux (réalité, schémas, symboles numériques ou algébriques) pourra être clairement établi mais c'est au travers des phases adidactiques de la situation qu'il émerge. Il se fonde sur la convaincance liée au rapport au concret et sur les actions qui aboutissent (en l'occurrence, à une mise à plat selon un principe d'extension).
Comme on a pu le voir, la réussite au rang 4 a une force de convaincance qui permet de contrôler la conjecture émise aux rangs précédents quant au principe d'extension.

La validité a porté sur une perception claire, et partagée par chacun des membres du groupe, de ce principe d'extension. Une fois cette conjecture formulée, il convient de faire en sorte qu'elle soit ultimement cautionnée lors de l'institutionnalisation, au niveau M0.
Enfin, en ce qui concerne le niveau d'intégration de la séquence, celui-ci est, compte tenu de nos analyses, extrêmement satisfaisant, sauf peut-être dans les échanges au sein des groupes en L1 en phase adidactique d'élaboration de la preuve visuelle et d'anticipation de la phase de présentation multimodale. Ce point peut, selon nous, être amélioré, si l'on utilise les transcriptions comme source d'identification d'îlots discursifs susceptibles de se reproduire, et par suite d'élaboration d'un répertoire de formulation, c'est-à-dire, lexical et phraséologique, affiné. Nous avons élaboré un tel répertoire dans l'hypothèse où, en tant qu'enseignant cette fois, nous serions amené à rejouer la situation mais nous ne l'avons pas revisitée sous cette forme dans le cadre de nos travaux. Ce point est, selon nous, secondaire compte tenu de la richesse des résultats obtenus dans nos analyses. Nous avons préféré explorer d'autres pistes et c'est, entre autres, ce que nous allons montrer dans le prochain chapitre.

CHAPITRE 8. VISUALISATION ET CONCEPTUALISATION, DIFFÉRENTES SORTES DE PREUVES EN L1 ET EN L2

Introduction

Ce chapitre est divisé en trois parties. La première concerne la situation intitulée *Somme des Carrés*. Nous rappelons qu'elle participe de l'étayage de la situation intitulée *Somme des Cubes* et qu'elle a, tout comme cette dernière, été réalisée en 2012-2013.
Par ailleurs, le thème des identités algébriques et des preuves visuelles a été revisité en 2014-2015. A cette occasion, des points spécifiques ont donné lieu à des expérimentations ciblées :

- approche sémantique et lexicale d'un mot-concept (cas du mot-concept *preuve*) ;
- parallèle entre preuve visuelle (schématique) et preuve algébrique ;
- dimension-outil des identités algébriques.

Nous examinons chacun de ces points dans la deuxième partie.
En dernière partie, nous analysons une situation à focalisation linguistique. Elle a été réalisée en 2014-2015 et elle est le fruit d'un travail collaboratif avec les élèves. Elle porte sur l'élaboration d'un document-ressource lexical synthétique qui s'appuie sur des productions d'élèves et qui est enrichi par l'enseignant. Sa présentation intègre des éléments lexicaux connus et se rattache explicitement au répertoire didactique de connaissances mathématiques.
De manière générale, les trois parties portent sur la place de la conceptualisation dans l'enseignement de type CLIL. Les questions d'ordre lexical, phraséologique et sémantique sont envisagées relativement aux processus cognitifs engagés lorsque les tâches et les processus interprétatifs concomitants relèvent d'une activité effectuée en L2. Les thèmes et les exemples retenus ont pour but d'illustrer en quoi le fait de travailler en L2 éclaire, ou participe de l'éclairage, des notions mathématiques (objets mathématiques proprement dits ou concepts para-mathématiques). La dernière partie apparaît alors comme une conséquence de ces considérations théoriques au niveau de la production d'un document-ressource. Le document considéré ne porte pas, en revanche, sur le thème des preuves, celui-ci étant commun aux deux premières parties.

I. Situation intitulée *Somme* des *carrés*[182]

Introduction

Nous examinons un peu plus en détail la nature particulière des deux preuves visuelles associées. Mais dans la mesure où nous avons déjà analysé en détail la séquence des nombres triangulaires et celle sur la somme des cubes, nous passerons donc de manière plus rapide sur certains points pour nous focaliser davantage sur ceux qui permettront une illustration de points théoriques encore peu abordés dans la partie expérimentale. C'est le cas, par exemple, de l'application de la notion d'abstraction progressive, dans le cas d'un passage d'une représentation 3D à une représentation 2D.

[182] Situation réalisée en 2012-2013

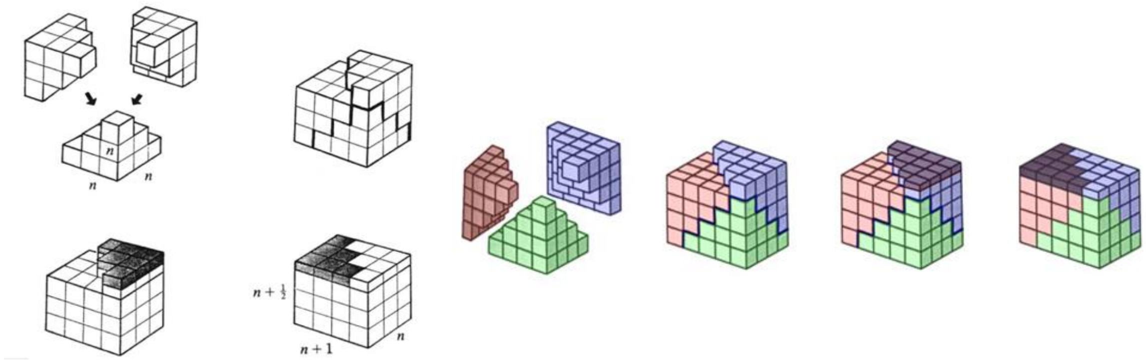
I.1. Première preuve visuelle

La propriété arithmétique pour laquelle nous allons examiner une preuve visuelle 3D est la suivante :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ ... \ + n^2 \ = \ \frac{1}{3} n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$

Il vient immédiatement à l'esprit que la somme de carrés consécutifs va être associée à une pyramide à base carrée constituée de cubes-unités.

La première preuve visuelle a reposé sur la donnée de représentations 3D telle que celles–ci :

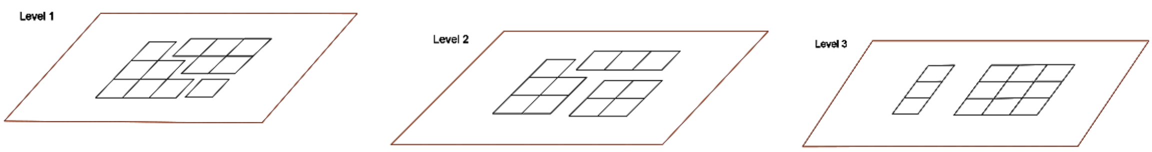


Preuve visuelle 3D relative à la somme des carrés

Figure 8.1

Chaque pyramide de la figure ci-dessus correspond bien sûr à une somme de carrés consécutifs.

L'obstacle à une parfaite convaincance réside dans le décalage (vertical) entre l'une des pyramides et les deux autres. Nous avons donc été conduit à proposer une schématisation (au caractère progressif) en présentant des coupes par niveau de telle manière que les cubes apparaissent aplatis mais de manière oblique, de manière à préserver le rapport à la spatialité au niveau du *ressenti*.



Schématisation 2D par niveaux de l'emboîtement des pyramides

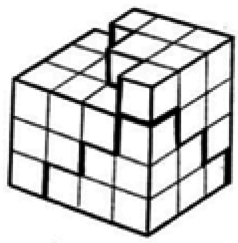
Figure 8.2

Les représentations ci-dessus sont en rapport avec les figures 3-D précédentes (voir plus haut).

Notre volonté était de nous focaliser sur les points suivants :

- Rendre le processus d'abstraction progressif
- Préserver l'impression de perspective et la possibilité de parfait emboîtement à chaque niveau

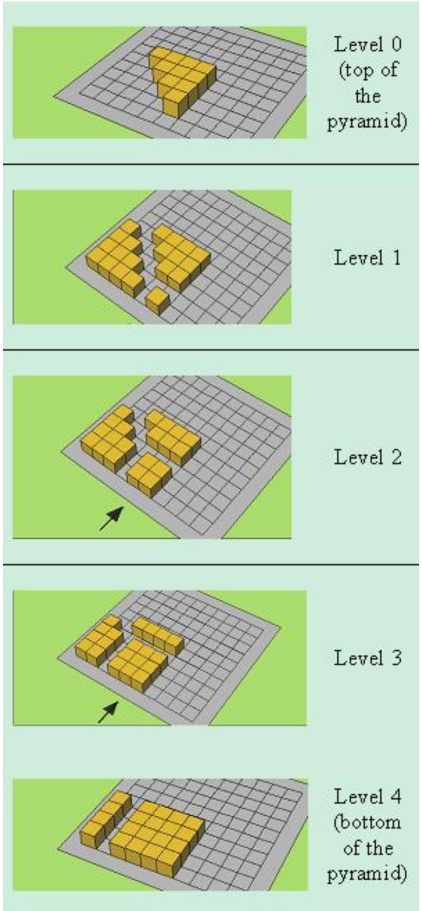
On notera que l'oblicité dans la schématisation par des figures 2D nous rattache à la sensation qui accompagne la perspective spatiale bien que la troisième dimension ne soit plus conservée.
En ce qui concerne le processus cognitif engagé, il s'agit dans un premier temps d'une perception active mais pré-conceptualisante. Il y a mise en correspondance d'éléments perceptuels et de pseudo-signifiés : distinction de trois zones, rapport entre les zones de chacun des plans et les pyramides correspondantes, appréhension selon la verticalité pour la pyramide de gauche, selon la profondeur pour la pyramide arrière et selon un axe horizontal pour la troisième pyramide.
Dans un deuxième temps, la perception active devient conceptualisante car il y a mise en correspondance de signifiés abstraits numériques avec les éléments perceptuels et significatifs précédents. On attache alors, par des va-et-vient successifs entre la figure 3D et les plans schématisés, le signifié numérique 1 + 4 + 9 pour chaque zone et chaque pyramide.
Signalons que ce sont, à la fois la spatialité ressentie, la capacité à imaginer les cubes cachés, et d'une manière générale le recours à des schèmes de perception active, qui permettent d'attacher, de manière légitime, le même signifié numérique, que ce soit aux pyramides en 3D ou aux éléments schématisés en 2D correspondants.
Les représentations planes ci-dessus correspondent ainsi à un aplatissement des couches successives (*successive layers*) à partir de la figure ci-contre.



Emboîtement en 3D des trois pyramides

Figure 8.3

Notons malgré tout que le niveau supérieur n'a pas été représenté dans le cas de la somme de trois carrés consécutifs (pyramides de rang 3) en ce qui concerne la schématisation proposée à la figure 9.3. Il le sera en revanche dans la schématisation suivante. Celle-ci concerne les pyramides de rang 4 (voir ci-dessous, figure 8.4).



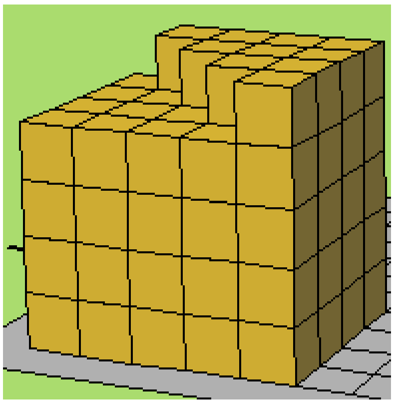
Level 0

Level 1

Level 2

Level 3

Level 4



Ces figures concernent un regroupement de pyramides à 4 niveaux.

Pyramides sur quatre niveaux

Figure 8.4

L'interprétation, la traduction mathématique, a donné lieu aux calculs suivants :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ ... \ + n^2 \ = \ \frac{1}{3} n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$

This equality is equivalent to :

$$3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ ... \ + n^2) \ = \ n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$

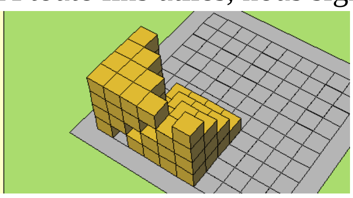
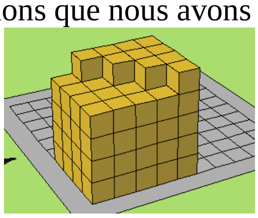
$n(n+1)(n+\frac{1}{2})$ corresponds to the volume of a parallelepiped

Its dimensions are : n , n+1 and n + 1/2

And $3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ ... \ + n^2)$ corresponds to the volume of 3 identical pyramids

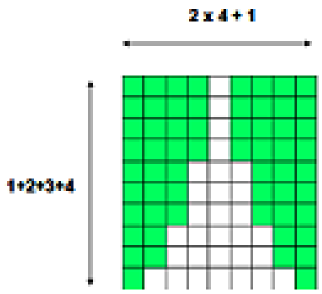
Tous les montages annexes, les éléments linguistiques tels que la phraséologie associée et les supports utilisés figurent en annexe.

A toute fins utiles, nous signalons que nous avons utilisé Wisweb pour certains montages 3D.

I.2. Deuxième preuve visuelle

La seconde preuve visuelle devait être établie de telle manière qu'elle permette une transition avec la séance sur la somme des cubes, séance-phare qui arrivait juste après.
L'enjeu de la deuxième preuve visuelle était important quant aux contenus de l'institutionnalisation. Un des obstacles résidait dans la relative complexité liée aux manipulations sur les gnomons. Une phase adidactique occupe une place centrale de dévolution au sein de la séance, en faisant suite à une phase interactive basée sur l'utilisation d'un Powerpoint.
Lors de la phase adidactique, la plupart des élèves n'ont donc pas disposé les 2 principales pyramides, décomposées en couches carrées, de manière naturelle (c'est-à-dire contre les bords du rectangle proposé), comme l'enseignant le prévoyait, mais les ont inversées.



disposition souhaitée

Figure 8.5

La dévolution de la décontextualisation de la notion de gnomon n'a certes pas eu lieu en phase adidactique, puisque les élèves n'ont exercé sur le milieu que des actions qui n'aboutissent pas à l'explicitation d'un principe d'extension des figures. Pourtant, c'est précisément cela qui a permis à l'enseignant d'insister davantage sur la composante-outil du gnomon lors de l'institutionnalisation. Le rôle opératoire du gnomon allait devoir être mis en relief et l'objet correspondant mieux cerné, étoffé par un panel d'actions potentielles plus vaste. Sans cette séance, ces actions seraient restées hors du répertoire didactique de la classe. En d'autres mots, la séance a permis aux élèves d'éprouver la résistance du milieu et les a incités, par voie de conséquence, à examiner à tête reposée les documents proposés, ces derniers tenant lieu de « solution » aux problèmes rencontrés en phase adidactique.
C'est donc à l'issue de l'institutionnalisation, celle-ci étant subdivisée en une phase de synthèse interactive en fin de séance et une étude de documents à la maison, que les élèves disposent de la connaissance liée aux possibilités, pour un gnomon, d'être ré-agencé sous une autre forme.
Nous proposons ci-après deux extraits du document donné aux élèves à l'occasion de cette séance.
Les élèves ont à résoudre le problème qui suit avant de s'engager dans une phase adidactique :

Let's consider the following equality, denoted by (E2) :

$$3\left(1^2 + 2^2 + \ldots.. + n^2\right) = (2n+1)\frac{n(n+1)}{2}$$

1) Prove that : (E1) is equivalent to (E2).

2) Then deduce that :

$$3\left(1^2+2^2+.....+n^2\right) = (2n+1)(1+2+.....+n).$$

The product $(2n+1)(1+2+....+n)$ can be interpreted either as the area of a rectangle or as the number of squares in a rectangle whose dimensions are $(2n+1)$ and $(1+2+....+n)$ and $3\left(1^2+2^2+.....+n^2\right)$ can be seen as 3 copies of a pyramid.

Ces questions ont été traitées convenablement.

Ensuite, les élèves devaient élaborer la deuxième preuve visuelle, à partir des consignes (en L2) suivantes :

The purpose is now to elaborate a **second Visual Proof** based on the previous observations.

The arrangements of squares are no longer in 3D-space. (the former 3 pyramids are supposed to have been laid flat)

3) Considering **three copies** of the sum of square numbers (for the case n=4) ,

Show how to rearrange the squares so as to fill in the rectangle.

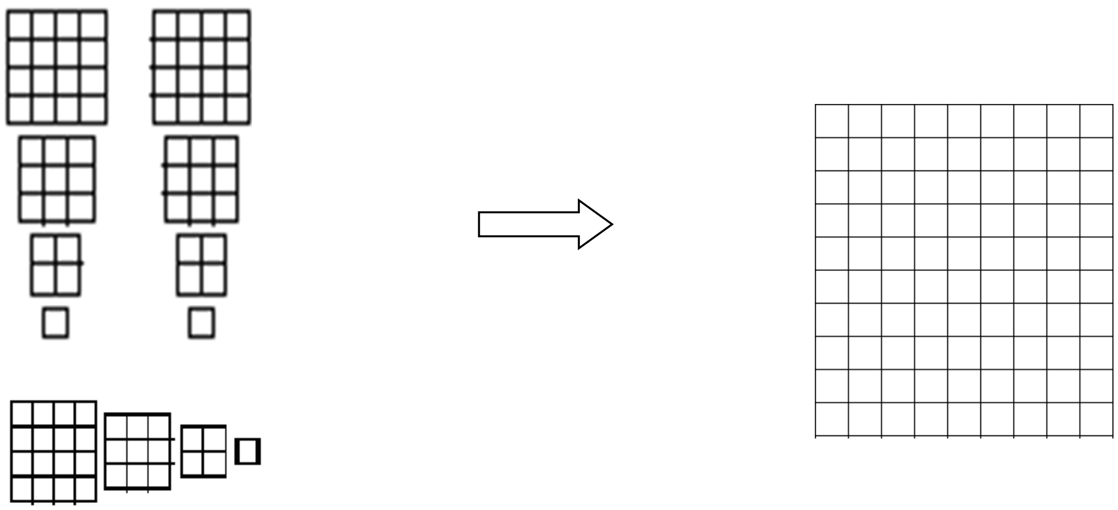


Figure 8.6

Il était prévu que les élèves colorient et disposent les 2 pyramides principales comme sur la figure ci-contre et pensent aux gnomons quant à la troisième pyramide :

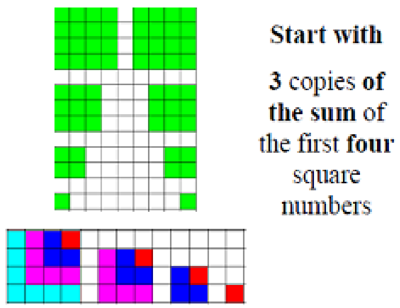


Figure 8.7

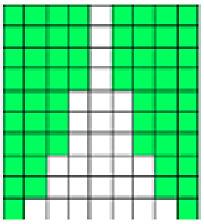
Le document contenait en effet les indications suivantes (coups de pouce / hints):

Hints:

Think of ***gnomons!*** *(gnomons are hidden)*

*Arrange **methodically**!*
*Introduce **order!***
*Establish **relationships** (between corresponding rows, columns, gnomons, squares*).
Use colour.

Mais ceci n'a pas suffi car plusieurs schèmes de perception active étaient impliqués : reconnaître visuellement un lien entre les divers espaces vides, penser à plusieurs gnomons pour chacun des carrés de la pyramide disposée horizontalement et surtout penser à la possibilité de *mettre à plat un gnomon coloré pour le placer dans les interstices*. Ce schème, en l'occurrence un schème d'action, ne faisait pas partie du répertoire d'action des élèves de la classe.



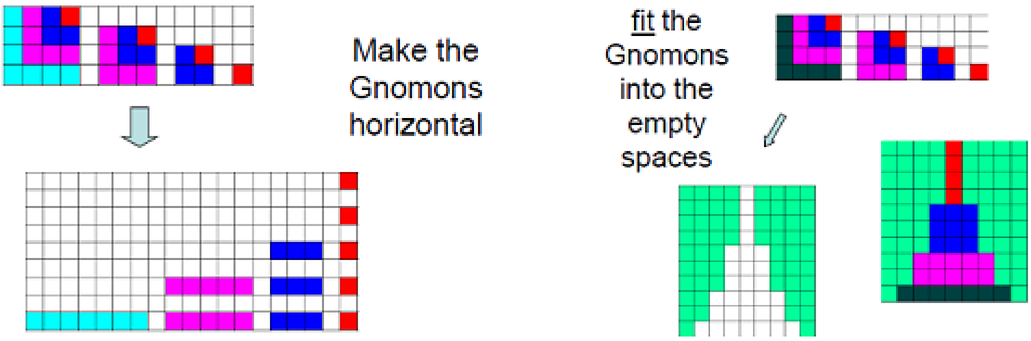


Figure 8.8

Une analyse plus poussée quant aux schèmes cognitifs et visuels impliqués était donc impérative. Ce sera le cas, comme nous l'avons vu au chapitre 8, pour la séance qui allait suivre.

Nous estimons néanmoins que, même si la phase adidactique ne s'est pas déroulée tout à fait comme l'enseignant l'attendait, la phase d'institutionnalisation et les documents complémentaires fournis à ce moment ont très certainement contribué au bon déroulement de la séance qui allait suivre (somme des cubes). Comme on peut le voir sur les deux documents qui suivent, documents qui regroupent les principaux points du Powerpoint utilisé en classe lors de la phase d'institutionnalisation, l'accent est mis au niveau linguistique sur une liste d'expressions qui sont censée faire partie du **répertoire minimal** de formulation de la séance suivante :

fit the gnomons into, establish a relationship with, place along the edges, next pattern, rearrange, illustrate the generalization, use labels, etc...

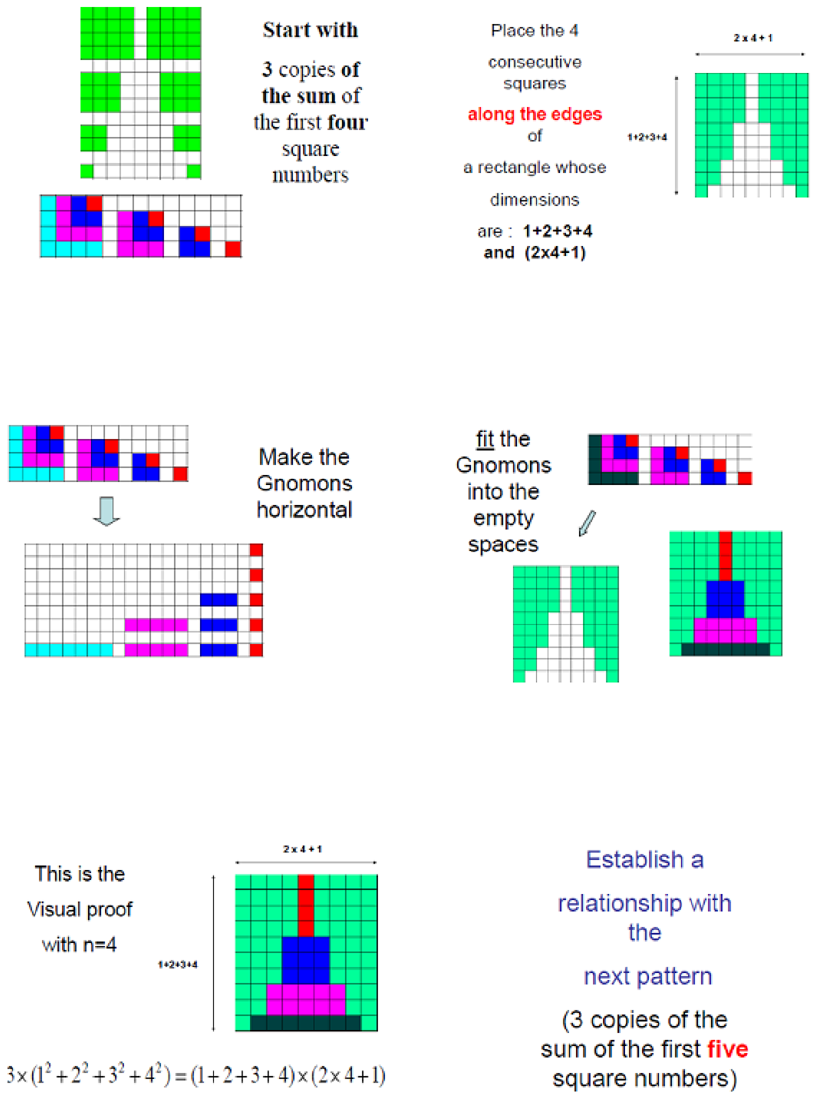


Figure 8.9 Extrait de document-ressource

Sur le deuxième document, la diapositive en bas à droite correspond à une explicitation de la généralisation schématique. Il est clair que, dans le cas de cette preuve visuelle, les choses ne sont pas si évidentes que cela.

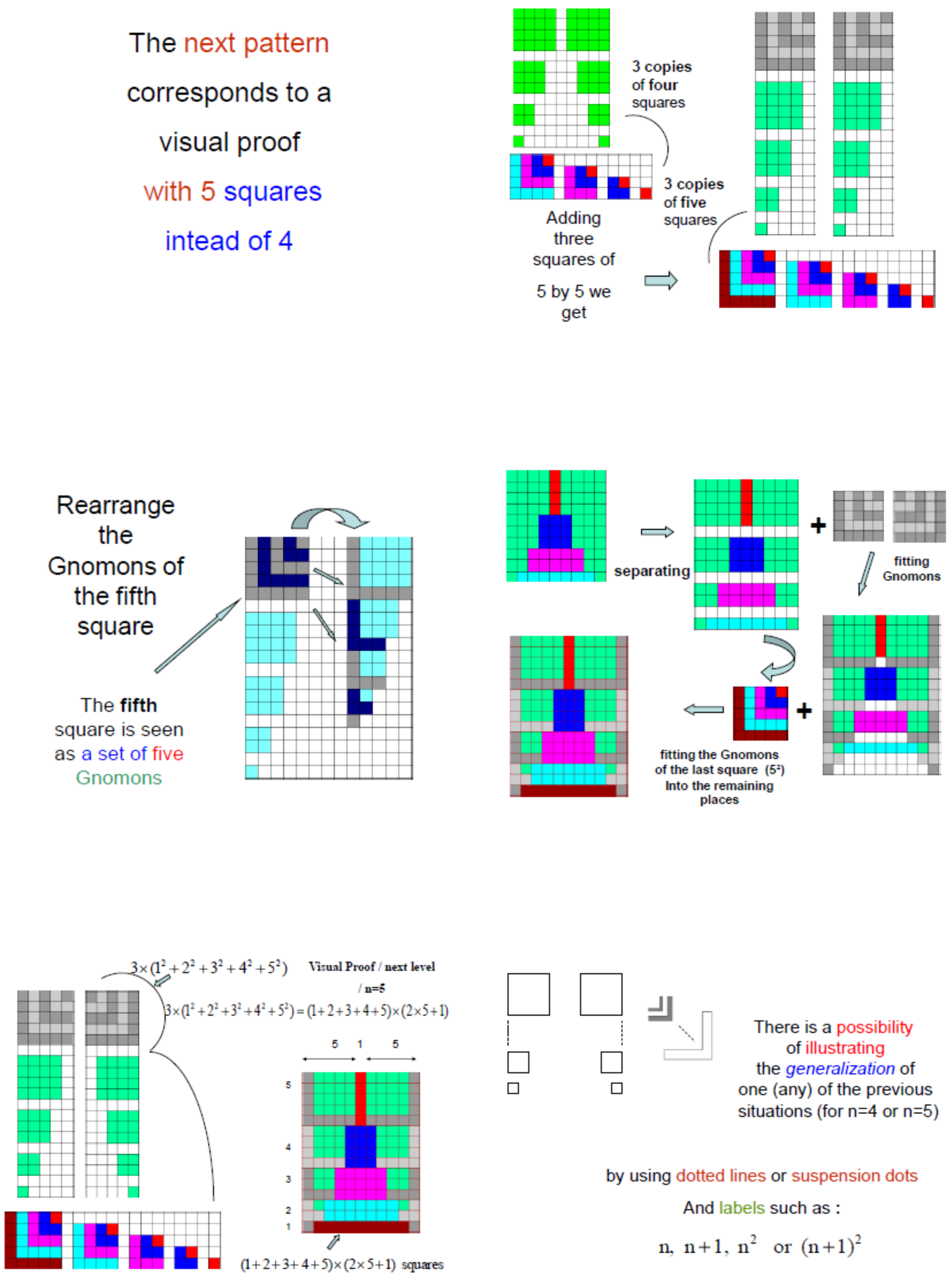


Figure 8.10 Document-ressource

Notre volonté était surtout de traiter un exemple présentant un certain niveau de complexité, de manière davantage interactive, pour que la séance sur les cubes repose sur des bases solides en ce qui concerne le répertoire didactique des élèves.

Le milieu aura par ailleurs fourni des rétroactions sur le fait que le "bon" placement des gnomons est nécessaire pour leur utilisation efficace, et donc pour la réussite du calcul visé.

II. Les identités algébriques et les preuves visuelles revisitées[183]

II.1. Approche sémantique et lexicale d'un mot-concept (cas du mot-concept preuve)

Nous rappelons qu'un mot-concept est considéré comme noyau dur d'une représentation cognitive d'un individu. En mémoire lui sont attachés d'autres mots qui, soit partagent avec lui des éléments de significations (de type sèmes), soit sont étroitement associés du fait de processus de conceptualisation réalisés antérieurement et mobilisant ainsi le concept sur lequel on se focalise ainsi que d'autres concepts. Le mot-concept intervient comme déclencheur de représentations et de connaissances. Son utilisation dans le discours pré-active ces éléments. Nous estimons que cette pré-activation peut être favorisée par un travail direct sur les mots-concepts connectés (ou en attente de connections). Nous examinons et illustrons dans ce qui suit la nature et le type de questionnement que l'enseignant peut être amené à produire à cette occasion.

Nous avons effectué en classe, en 2015, un travail en L2 focalisé sur le mot-concept *proof*. Ce travail avait pour objectif de mettre en application au sein d'une séance certains points abordés dans la Partie Théorique. Le paragraphe présent s'appuie, entre autres, sur des considérations théoriques relatives au chapitre 1 (paragraphe II.4.a.) et se rapporte à la notion de *module sémantico-conceptuel*. Dans le cas présent, le module (L2 uniquement ou essentiellement) est vu comme centré sur le mot-concept *proof*. On n'envisagera pas, dans ce qui suit, de *mise en rapport explicite* avec le module correspondant en L1, du point de vue de la décentration (non-recouvrement). La perception du non-recouvrement de la L1 à la L2 est donc ici à la charge des élèves et résulte *implicitement* d'un traitement de la signification strictement en L2.

Nous examinons ci-après le travail interactif effectivement réalisé en classe après avoir brièvement décrit le contexte et les objectifs de la séance. Celle-ci est donc considérée partiellement comme contenant une phase expérimentale et d'autre part comme une simple séance de cours intégrée à une séquence (la séquence des identités algébriques revisitée), elle-même faisant partie de la progression de l'enseignant en charge de la classe (Terminale S, année scolaire 2014-2015). Ensuite nous examinerons d'autres types de tâches envisageables, tâches que nous n'avons pu expérimenter faute de temps mais qui sont donc examinées sous l'angle de prolongements possibles de nos travaux.

II.1.a. La séance et son contexte

La séance était subdivisée comme suit :

- Phase interactive centrée sur le mot-concept *proof*
- Phase de synthèse et de discussion sur les types de preuves déjà étudiées et celles à venir
- Phase d'étude d'un exemple de preuve algébrique par induction
- Phase d'utilisation de l'identité dans la le cadre de résolution de problème

La première et la dernière phase sont celles qui ont une dimension expérimentale. Nous étudions la première en détail au paragraphe suivant.

[183] Séquence réalisée en 2014-2015

La deuxième phase est un moment de mise au point sur les preuves déjà étudiées et notamment la preuve visuelle concernant la somme des entiers consécutifs impairs. Elle a été traitée de manière similaire à celle réalisée en 2012 et est basée sur la notion de Gnomon (voir chapitre 6).
L'enseignant annonce à cette occasion le travail à venir ; ce dernier portera sur la comparaison entre divers types de preuves pour une même propriété. Il concerne le paragraphe II.2 du présent chapitre. La suite de la séquence est elle-même évoquée et concerne l'utilisation de l'identité elle-même en résolution de problème. Ce point sera examiné en détail au paragraphe II.3.
La troisième phase porte sur la démonstration par récurrence de la propriété mentionnée plus haut. L'enseignant donne le lexique requis (*initialization*, *inductive step*[184], *assuming that…*, *denote the property by…*, etc…) et rappelle le principe de démonstration par récurrence (*proof by induction*) puis les élèves démontrent la propriété. Un élève présente la preuve (en L2) au tableau.
La dernière phase s'appuie sur l'utilisation d'un document distribué aux élèves et qui donnera lieu à un travail de réinvestissement, dans un contexte similaire, à faire à la maison. Le document fait partie de ceux examinés au paragraphe II.3.

II.1.b. Travail interactif à focalisation sémantique

- Déroulement et description de quelques interactions

L'enseignant commence par annoncer le contenu de la séance :

P Today we are going to say a few words about the notion of proof. We'll start by investigating the meaning of this word. Then, we'll examine the case of the visual proofs and specially the one you did by using gnomons. You remember that, don't you?
We'll examine the relationship between this proof and the corresponding proof by induction, "demonstration par recurrence" in French. We'll perform this proof so as to get you acquire the appropriate vocabulary in the perspective of your final exam.
You surely remember you have an exam, don't you.
The last part of the lesson is dedicated to the solving of a particular problem based on the use of the algebraic identity.
By the way, what was this identity? Do you remember? Can you remind me of this property?

E1 The sum of consecutive numbers is equal to $\frac{n(n+1)}{2}$.

P Not this equality. But the one we established by using gnomons.

E1 The sum of consecutive, euh,

P Odd numbers.

E2 The sum of consecutive odd numbers is equal to a square number.

P We have to be more precise. The sum of consecutive **integers**. Ok?
So, I suggest, as I said, that we now closely examine the meaning of one word that is essential in math practice.

[184] Hérédité (en L1)

This word, the word I have in mind, that is, the word I think of, is the word *proof*. It's not just a word. It's also a notion, an idea of something which has a meaning. But it's closely related to other words in your mind.

I can say it shares something, some part of its meaning, with other words.

So, let me start like this (P écrit au tableau)

Here is the word *proof*.

P divise le tableau par un simple trait. A gauche se trouve *the word proof*. Entre les deux parties, sous le trait, P écrit : « *has something to do with* »

P reformule aussitôt et écrit au même niveau mais en-dessous : « *is closely related to* »

Et encore dessous : « *shares a part of its meaning with* »

P What I expect from you is to give me not only synonyms of the word but words that are closely related to, that is, closely connected to the notion of *proof*.

So, what do you suggest?

E2 Waterproof !

P est surpris et réagit aussitôt précisant la consigne.

P The words I want you to suggest must have something to do with the **notion** of *proof*. We'll go back later to the word *waterproof* which surely has a relationship, a lexical relationship, with the word *proof*. It's not related in the way I want you to consider the connection. Nevertheless it's interesting. And surprising, I mean, I didn't expect it at all!

Other suggestions?

E3 Propriety.

P You surely mean **property** ! No matter, it's very good !

P écrit ensuite chacun des mots, au fur et à mesure que les élèves font des propositions.

We make proofs by using properties, or … ?

E3 Theorems

P Of course.

What else?

E1 Highlighting

P Very interesting, indeed.

Certains élèves ne semblent pas connaître ou reconnaître ce mot.

We make proofs also to get certain things clear, that is, to clarify or to …

E4 Explain.

P Indeed. Or show.

By the way, we chose to start with a noun. Actually, **I** did choose to start with a noun. The noun *proof*. I could have started with the **verb** *prove* or with the gerund, that is, *proving*.

So, we consider, or we accept either nouns or verbs or gerunds, right?

So, I write down *explanation* and *show*. And *clarification* as well.

E5 Reality.

Very good ! This is really surprising because I didn't expect you to suggest this word by yourself.

Namely, we prove things that are considered to be real. It's not real in the same way as when we say that a picture we see is real, of course. Nevertheless, we made a proof based on pictures, a proof we called visual. So I understand why you have suggested the word *reality*.

So, yes, we can add this word.

Besides, I'd like you to notice that when we use the word property, it means something that is owned, that is possessed by an object. For instance, a property of a square number is to be positive or zero. We talk about it as if it were something real. A real characteristic. So *real* is a good choice. A good suggestion.

In the same line of thought, beside *real*, we could say… Or suggest…

E6 True

P Of course ! Let me write down *truth*.

Indeed, we make proofs of properties that we consider true. Completely true.

We must be totally sure of the fact that what we prove is true.

By the way, how can we guaranty that a proof is satisfying, correct?

E7 We have to justify.

P Good. So I can add *justification.* And a synonym.

Let me add legitimization. Or legitimation? Sorry, I'm not 100 percent sure.

I guess it's legitimization, or legitimizing. I'll check in a few minutes.

Let's examine the words that are already on the board.

I think one important word seems to be missing. When we carry out a proof, how do we think of it?

In what way do we reason while establishing a proof?

E4 It must be logic !

P You mean *it must be logical*. Or you mean, *the missing word must be the noun* logic? Anyway, we can add the noun *logic*. I started with a noun so I keep on writing nouns. Preferably.

Logic is what characterizes a proof. The corresponding facts must be established according to logic.

Let's recall the proof based on the use of gnomons. It was visual. What did really matter on this occasion?

This is what matters most means *c'est ce qui compte le plus*.

What was important? Was it really logic? Was logic what mattered most?

In order to say that it is a proof, a visual proof, it has to be…

Personne ne voit où le professeur veut en venir.

P It has to be convincing. What do you think?

Les élèves acquiescent.

P So, I can add *convincingness*. It doesn't mean the same as *conviction*.

Namely, *we can act with conviction*. But a proof appears as *convincing*. Or must hopefully appears as such. So, we talk about the convincingness of a proof.

As for now, we'll stop there though it's clear we could add some extra words[185]. Anyway, I hope this could help you get a good representation around the word *proof.* The purpose was namely to help you have a global and clear view of the two kinds of proofs that can be used to prove the property of consecutive odd numbers. The visual proof was based on real facts, of things you directly perceive as true and that are thus convincing. We are now going to perform the proof by induction which, in this case, is based on logic. This kind of proof is divided into three parts…

Le professeur enchaîne ensuite par la démonstration par récurrence (phase 2).

- Analyse de la phase interactive

Comme on a pu le constater, P engage les élèves dans l'explicitation de mots connectés au mot-concept *proof*. Il s'appuie sur les éléments existants au niveau de la représentation cognitive de chacun des élèves. Ils les incitent à proposer ce qui leur vient à l'esprit et souhaite ainsi élargir de façon institutionnelle la représentation autour de ce mot. Son but est

[185] Ces mots supplémentaires sont par exemples : agreement, argumentation, validation, rule, convention, step, phase, structure, etc…

clairement de faire dire ou d'expliciter lui-même certains termes et ainsi de compléter les représentations existantes par des éléments représentationnels lexicaux mais aussi sémantiques.
Les élèves font très vite des propositions. Une forte dynamique s'installe. A chaque fois, le professeur en profite pour glisser des commentaires.
On notera la présence de commentaires métalinguistiques, notamment en ce qui concerne le type de mots à retenir du point de vue grammatical : noms, verbes, ou gérondifs.
Quand un des élèves propose « *it must be* ***logic*** », l'interprétation par l'enseignant prend en charge l'ambiguïté de la réponse. Est-ce qu'il faut ajouter *logique* dans le sens où *logique* est le terme manquant ou doit-il considérer que le pronom *it* reprend *the way* ou encore *the reasoning* et dans ce cas il est clair que l'élève aurait dû dire *it* [*the reasoning*] *must be logical*.

II.1.c. Prolongements : autres tâches sémantiques, autres discours

La phase que nous venons d'étudier participe d'une séance pour laquelle nous avons donné la structure (II.1.a.). Le travail effectué, à focalisation spécifiquement sémantique, n'est pas le seul possible de ce type. Il est en effet possible de consolider et même d'enrichir les représentations en proposant par exemple un autre type de tâche : on peut demander aux élèves d'articuler, par une ou plusieurs phrases, quelques-uns des mots-concepts qui ont été énumérés et retenus. La consigne serait par exemple : *combine the following words through a meaningful sentence*. Ainsi, les mots, ou couples de mots, *true/truth*, *prove/proof*, *proprerty* peuvent être combinés sous la forme : *a proof aims at showing that a given property is true* (à completer éventuellement par : *under some conditions called hypotheses*). Ou encore : *the purpose of a proof is to explain why a property is true; a proprerty is considered as true provided that you have priorly proven it,* etc…
Il est aussi possible d'examiner et de représenter un schéma général de preuve. Les commentaires accompagnant ce schéma reprendraient la plupart des mots précédemment listés lors de la phase interactive que nous venons d'étudier. Ils porteraient sur des points de nature méthodologique, avec le but d'expliciter le découpage en étapes, le recours à la logique et la nécessité de légitimer les conditions d'utilisation de telle ou telle propriété mobilisée localement, pour une étape donnée. Le vocabulaire nécessaire à ce type de description est un vocabulaire que nous qualifions de conceptuel :

> *A proof is divided into steps.*
> *Each step is carried out by applying one or several properties.*
> *The conditions of use of each property have to be verified and this point must be made clear.*
> *Performing a proof goes along with performing a reasoning.*
> *This reasoning remains in accordance with natural logic, etc…*

II.2. Parallèle entre preuve schématique et démonstration par récurrence

II.2.a. Objectifs

L'activité a pour objectif de consolider une connaissance spécifique. Cette connaissance consiste à conceptualiser le fait que des actions dans deux registres séparés peuvent être mis en correspondance de manière très étroite. Les descriptions d'actions doivent apparaître comme reposant sur une phraséologie similaire. Le registre visuel exige une précision supplémentaire quant aux descriptions car celle-ci est dépendante du choix des objets (en l'occurrence, des carrés-unités et leurs divers assemblages).

La connaissance impliquant des actions dans des registres séparés relève d'un processus synthétique et analytique à la fois. L'approche antérieure du parallèle entre preuve schématique et démonstration par récurrence a déjà fait l'objet d'une sensibilisation à ce point. A ce stade, les élèves ont effectué une démonstration par récurrence standard, en L2, de l'identité $1+3+ \ldots + (2n-1)= n^2$ et établi cette propriété en phase adidactique sous la forme d'une preuve visuelle. Le parallèle entre les deux types de preuve n'a pas encore été établi de manière explicite. De manière plus précise, on peut dire que ce parallèle est pré-conceptualisé et relève encore davantage d'une pensée sans verbalisation basée sur une perception active de faits figuraux et sur des actions évoquées portant sur des écritures formelles. Le but de l'activité est de conduire les élèves à une perception globalisante de ce parallèle dans la mesure où elle implique globalement un rapport entre l'agencement d'objets physiques schématisés et des écritures algébriques, mais aussi de les amener à expliciter les actions dans les deux registres en les mettant en correspondance termes à termes. La connaissance est ici visée en tant que capacité à expliciter des faits situés dans des registres séparés et permettre ainsi une montée à un niveau plus élevé de conceptualisation. Les faits impliqués relèvent également d'une actualisation du processus d'abstraction et d'une double expérience de la nécessité. Nous avions déjà abordé cette question (cf chapitre 7, III.5.) à l'occasion de la *Situation des Nombres Triangulaires*.

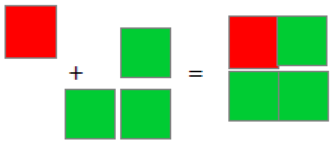
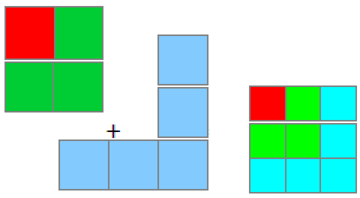
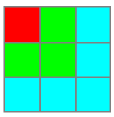
II.2.b. Analyse du document

L'activité repose sur un document à compléter. Le thème est celui de la mise en correspondance entre les étapes, les actions et les éléments mobilisés (figures et expressions algébriques) lors de l'établissement de deux types de preuve.

- Phase correspondant au niveau générique de chacun des deux types de preuve.

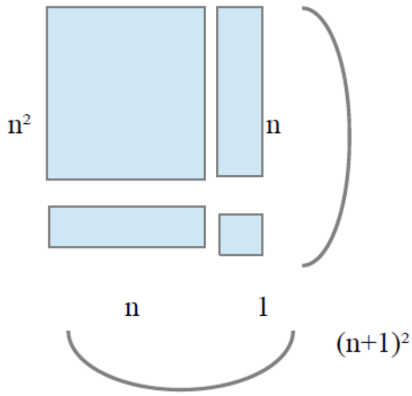
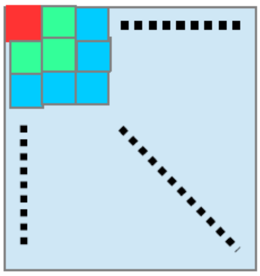
Comme on peut le voir aisément dans la figure ci-dessous[186], le gnomon lui-même est mis en correspondance mais aussi analysé et donc décomposé.

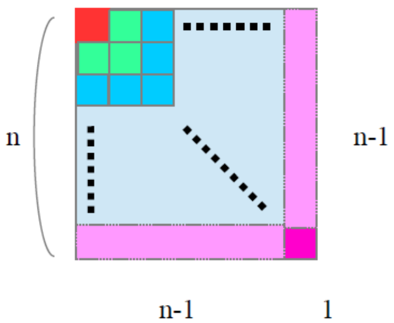
[186] Les termes manquants sont les suivants (par ligne et de haut en bas) : unit square / unit ; gnomon / odd ; square of side 3 / the square number ; square of side 3 / sum.

schematic / visual elements	intermediate		algebraic transcription
	an object a ……….	a number a ……….	1
	particular configurations		
	Adding the ………. (2+1) to the unit-square yields the square of side 2	Adding the …….. number 3 to 1 yields the square number 2^2	$1 + 3 = 2^2$
	Adding the gnomon (2x2+1) to the square of side 2 yields the ……… ………3.	Adding the odd number 5 to 2^2 yields ………… ………….3^2	$2^2 +5 = 3^2$
	consequence: the square ………. …….is made up of 3 gnomons: (2x0 +1), (2x1+1) and (2x2+1) (the first gnomon is the same as the unit-square, i.e. 1)	consequence: the square number 3^2 is the …….. of the consecutive odd numbers 1, 3 and 5	$1 + 3 +5 = 3^2$

- Phase de mise en correspondance des preuves

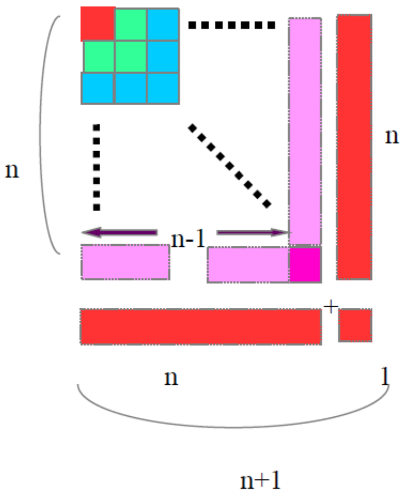
La généralisation qui, dans les situations antérieures, relevait d'une expérience faisant suite à une phase générique est ici intégrée à une présentation pour laquelle la structure de démonstration par récurrence est prédominante. Ce sont les étapes de ce schéma de preuve standard qui sont mises en correspondance étroite. Les concepts d'extension et d'hérédité schématique sont ici mobilisés et explicités (*schematic induction*).
On remarquera que chacun des arguments utilisés est ici examiné en détail. La première ligne ne mobilise que l'identité remarquable. La deuxième ligne du tableau ci-dessous a pour but de faire remarquer que la somme d'entiers impairs consécutifs est un carré mais sans faire intervenir le dernier terme de la somme, que ce soit au niveau algébrique ou au niveau schématique. La troisième ligne quant à elle fait intervenir le dernier terme de la somme, ce qui revient à intégrer le dernier gnomon au grand carré.
Par ailleurs, et c'est valable aussi pour l'ensemble de l'activité, le lexique qui a été introduit antérieurement pour la démonstration par récurrence elle-même, est ici réinvesti.

	properties		
	physical	algebraic	
	Visual identity Adding a ……… to a square (of side n) yields the next ………	Algebraic identity (squares of integers) “(n+1) squared is equal to ……….. plus the ……… product plus …..	$(n + 1)^2 = n^2 + 2n+1$
	The sum of ………….. gnomons is a square	The sum of consecutive …… numbers is a square number	$1 + 3 + 5 + \ldots = (\ \ )^2$

	More precision		
	The last …….. is recognizable : its value is (2n-1)	The last …… in the sum is no longer implicit : (2n-1)	$1+3+ \ldots + (2n-1) = n^2$
	Surprisingly, it's almost more difficult to guess that the last term in the sum is (2n-1) (right column) than to notice that the …. inner gnomon is 2n-1 (left column)		

- Condensation

La dernière phase s’appuie sur un schéma condensé. Tous les éléments présentés dans les phases précédentes apparaissent sur un seul schéma.

Schematic proof / visual proof	Schematic induction	Comments	Proof by induction
	1) start by looking at the ……….. corner we observe that the first squares are made up of gnomons	the first step is a matter of …….. the property with the first value(s) of n or along the main diagonal, starting at the top left corner	1) initialization With n =1: 1 is simultaneously the first odd …….. and a square (1^2) Or with n = 2 : 1+3 is a square (2^2)
	2) By …….. the gnomon of value 2n+1 to the …… with side n we get the next square (i.e. the square with side n+1)	By adding a gnomon, or by adding 2n+1, we get the next physical ……. (left column) or the next square number (right column)	2) ……. step Assuming that, for some …….. n, the following …….. holds : $1+3+\ldots+(2n-1)= n^2$ and ……. the identity : $n^2 + 2n +1 = (n+1)^2$ we get : $1+3+\ldots+(2n+1)= (n+1)^2$
	3) Conclusion : A square is made up of consecutive gnomons	the conclusion is standard	3) conclusion : the sum of ……….. …….. numbers is always a square number

- Conclusion

La tâche spécifique de l’activité, à savoir, le fait de compléter les passages à trous, n’a pas posé de difficultés majeures pour les élèves. Après un temps limité laissé à ces derniers, une phase interactive a permis de contrôler la justesse des propositions de formulation quant aux expressions manquantes.

II.3. Dimension-outil des identités algébriques

Nous examinons dans ce qui suit une situation constituée de deux phases distinctes :

a) étude en classe d’une situation de recherche où une identité algébrique intervient comme outil de résolution

b) travail à la maison consistant en un réinvestissement à partir d’une activité similaire ainsi qu’à un approfondissement de l’objet Gnomon

La situation a été réalisée en 2015 avec des Terminales S.

Le but est d’établir un lien entre un pattern constitué d’une succession de lettres et un déplacement algorithmique sur une grille (dans un repère, pour des points à coordonnées entières). Les identités que nous avons déjà rencontrées et qui concernent la somme des entiers consécutifs ou la somme des entiers impairs consécutifs seront mobilisées à tour de rôle. Dans un premier temps, la somme des entiers impairs consécutifs est utilisée dans la séance en classe. Elle permet, de par son expression au carré, d'établir un lien avec la parabole de référence (d'équation $y=x^2$). La deuxième identité conduit à une parabole nécessitant plus de travail. C'est l'objet du travail à la maison.

II.3.a. Identité, pattern et parabole

L'activité en classe repose sur un document écrit distribué aux élèves et sur une présentation Powerpoint incluant des figures réalisées avec Geogebra.
Le déroulement est le suivant :

- présentation interactive des enjeux de la séance
- distribution du document écrit (voir Annexes)
- temps de réflexion laissé aux élèves pour répondre, par groupes de deux, aux premières questions de la partie I (questions 1 à 3)
- synthèse provisoire des premières questions
- temps supplémentaire pour répondre à la question 4
- nouveau bilan intermédiaire
- temps supplémentaire pour entamer la partie II (proposer un algorithme en langage naturel)
- synthèse en classe au début du cours suivant
- distribution d'un sujet de travail à la maison (homework figurant en Annexes) basé sur une situation analogue mais aussi, en première partie, sur les gnomons (réinvestissement et approfondissement)

La première partie débute par l'analyse d'un pattern constitué d'une succession de lettres (des R et des U). Le but est clairement de s'approprier la règle constitutive de ce pattern:

> Here is a logical pattern whose rule is to be conjectured:
>
> R U
>
> R U R U U U
>
> R U R U U U R U U U U U ....

1) Can you determine the next pattern ?

La suite du document contient ensuite une description de l'interprétation du pattern en termes de déplacements horizontaux ou verticaux :

> We now consider a path along a coordinate grid so that R stands for *a Shift of 1 unit to the Right* (Right Shift) and that U stands for *a Shift of 1 unit Up* (Upward Shift).
>
> The point attained after a succession of one R and some number of U's is denoted by A_i .
>
> The next point, attained from A_i after *a Shift of 1 unit to the Right* is denoted by B_i
>
> The point A_0 coincides with the origin O of the axes.
>
> Hence, the summarization of the succession of shifts in the following table:

Points attained after a succession of unit-Shifts (R or UUU…U)								
Shift		R	U	R	U U U	R	U U U U U	
Point	O = A_0	B_0	A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	

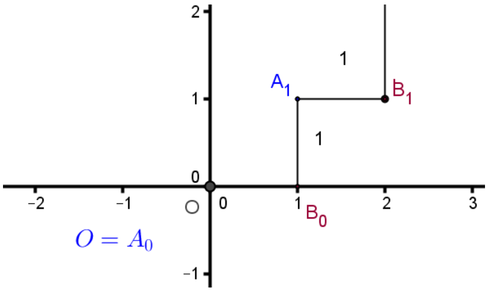
The next picture (taken from the previous table) shows that, starting at A_1, if we shift *1 unit to the Right* we reach B_1

U	R
A_1	B_1

Les questions 2 et 3 ont pour but d'établir explicitement le lien entre les déplacements successifs, liés au pattern initial, et à l'appartenance des points A_i à une parabole dont l'équation est à conjecturer :

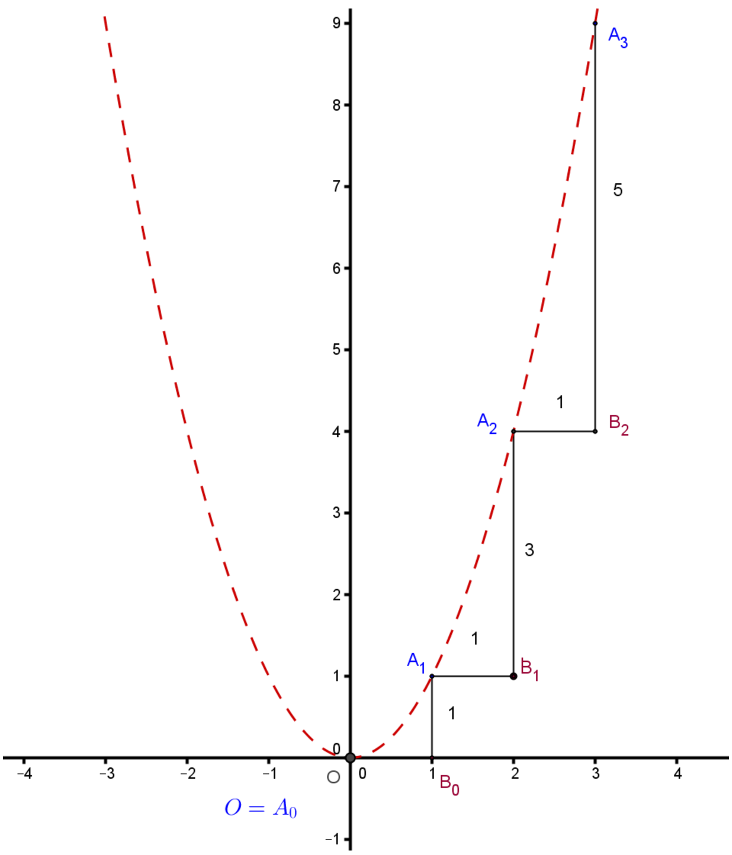
1) Plot points A_i and B_i on the coordinate grid for i = 1 to 3.

The picture opposite represents the first points:
O , B_0, A_1 and B_1



The points A_i seem to lie on a well-known curve.

2) Do you recognize this curve? Justify your answer and give an equation of the curve.



La question 4 porte sur les points B_i. Il est facile de constater que ces points vont se trouver sur une parabole obtenue par translation à partir de la première. La conjecture de l'équation est laissée à la charge des élèves. La justification nécessite de la part des élèves qu'ils déterminent l'expression des coordonnées des points B_i en fonction de leur indice *i*.

4) What do you think as to the location of points B_i ?

Justify.

Il est attendu que les élèves répondent plus ou moins facilement aux questions de la partie I. Les phases de synthèse intermédiaires, interactives, doivent permettre de valider les résultats obtenus ou de permettre aux élèves se raccrocher à la suite de l'activité en cas de difficultés. Les difficultés, comme on a pu le constater assez aisément, sont progressives. Le lexique mobilisé fait partie du répertoire de la classe. Les supports visuels permettent des moyens de contrôle des conjectures au niveau graphique. Les changements de registre donnent du sens aux identités en leur conférant une dimension-outil. Cet aspect est entièrement nouveau pour les élèves.

II.3.b. Réinvestissement (homework)

Le sujet figure en annexe. Il est divisé en deux parties. La première porte sur les gnomons et la deuxième est un prolongement de l'activité en classe que nous avons analysée ci-dessus.
Le sujet a été distribué avant les vacances de Noël, ce qui laisse aux élèves suffisamment de temps pour s'y consacrer. Les élèves doivent envoyer leur travail par mail.
Nous ne présentons ci-après qu'une analyse a priori très restreinte de ce travail dans la mesure où le document, d'une part, est suffisamment explicite et d'autre part, prolonge l'activité que nous avons déjà analysée.
La première partie est un travail spécifique sur les gnomons. Le but est clairement d'approfondir cette notion :

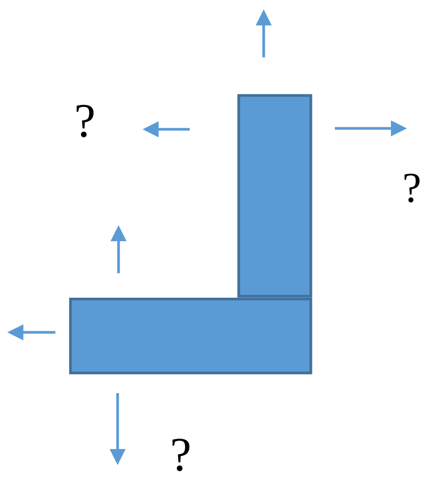
A Gnomon is a kind of arrangement of a certain amount of objects according to a specific shape. (so far, we have only met L-shaped gnomons).

(a physical Gnomon is made up of real, physical objects: balls, cubes, etc…)

A physical Gnomon can be symbolized on a diagram by an arrangement of unit-squares.

(in this case we get a schematized Gnomon)

As an arrangement, a Gnomon has a shape and can be enlarged or reduced. This enlargement can be performed according to a rule.
The length and/or the width can be enlarged. The order in which we add unit-squares to get the new Gnomon doesn't really matter.



La suite du texte repose sur une approche résolument sémantique. Les éléments constitutifs du mot-concept *gnomon* sont clairement identifiés (*shape*, *value*, *arrangement*, *rule*) :

As a number of objects, arranged according to a particular shape, a Gnomon has a specific value. This value can be increased according to a rule. (the first gnomon you encountered was L-shaped and its value was 2*n*-1, expressed in terms of the rank *n* of the design).

(This rule consists in determining how many new objects are added and in the way of counting these objects)

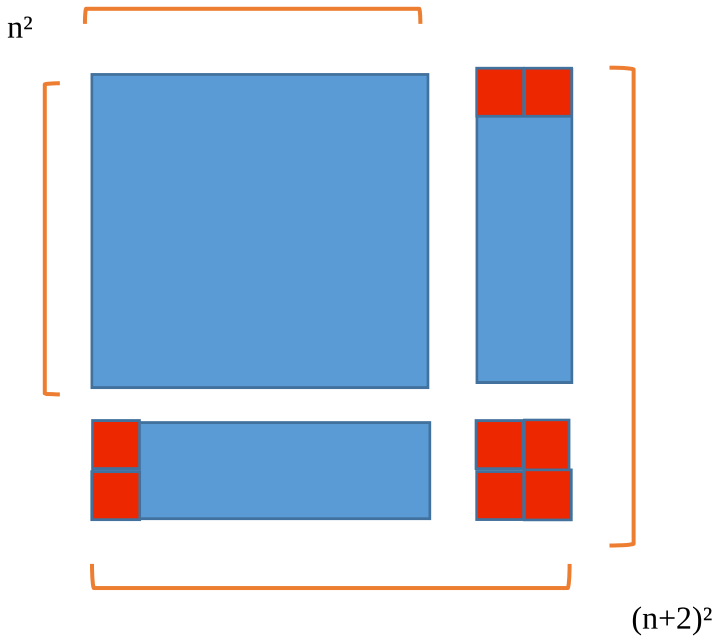
To sum up:

- A Gnomon has a specific shape.
- A Gnomon is a particular arrangement of physical or symbolized objects.
- A Gnomon has a numerical value which is the number of objects.
- A Gnomon can be enlarged by fallowing a rule.

Le contenu relatif à la suite du document entretient un lien étroit avec les connaissances impliquant un parallèle entre écriture schématique et écriture algébrique. Elles ont déjà fait l'objet d'un travail avec ces élèves (voir II.2.). Ils y ont été sensibilisés antérieurement et doivent ici s'engager dans une démarche d'explicitation du parallèle entre deux types de preuves : visuelle d'une part et algébrique d'autre part.

Nous nous contentons de citer la situation initiale, telle qu'elle est formulée dans le document (voir annexes), sans examiner le cas général :

The next diagram shows a larger Gnomon and establishes a visual, schematic relationship between n^2 and $(n+2)^2$.



1) Closely examine this diagram and put it into algebraic terms.
   (establish an algebraic transcription)
   There are several different ways of counting the numbers of objects in the arrangement of the Gnomon.

La deuxième partie porte sur un pattern similaire à celui étudié au II.3.a :

R U

R U R U U

R U R U U R U U U ………

Signalons que la fin de l'activité se distingue de celle de l'activité faite en classe par une demande explicite de mise en forme canonique de l'équation de la parabole concernée :

4) Determine the coordinates $(\alpha;\beta)$ of the vertex of the parabola

and write the equation in vertex form (that is, in canonical form: $y = a\,(x - \alpha)^2 + \beta$).

Compte tenu du travail réalisé antérieurement avec les élèves, il est légitime de s'attendre à des productions de qualités et des réponses riches de la part de ces derniers, que ce soit du point de vue du contenu mathématique mais aussi du point de vue du répertoire lexical et phraséologique mobilisé.

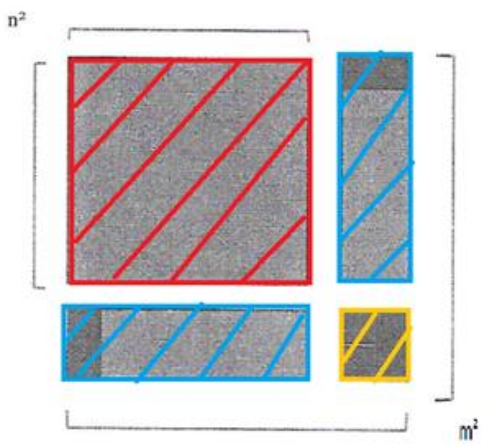
II.3.c. Analyse a posteriori et productions d'élèves

L'activité en classe s'est déroulée comme prévu, avec une bonne réactivité de la part des élèves lors des phases de synthèse intermédiaires. Le travail à la maison a été effectué avec beaucoup de soin, ce qui témoigne de la motivation suscitée par le type de travail proposé, à savoir, un approfondissement et réinvestissement sur le thème des patterns et des identités algébriques, l'ensemble selon une démarche requérant un changement de registre.
Afin d'étayer notre propos, nous examinons ci-dessous quelques productions d'élèves.

- Partie I) questions 1) et 2)

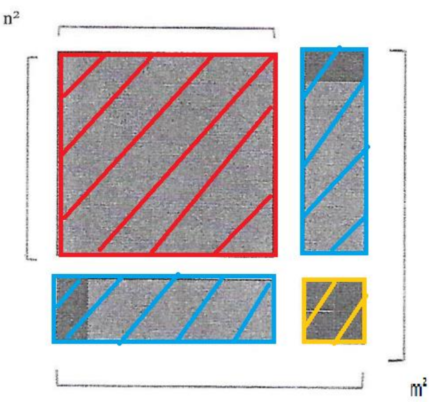
— Production de l'élève E1 :

1)



$(n + 2)^2 = n^2 + 2\,(2 \times n) + 2^2$

2)



$m = n + (m-n)$

$m^2 = n^2 + 2(n \times (m-n)) + (m-n)^2$

We recognize the form $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ where $a = n$ and $b = m-n$

Comme on peut le constater (voir ci-dessus), le parallèle entre preuve visuelle et identité remarquable (considéré par l'élève E1 comme ayant déjà été établie) repose sur un code de couleur implicite.

— Production de l'élève E2 :

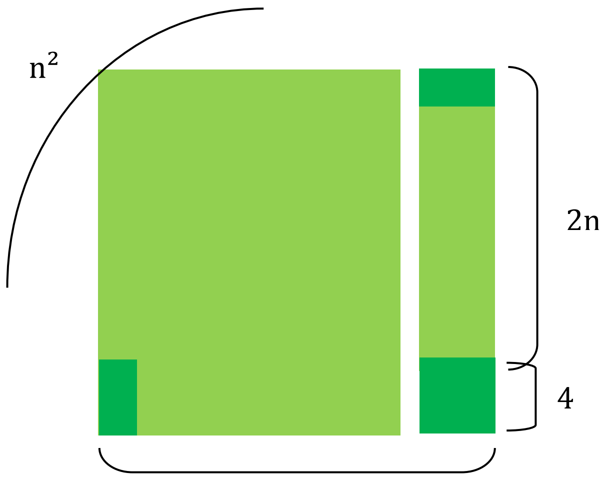
La production de l'élève E2 est visible en totalité en annexe (Annexe 5). Elle témoigne du fait que cette élève a bien saisi l'invitation de l'enseignant à accompagner la démarche de résolution d'un maximum de commentaires en langue naturelle, et en L2. Ceci relève d'une conception particulière de l'enseignement de la DNL, conception régulièrement mise en relief par l'enseignant et selon laquelle la langue et les commentaires langagiers ont une place prépondérante. C'est en ce sens que nous pouvons légitimement affirmer que cette élève en a saisi l'esprit.

On notera l'originalité de la réponse proposée pour la première question (voir extrait ci-dessous). L'élève, comme on peut le constater, cherche à distinguer l'objet en tant que figure géométrique (*In terms of type of objects*) de la grandeur numérique associée, c'est-à-dire ici l'aire (*In terms of areas of objects*). Sa démarche témoigne d'une volonté de distinguer les manipulations physiques sur des objets physiques des calculs opérés dans le registre algébrique.

Dans le premier cas, l'identité s'obtient par simple rapport aux objets de la figure, les grandeurs attachées n'étant pas elles-mêmes obtenues individuellement de manière procédurale. L'objet semble ici correspondre au nombre d'éléments-unités qui le constituent (qu'il s'agisse d'un carré ou des rectangles constituant le gnomon).

Dans le second cas, le raisonnement en termes d'aires semble être celui qui prend en compte l'analyse (cette fois, à caractère procédural) de chacun des constituants physiques (voir ci-dessous).

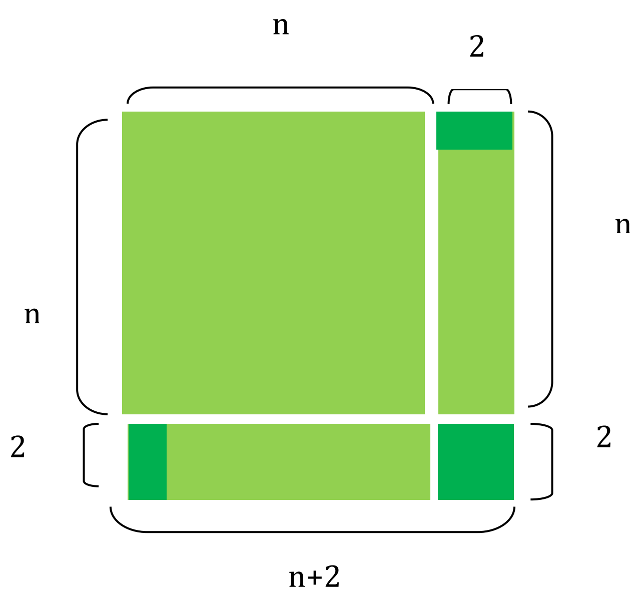
- <u>In terms of type of objects :</u>



First, we can expand the algebraic identity in terms of name of objects that is that the big light green square is "named" n^2, the two rectangles are "called" 2n and the small dark green square is 4. By adding the objects, we get:

$n^2 + 2 \times 2n + 4 = n^2 + 4n + 4 = \boxed{(n+2)^2}$

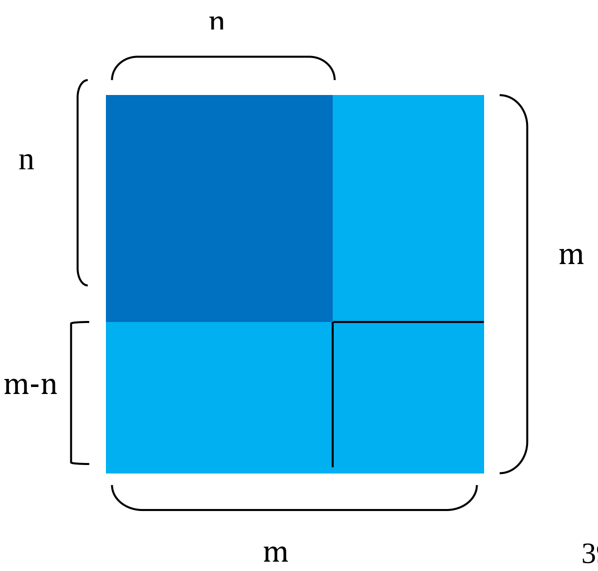
- <u>In terms of areas of objects:</u>



We can also see the algebraic identity in terms of area of the objects. That's why we consider that the small dark green square is composed of 4 unit squares. This way, its side is 2, the length of the two rectangles is n and its width is 2, and the side of the big light green square is n. By expressing and calculating the areas, we get:

$n \times n + 2(2 \times n) + 2 \times 2 = n^2 + 4n + 4 = \boxed{(n+2)^2}$

2)



We based our examination on our precious answer. Indeed, the big light blue square has been obtained by adding the small dark blue one and a L-shaped gnomon which is composed of two rectangles and a square. This way, the side of the small light blue square is m-n, the length of the two rectangles is n and its width is m-n, and the side of the dark blue square is n. By expressing and calculating the areas, we get:

$n^2 + 2 \times [n(m-n)] + (m-n)^2 = n^2 + 2(nm-n^2) + m^2 - 2mn + n^2 = 2n^2 - 2n^2 + 2mn - 2mn + m^2 = \boxed{m^2}$

L'élève E2 (voir ci-dessus) n'a pas jugé utile de justifier l'appartenance des points A_i à une même parabole.

L'élève E3, en revanche, propose une réponse intéressante (question 2) à cet égard :

> We can determine ***a sort of two sequences***[187] of numbers named a_i and b_i
>
> $a_i = 0 + 1 + 2 + \ldots + i = i(i+1)/2$
>
> $b_i = i$
>
> So, we can deduce the coordinates of a point A_i : A_i (b_i ; a_i) <=> A_i (i ; i(i+1)/2)
>
> Hence, the points A_i form a sort of parabola whose equation is <u>y = x(x+1)/2</u> or <u>y = 0,5x² + 0,5x</u>

En ce qui concerne la partie II, l'élève E2 propose une réponse très satisfaisante aux questions 3 et 4 :

2) The curve is a parabola, so its equation is in the form $y = ax^2 + bx + c$. The y-value of point A_0 (0;0) is the y-intercept of the parabola so c = 0. Using the coordinates of point A_1 (1;1), and A_2 (2;4), we get the following system:

$$\begin{cases} 1= a + b + c \\ 3= 4a + 2b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a= 1 - b \\ 3= 4(1 - b) + 2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 - b \\ 3=4 - 4b + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a= 1 - b \\ -2b = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a= 1 - b \\ b= \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a= \frac{1}{2} \\ b= \frac{1}{2} \end{cases}$$

The equation of the parabola is $f(x)\colon y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

3) We determine the coordinates $(\alpha\,; \beta\,)$ of the vertex V of the parabola:

We know that for all parabolas $\alpha = \frac{-b}{2a}$ thanks to the derivative of the equation, thus:

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{1}{2}}{2\times\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$ and $\beta = f(\alpha) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$

Then, with point V $\left(-\frac{1}{2}\,;\,-\frac{1}{8}\right)$ and the vertex form $y = a\,(x - \alpha\,)^2 + \beta$ we get:

$$y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8}$$

[187] L'élève a une formulation maladroite ou familière pour manifester le caractère interprétatif de sa démarche. On attendrait ici par exemple […] *determine in some way two sequences.*

III. Élaboration d’un document-ressource sur la base d’un travail collaboratif avec les élèves

III.1. Nature de l’activité et objectifs visés

En 2014-2015, nous avons souhaité poursuivre le travail en engageant les élèves dans une recherche lexicale et phraséologique puis en proposant un document-ressource synthétique à partir de leurs productions.
Le travail en classe a été effectué par groupes de deux et s’est prolongé à la maison. Les élèves ont envoyé par mail leurs productions, le travail ayant également été réalisé par groupes de deux.
La consigne qui a été explicitement donnée était de distinguer les termes relevant spécifiquement du registre mathématique de termes qui n’en relèvent pas mais aussi de termes mixtes (c’est-à-dire situés à la frontière entre les deux), selon des modalités soit laissées à l’initiative des élèves, soit suggérées : présentation avec un code, utilisation d’abréviations, recours à un code de couleurs, séparation en trois parties distinctes, etc…Les mots retenus sont les suivants : *difference, sum, product, quotient*. Ils sont envisagés à la fois comme termes centraux des recherches et du document de synthèse mais aussi comme des noyaux durs de représentations cognitives chez les élèves.
Le document de ressource se divise en six parties :

- partie I : registre lexical mathématique
- partie II : lexique et connaissances mathématiques associées
- partie III : considérations sur le sens des mots
- partie IV : les mots hors du champ strict des mathématiques
  (words and phrases related to *difference, product, sum and quotient* in non-mathematical fields)
- partie V : compléments
- partie VI : en partant des mots en français : du français vers l’anglais

Le document a ainsi été élaboré par l’enseignant avec la volonté de distinguer, ou de se focaliser sur, les points suivants :

- réaliser un travail collaboratif entre professeur et élèves
- s’appuyer sur la dialectique Concept Quotidien – Concept Scientifique pour l’enracinement en mémoire du nouveau lexique
- créer ou renforcer les noyaux durs centrés sur les mots-concepts en présentant le lexique sous forme d’îlots lexicaux-sémantiques pour mieux se rattacher aux représentations mentales existantes (en mémoire)
- équilibrer les mots connus (appréciation subjective du répertoire) et les mots nouveaux
- centration sur la reformulation, pour éclairer et cerner les significations, avec ou sans explicitation de micro-contextes, et pour permettre une appropriation rapide
- envisager le document comme une occasion de se rattacher aux connaissances anciennes et donc lui conférer une dimension de consolidation en plus de celle d’élargissement

En résumé : le document ne se réduit pas à une simple liste de mots nouveaux ni à un extrait de lexique en provenance d’une source de type ressource en ligne par exemple et pour lequel les élèves auraient à filtrer par eux-mêmes les éléments lexicaux importants pour une séquence en cours.

III.2. Etude du document

Le document faisant une douzaine de pages, il n'est pas raisonnable de le présenter dans sa totalité en annexe. Nous nous contenterons d'en examiner ici-même certains passages afin de mettre en relief les points évoqués au paragraphe précédent.
Le document proprement dit est précédé de remarques importantes à destination des élèves :

> *Ce lexique regroupe quelques termes essentiels pour une bonne compréhension des énoncés en anglais et faciliter la production orale en situation de résolution d'un problème mathématique.*
> *Il est centré autour des mots anglais suivants : difference, sum, product, quotient.*
> *Nous en profitons pour parler du sens de ces mots et de ceux qui sont proches.*
> *Nous en profitons également pour le rattacher à des connaissances mathématiques fondamentales : moyenne (mean), fonction affine (linear function), coefficient directeur (gradient), etc…*
> *Le lexique est ensuite élargi à des domaines, des contextes extérieurs aux mathématiques, de manière à lui conférer une plus grande utilité mais aussi à faciliter sa mémorisation en éclairant davantage le sens des mots et expressions.*
> *En général, nous partirons des noms, puis irons vers les verbes et les expressions (locutions)*
> *Tantôt, nous irons des mots en anglais vers le français, tantôt nous procéderons de manière inverse.*

- Partie I

Elle se subdivise en quatre paragraphes construits autour des mots *difference*, *sum*, *product,* et *quotient*.

Le premier paragraphe est présenté comme suit :

> - différence
>
> the difference between two quantities : différence ou écart entre deux quantités
> the difference of *a* and *b*, the difference *a*-*b*
> performing a subtraction yields a difference
> (to yield : fournir, donner comme résultat, et donc aussi "produire" / the yield : le rendement)
> to subtract *b* from *a* : soustraire *b* à *a*
> to take away b from a
> $a \neq b$ *a* is not equal to *b* (et non pas : *a* is different from *b*!)
> $\neq$: the non-equal sign (le symbole de différence)
> the standard deviation = écart-type
> the common difference : raison (pour une suite arithmétique) $u_{n+1} - u_n = r$

- Partie II

Elle est subdivisée en plusieurs points :

- la notation / le signe « moins »
- différence en tant que distance
- le symbole désignant une somme

- combining differences and quotients
- transforming products into sums
- transforming sums into products
- combining quotient and sum : the average (or the mean)

A des fins d'illustration, nous présentons le premier point de la rubrique ci-dessus :

- la notation / le signe « moins »

comme différence de deux nombres 7-5=2

comme signe : -8 is a negative number

pour traduire qu'un nombre est l'opposé d'un autre *–a* is the negative (the opposite) of *a*

utilisée entre 2 ensembles : $R^{*} = R - \{0\}$

in this case the minus-sign means « without » (« privé de »)

Les autre points, comme on pouvait s'en douter, sont des opportunités pour réintroduire un lexique important et raviver des connaissances autour de : *gradient, natural logarithm, exponential function, averages*.

- Partie III

Cette partie est spécifiquement focalisée sur le sens des mots. Comme on peut le constater sur l'exemple ci-dessous, nous avons utilisé une formulation à caractère pédagogique, sans recourir explicitement à l'adjectif *sémantique*[188]. Elle est du même type que celle que nous avions employée lors de l'approche sémantique du mot-concept preuve (cf II.1.)

- difference

en français

le mot [différence] partage une partie de son sens avec les mots suivants :

[distinction], [écart], [distance], [soustraction]

[distinguer], [s'écarter de], [être éloigné de], [soustraire],

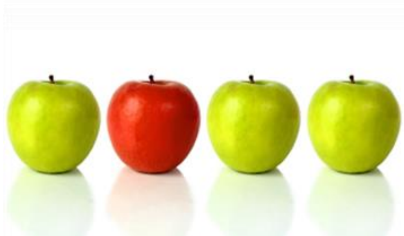
en anglais

le mot [difference] partage une partie de son sens avec les mots suivants :

[distinction], [deviation], [distance], [subtraction]

[distinguish], [deviate], [be distant from], [subtract]

une différence se perçoit :

percevoir une différence : distinguish une différence de taille, de couleur : a difference in size, in colour une diférence de point de vue : a difference in perspective	

[188] Nous aurions pu le faire, malgré tout, compte tenu du niveau de nos élèves.

Des considérations d'ordre cognitif sont également explicitées auprès des élèves, à cette occasion :

- considérations (cognitives) sur la manière d'appréhender le sens des mots

interpretation according to the idea of considering things in a rather *static* or *dynamic* way:

rather static ⟵⟶ rather dynamic

result	operation
difference	subtraction
sum	addition
product	multiplication
quotient	division
solution	solving

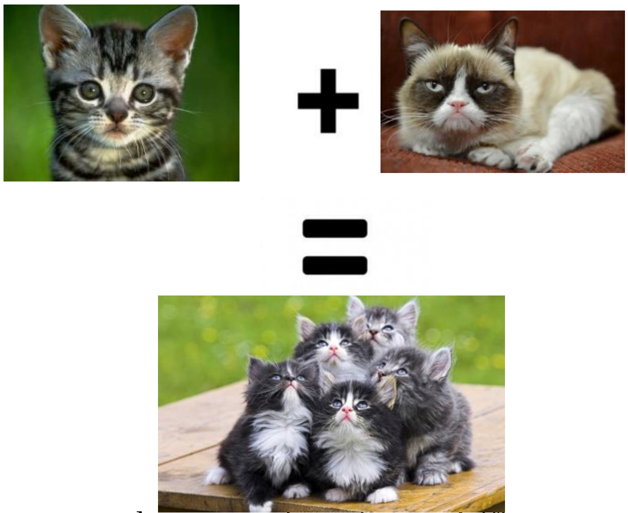
Dans le paragraphe qui suit, le deuxième passage (avec ses images humoristiques) résulte, si l'on excepte les corrections apportées par l'enseignant, d'une proposition d'élèves :

- **Sens mathématique ou non?**

"the product of an addition is a sum": in this sentence, the word *product* is not interpreted according to its usual mathematical meaning but in the sense of *result*.

The word *product* in mathematics is mostly interpreted as the result of a multiplication. On the picture the plus-sign evokes the action of "bringing together", of combining two elements in order to get *pups* (*des petits*) and the equal-sign, the result of this action.

If it were a *real* sum there would be 2 cats on the last picture!! but here there are 5 of them.



- Partie IV

Dans cette partie, les mots sont considérés comme ne relevant pas du registre spécifiquement mathématique. Les mots sont classés selon les sens principaux, comme sur l'exemple ci-dessous :

- **difference**

[sens 1: distinction]

to make a/the distinction between / to distinguish between : faire la différence entre

a difference/ dissimilarity: une différence/ une disparité
to differ/ to be different : différer/ être different
to differ on: différer sur
a distinctive mark: un signe distinctif

[sens 2 : écart]

age difference or gap : différence d'âge
difference in characters : différence de caractère
there are two years between them : il y a deux ans de différence entre eux
to pay the difference, to pay the balance: rembourser la différence
[sens 3 : particularité - culturelle, sexuelle]
to be proud to be different : revendiquer sa différence
[locutions]
à la difference de (locution) : unlike
à la difference que : except that

- Partie V

Cette partie propose, entre autres, une présentation du lexique selon les fonctions grammaticales, comme on peut le constater avec le cas du mot *plus* (L2) :

- plus

preposition (followed by a noun or a number):
two plus seven is nine.
it costs $11.99, plus $1.50 for postage and handling.
the price includes 7 nights' hotel accommodation (logement) *plus car rental* (location de voiture)
conjunction: *cleaning the old engines would be a difficult task, plus* (sans compter le fait que) *it wouldn't be worth the effort.*
adjective: the temperature is plus 12 degrees.
there are 30 plus students in every class

- Partie VI

Cette partie est importante. Elle permet de réaliser que les mots ne se recouvrent pas d'une langue à l'autre, même si la racine est la même (racine latine *suma* commune pour le mot *somme* en L1 ou le mot *sum* en L2). Ainsi le mot somme a d'autres signifiés en L1 : il intervient dans des expressions idiomatiques telles que *somme toute* par exemple, ou se traduira par (*total*) *amount* dans le cas d'une *somme totale*.
Le paragraphe relatif à *somme* est présenté ci-après :

- somme

[sens 1]
quantité ,montant, nombre : amount
somme d'argent : amount of money
somme totale : total amount

[autres sens]

bête de somme: workhorse ; drudge ; pack animal

faire un petit somme : to have a nap / to snooze

[locutions]

en somme

1. [en bref]   in short

en somme, tu refuses : in short, your answer is no

2. [en définitive]   all in all

c'est assez simple en somme : all in all, it's quite easy

somme toute (toutes choses considérées) : all things considered; when all is said and done

somme toute, tu as eu de la chance : all things considered, you've been lucky

Conclusion

Dans leur ensemble, les activités ont été l'occasion de vérifier certains points développés en partie théorique. En particulier, il semble clair que la capacité de perception naturelle et active des faits dans l'environnement matériel ou physique, voire schématique, se double d'une capacité de perception sémantique des sèmes, des connotations, des nuances, des éléments abstraits constitutifs d'une notion abstraite. Notre approche a pris en compte le rapport entre objets perçus par les sens, semi-conceptualisés et objets abstraits, ces derniers étant à la fois des noyaux durs de représentations, objectivés par des symboles langagiers et/ou mathématiques et pouvant fonctionner comme des catégories du langage (gnomon particulier et gnomon en général, par exemple). Nous avons à cet égard mis en relief la similarité des constructions syntaxiques quant aux manipulations (à caractère dynamique) ou aux descriptions (à caractère plus statique), que celles-ci portent sur des objets physiques ou abstraits (paragraphe II.2.).

L'élaboration des situations a reposé sur une distinction fine des niveaux de perception, conceptualisation, formulation (visuel, sémantique pur, lexical) notamment dans le cas de l'élaboration du support concernant le parallèle entre preuves visuelles et preuves algébriques.

L'élaboration de l'activité portant sur la dimension-outil de certaines identités (II.3.) est partie de l'idée suivante : concevoir, au niveau surdidactique, une situation ou l'une des identités algébriques du répertoire didactique de la classe interviennent *en activant le caractère dynamique* de la *dualité* statique/dynamique. Il s'en est suivi une recherche où le milieu graphique permettrait d'établir un lien entre un pattern constitué d'une succession de lettres et un déplacement algorithmique sur une grille (dans un repère, pour des points à coordonnées entières). Les identités concernant la somme des entiers consécutifs ou la somme des entiers impairs consécutifs, de par leur condensation en expression au carré, ont ensuite permis d'établir un lien avec des paraboles. D'où *assez vite* une proposition de sujet de problème et une mise en forme adaptée. L'intérêt réside aussi dans la possibilité, dans une même situation, de rapprocher des éléments discrets (termes d'une suite, points à coordonnées entières) et des objets relevant du continu (tracé de parabole, déplacement évoqué le long de chaque segment concerné)…

CONCLUSION DE LA PARTIE EXPÉRIMENTALE

Les thèmes que nous avons traités dans la partie expérimentale résultent de choix qui ont été guidés par nos propres conceptions. Celles-ci se traduisent entre autre par une volonté d'approcher les questions liées à notre problématique de manière conceptualisante et sensitive. La dualité sens / sensation et les niveaux d'idéalisation dont nous avions parlé dans la partie théorique ont pris ici tout leur sens. Le rapport à la spatialité lorsque l'élève se situe au niveau sémantique abstrait est encore présent et de manière générale, les sens sont encore impliqués à ce niveau élevé de conceptualisation.
En ce qui concerne les hypothèses théoriques formulées au chapitre 1, II.6, il convient d'examiner si ces dernières sont, ou ne sont pas, validées. Nous reprenons également les éléments théoriques tels que les répertoires, les représentations, la notion d'institutionnalisation, etc… afin d'éprouver l'efficacité de la modélisation adoptée en Partie théorique.
Les phases de travail interactif ont souvent reposé sur la base de documents élaborés par l'enseignant, distribués sous forme de supports écrits ou encore présentés à l'aide d'un PowerPoint. L'ensemble des documents relatifs à chacune des séances est disponible en annexe. Nous tenons à souligner que ces phases de travail participent de l'institutionnalisation autour de concepts nouveaux. A titre d'exemple, le répertoire d'actions a été progressivement enrichi. C'était par exemple le cas lors de la séquence sur les nombres triangulaires puisque ce sont déjà les nombres figurés en eux-mêmes qui offrent des possibilités d'action.
Le travail sur la formulation, à divers moments des activités, mais aussi en tant que travail à la maison, a permis aux élèves de déchiffrer et d'interpréter convenablement les consignes au début de chaque phase adidactique, puis de commenter par écrit les documents de type posters, et de les présenter à l'oral de façon satisfaisante. Une réactivation puis une consolidation du répertoire de formulation, nécessaires, ont été réalisées le long des séquences, comme en témoignent nos analyses et les documents en annexes correspondants. A cet effet, les techniques CLIL (warming up, consolidating, scaffolding, etc…) ont bien sûr été utilisées mais l'accent sur la phraséologie a été plus important car nous avons pris en compte les spécificités des objets mathématiques, les niveaux d'idéalisation, entre autres, de manière à permettre l'émergence et l'évolution de représentations cognitives adéquates autour des concepts nouveaux (tels que celui de gnomon, celui de preuve visuelle ou multimodale ou encore celui de principe d'extension schématique).

Nous insistons sur plusieurs points essentiels : nous estimons avoir montré ce que les situations mathématiques intégrées apportent de plus par rapport aux situations en L1. A cet égard, nous avons fait remarquer, à l'occasion des analyses des situations expérimentales, que l'enseignant y est contraint à plus de précision lorsqu'il parle des objets mathématiques, que ce soit lors des phases interactives pour émettre des conjectures, par exemple, ou lors des phases d'institutionnalisation relativement aux connaissances nouvelles et aux objets nouveaux mais aussi en ce qui concerne tous les supports écrits participant de l'institutionnalisation. A la lumière de la richesse des productions d'élèves que nous avons analysées, il est légitime de dire que cette exigence de précision s'est d'ailleurs aussi doublée, indirectement, d'un accroissement de la qualité au niveau des productions, notamment dans la

formulation (en L2) qu'ils ont adoptée mais aussi au travers de leurs productions schématiques. Celles-ci, comme nous l'avons constaté, constituent des indices que leurs représentations sont conformes à ce qu'attendait l'enseignant, que les raisonnements produits ont été adéquats à l'objectif qui était d'établir un type de preuve nouveau pour eux.
Nous rappelons que les preuves visuelles s'inscrivent ainsi, au premier abord, dans la catégorie des preuves pragmatiques (au sens de Balacheff, 1987) mais peuvent être vues également comme des preuves intellectuelles (voir Partie théorique, chapitre 3). Nous avions retenu ce choix pour nos séances expérimentales car il permet aux élèves d'agir à divers niveaux de milieu, ce que nous avons analysé en grande partie grâce au modèle de la TSD. Nous avons examiné à quels moments ils débattent et comment ils ont été amenés à valider, toujours en référence au modèle de structuration des milieux. Une autre raison non moins importante pour justifier que le choix du thème était pertinent consiste dans le fait que les élèves ont eu ainsi un rapport enrichi à la démonstration. Les connaissances qui ont émergé portent sur le rapport entre preuves visuelles arithmétiques et preuves par induction. A cet égard, le passage à la généralisation, qui est un point essentiel de l'enseignement des mathématiques, a été effectif lors des preuves établies en phase adidactique, comme nous l'avons mis en relief dans nos analyses. Les analyses a posteriori ont ainsi confirmé ce point au travers de l'examen des moments importants et des signes qui produits qui attestent d'un raisonnement conforme.

Les activités parfois qualifiées, selon nous à tort, de concrètes, sont le plus souvent simplement de *nature* concrète et reposent par trop sur la seule évocation des mots servant à leur description et s'appuient sur des vécus individuels qui peuvent être très différents. Le rapport direct aux objets concrets a été, lors de la séance sur la somme des cubes, effectif. Le rapport des élèves aux objets mathématiques associés, ou dérivés des expériences correspondantes, a été modifié, et cela dès les phases adidactiques, comme nous avons pu le voir en analysant les processus d'interprétation, de conceptualisation autour des concepts-clés et des raisonnements produits.
L'hypothèse 1, à savoir celle qui concernait l'efficacité de la modélisation en termes de milieux, au sens de la TSD, pour répondre aux questions posées par notre problématique, a été validée, comme en témoignent nos analyses.
L'hypothèse 2 concerne l'efficacité, du point de vue mathématique mais aussi du point de vue linguistique, des situations construites de manière à permettre l'adaptation des connaissances à un contexte présentant à la fois des similarités avec ceux des situations antérieures mais permettant tout autant l'émergence de nouvelles connaissances. Si une connaissance a déjà fonctionné, amener l'élève à trouver, déceler, des analogies entre la tâche à résoudre et les connaissances anciennes, doit garantir la bonne exécution de la tâche et ainsi concourir à la résolution de la situation-problème ou à atteindre l'objectif didactique visé. Ce point a été l'objet d'une focalisation particulière au moment de l'élaboration des séances expérimentales : ainsi, le gnomon, appréhendé comme outil dans les premières séances, est ensuite rapidement devenu objet à part entière. Les ingénieries ont ainsi été conçues de manière à permettre aux élèves de passer successivement du milieu objectif au milieu heuristique pour ensuite confronter leurs expériences, relatives aux tâches réalisées phase adidactique, au contenu institutionnel proposé par l'enseignant dans le milieu didactique, avec l'éclairage spécifique que favorise le recours à la L2. Le gnomon a été, pour les élèves, associé aux représentations schématiques et il est devenu quelque chose qu'il fallait détecter

et interpréter selon un principe d'extension des schémas. Il est clair que, pour l'ensemble des séances expérimentales, les contextes similaires, partageant des caractéristiques communes et une fois perçus comme tels, ont permis aux élèves de réaliser des actions effectives et productrices de sens. En effet, ces séances ont été l'occasion de parler de preuves visuelles, de propriétés arithmétiques, d'identifier des gnomons, de généraliser au niveau schématique, etc…Il est donc clair que l'hypothèse 2 est confortée.
Chacune des situations s'est révélée très riche, à la fois potentiellement, lors des analyses a priori, mais aussi du fait des productions d'élèves, des interactions qu'ils ont pu avoir avec l'enseignant et des actions que les milieux ont permis.
Le travail fait avec les élèves sur l'idéalisation des actions (notion que nous avons développée dans la partie théorique), initié lors de la séquence sur les nombres triangulaires puis prolongé par la suite, nous autorise à considérer la 3ème hypothèse (*il semble nécessaire de distinguer plusieurs manières de conceptualiser les actions*) comme confortée. Nous rappelons que la 1ère preuve visuelle, qui portait sur la somme des carrés, était basée sur une représentation d'actions 3D tandis que la séance sur la somme des cubes partait véritablement du concret, selon un processus d'abstraction progressif, en passant par des schématisations 2D pour aller jusqu'aux propriétés établies à l'aide de symboles algébriques. Les moments de secondarisation que nous avons ménagés à propos de la perception des éléments figurés, les particularités des preuves dites visuelles et le lien que celles-ci partagent avec la phraséologie que nous avons retenue, confortent la validation de l'hypothèse 3.
Relativement à l'ensemble des séances, l'enseignant est à l'origine de références explicites aux activités qui ont précédé la séance en cours. Ces références concernent d'ailleurs souvent un retour réflexif sur les phases adidactiques et une mise en relation dialectique avec le contenu des documents écrits qu'il propose et la phraséologie qu'il a retenue en L2. Ces références énonciatives ont constitué des moments d'institutionnalisation. Nous rappelons l'hypothèse 4 : *il est nécessaire d'examiner précisément les possibilités des langues et des répertoires pour favoriser la construction des représentations. Les formulations dans les deux langues jouent un rôle essentiel pour l'institutionnalisation et la reconnaissance des savoirs mathématiques à officialiser*. Compte tenu de ce qui précède et à la lumière de nos analyses, nous sommes ainsi conduit à considérer cette hypothèse comme confortée.
Nous souhaitons enfin insister sur la volonté qui a été la nôtre d'offrir des situations permettant une oscillation de l'attention entre les signifiés abstraits explicités et les référents sensibles ou idéalisés. Parmi ces situations, citons les diverses représentations des nombres figurés, ou encore les cubes matériels et leurs représentations schématiques en perspective, afin d'aboutir aux représentations 2D conservant cette impression de perspective, en favorisant de la sorte la conservation du lien originel avec les objets matériels. L'effet visé était d'obtenir la convaincance la plus forte possible en ce qui concerne la validité des conjectures émises sur la base de la perception du caractère générique des propriétés arithmétiques, ceci, au niveau schématique.
Nous pouvons ainsi observer que sont présents dans nos expérimentations les quatre aspects de l'institutionnalisation relevés par Comin (2000) : une intention, des conditions, une réalisation et un usage. Le gnomon est ainsi un "maillon nécessaire dans une heuristique organisée par le maître" (Comin, 2000, p. 310). "Les élèves savent utiliser l'objet dans des conditions d'emploi reconnues comme typiques de cet objet" (Comin, ibidem, p. 311) et disposent d'un vocabulaire pour en parler de façon pertinente, en l'occurrence en L1 et L2.

Nous estimons avoir utilisé efficacement les outils présentés ou développés dans la Partie Théorique, enrichis si nécessaires, et en provenance majoritairement de la TSD. Les cadres annexes, notamment les cadres issus du champ de la linguistique et de l'enseignement d'une L2, intégré ou non, ont servi de référence à certains points d'analyse, notamment en ce qui concerne les questions liés à la phraséologie.
Les hypothèses ont été examinées relativement aux outils et aux analyses développées en Partie Théorique, celles-ci portant entre autres sur les domaines relatifs aux cadres mentionnés précédemment : didactique des mathématiques, didactique des langues-cultures, sémantique lexicale et, comme on a pu le voir également, linguistique cognitive.

CONCLUSION GÉNÉRALE

1. Adéquation des modèles à l'étude de l'apprentissage des mathématiques en langue seconde

L'étude a permis de prendre de conscience de l'étendue du domaine de validité des modèles, tant du point de vue de l'élargissement des potentialités d'expression en L2 que du point de vue de l'acquisition des savoirs et connaissances mathématiques visés.

Notre objectif était d'apporter un éclairage supplémentaire sur ce que peut recouvrir la notion d'intégration dans un enseignement de type CLIL-Mathématiques en tenant compte de toutes les spécificités de cette DNL. Nous estimons avoir montré comment l'élaboration de situations mathématiques intégrées permet d'articuler apprentissage mathématiques et linguistiques d'une manière très efficace. Ce qui nous a permis d'y parvenir se résume en trois éléments théoriques essentiels. Nous nous sommes en effet appuyés sur :

- La TSD, pour élaborer une situation mathématique *intégrée* à partir de la modélisation en termes de milieux et de répertoires ;
- La Perspective actionnelle, pour nous focaliser sur les tâches et la verbalisation en L2 avec une prise en compte des contextes situationnels ;
- La phraséodidactique, pour rendre l'apprentissage efficace et coller au plus près des processus cognitifs à l'œuvre dans les interactions (schèmes cognitifs et schèmes de formulation).

Pour situer notre cadre théorique, dont une des composantes est linguistique, mais par la même occasion notre cadre de travail au niveau de l'enseignement effectif avec nos classes, nous avons dressé un état des lieux de l'enseignement de type CLIL, afin également d'optimiser notre propre enseignement. Les réflexions sur la formulation et la reformulation nous ont été bénéfiques ne serait-ce que pour obtenir une meilleure garantie de réceptivité des élèves quant aux consignes verbales précédant l'entrée dans les phases adidactiques des situations. L'examen de la morphologie des types de discours nous a ouvert des pistes quant aux facettes que nous pouvions lui conférer dans nos séances, sur un plan certes plus général et non pas simplement pour les situations expérimentales elles-mêmes.

Plus spécifiquement, le modèle des niveaux de milieux et raisonnements (Bloch & Gibel, 2011) a contribué de manière significative à l'étude approfondie des différentes formes de raisonnement apparaissant dans les situations (analyse a priori et a posteriori), permettant ainsi l'organisation optimale des situations. Ce modèle s'avère également efficient pour l'analyse des différentes sortes de preuves apparaissant dans ces situations (visuelle, syntaxique, locale, générique, etc…). Ce modèle permet ainsi de voir la transition entre les différents niveaux de preuves ; de ce fait, il facilite aussi, pour le chercheur-professeur, l'institutionnalisation, que ce soit en L1 ou L2.

Par ailleurs, il est remarquable de voir a posteriori à quel point la TSD est apparue comme un cadre d'élaboration totalement adapté. Le milieu objectif apparaissait comme le lieu privilégié pour favoriser la perception active et la pensée sans verbalisation tandis que le milieu de référence était celui de la formulation écrite ou de la validation orale en L2 dans le cas de la présentation des posters, par exemple. Malgré un recul apparent de la place de la L2 dans une partie de la phase adidactique (lorsque les élèves sont dans le milieu heuristique), les

situations expérimentales, du fait de la sollicitation par l'enseignant dans les phases interactives, de la motivation des élèves à présenter leurs travaux dans la L2 à l'issue des phases de recherche et enfin de la phase d'institutionnalisation, interactive elle aussi, se sont révélées fortement intégrées.
De manière générale, il est apparu que, lors des manipulations d'objets concrets, dans le milieu objectif, l'élève perçoit des choses qui font sens relativement aux consignes verbalisées initiales (stade pré-énonciatif). De plus, même si le caractère convaincant d'une preuve visuelle peut ne pas passer par les mots, il a néanmoins été discuté lors des phases de validation dans le milieu de référence au travers d'une confrontation des représentations, mais aussi lors des phases d'institutionnalisation pour les questions d'ajustement à la représentation de l'enseignant, garant du savoir savant.

2. Eclairage de points spécifiques d'ordre cognitif et langagier

En ce qui concerne la phraséologie, on peut dire qu'elle a permis de faciliter la verbalisation lors des interactions et les phases de validation des raisonnements. L'introduction des collocations relatives à un mot-concept a joué un rôle essentiel dans l'enrichissement de la représentation cognitive autour de ce terme et a donc facilité son réemploi dans des situations ultérieures. En outre, la constitution par l'enseignant d'un répertoire de formulation (répertoire minimal de fonctionnement) d'une séquence a reposé sur la capacité de ce dernier à discriminer les expressions phraséologiques nécessaires parmi celles obtenues à partir de ressources lexicales phraséologiques.
La définition d'un mot-concept, qu'il soit de nature mathématique ou non, apparaît de manière condensée, comme le point d'aboutissement de toutes les réflexions et de tous les discours à son sujet, et comme résultat d'un processus socio-historique et culturel dans le cas d'un concept mathématique, influencé par des communautés de pratiques. Comme point d'accès au concept, la définition ne suffit pas. Il est nécessaire de lui adjoindre les traits minimaux conceptuels dont nous avons parlé et qui se situent à un niveau sémantique élevé. L'explicitation par l'enseignant et la prise de conscience par l'élève de ces traits et la donnée d'une phraséologie relative à l'item lexical considéré apparaissent comme des éléments essentiels de l'enseignement du lexique, que celui-ci soit propre à la L1 ou à la L2.
La pensée sans verbalisation est apparue comme une composante essentielle de la pensée en général. Les traits conceptuels et abstraits, permettant de saisir le sens d'un terme d'une manière extrêmement fine et décrite linguistiquement, sont au seuil entre le linguistique et le non linguistique. Une sensibilisation à ces éléments situés en deçà, ou avant, mais aussi sans doute parallèlement à l'énonciation ou la pensée verbalisée, devrait contribuer à une meilleure approche sensitive de la langue. Lorsqu'une situation est *intégrée*, les processus de conceptualisation à l'œuvre procurent un gain cognitif qui ne se réduit pas à la somme d'une connaissance linguistique et d'une connaissance mathématique. Mettre l'accent sur une phraséologie étendue aux domaines périphériques, tout en restant en lien avec le contenu mathématique de la séance, contribue à enraciner le lexique en mémoire avec les schèmes cognitifs qui lui ont été associés lors de la séance et permet une réutilisation de ce lexique mais aussi de ces schèmes dans d'autres contextes. Nous avons montré que l'enseignement des mathématiques en L2, d'une part, éclaire la pratique mathématique et les objets qu'elle convoque mais aussi modifie le regard que l'élève porte sur la L2 ainsi que sur la L1.

En tant que discipline dite non linguistique, mais en contexte CLIL, les mathématiques fournissent des situations à caractère authentique quant à leur enjeu et à leur réalisation. Il est clair également que l'expérience de la nécessité et l'épreuve des objets, revisitées dans le cadre d'apprentissages intégrés, devraient légitimement être considérées comme des objectifs prioritaires de la pratique mathématique.

Par ailleurs, il ressort de notre étude que le bon fonctionnement d'une situation intégrée (ce qui sous-entend une implication effective de l'élève au niveau discursif dans la L2) motive l'élève et l'incite à consolider son répertoire. L'acquisition lexicale et phraséologique (et les efforts qu'elle nécessite) ne repose pas sur un effet de contrat. Elle est motivée tout au long des séquences par l'éclairage progressif et l'enrichissement sémantique qu'elles permettent quant aux objets, aux notions, aux propriétés mathématiques convoqués (le gnomon, les identités, le concept de preuve, entre autres).

Les situations invitant aux considérations métadiscursives ou métalinguistiques augmentent les capacités de conceptualisation et le gain cognitif apparaît dès lors comme transversal. L'expérience de la nécessité au niveau de l'acquisition du lexique repose sur une prise de conscience de l'utilité des efforts de mémorisation pour un réinvestissement ultérieur à travers une utilisation des schèmes cognitivo-langagiers, celle-ci étant perçue comme facilitée, et ce grâce à un retour explicite de l'enseignant sur le travail effectué.

3. Thèmes mathématiques et résultats

Les situations réalisées en classe de Première et Terminale du secondaire concernent les nombres et l'algèbre. La représentation des élèves autour du concept de preuve a été enrichie par un rapport expérientiel et multimodal aux preuves visuelles, rendu possible suite à un développement personnel de nouveaux concepts théoriques reposant eux-mêmes sur une prise en compte accrue des questions de signification et d'interprétation : concepts d'*implicite*, d'*explicite* et d'*hérédité schématique* ainsi que celui de *convaincance*.

Comme nous l'avons détaillé, les phases adidactiques ont été, pour les élèves, l'occasion d'actions dans les divers niveaux de milieux et de production de sens. Avec le recul, les hypothèses que nous avions énoncées au chapitre 1 apparaissent légitimes et en accord avec notre problématique.

L'hypothèse 1 a été confortée par le fait que les élèves se sont avérés actifs à la fois dans la résolution du problème mathématique posé et dans la formulation en L2.

Le fait que la progression des situations soit organisée autour de calculs différents mais ayant une certaine parenté, nous semble avoir facilité la dévolution et donc le réinvestissement de connaissances (**Hypothèse 2**). De plus, l'appui sur des preuves visuelles étant repris dans la situation des carrés et des cubes, les élèves n'ont pas eu de mal à s'en emparer car cela leur était devenu familier.

L'hypothèse 3 nous parait également vérifiée, dans la mesure où nous avons pu observer un investissement des élèves à tous les niveaux demandés : dessins, actions évoquées, calculs. L'expérimentation a donc montré que la pratique, par les élèves, de ces situations d'apprentissage facilite la construction des concepts et l'accès à la rationalité mathématique. Cela a permis aussi un transfert plus aisé, pour les élèves, des règles mathématiques (notamment de preuve et de démonstration) à d'autres domaines des mathématiques.

Comme prévu dans **l'hypothèse 4**, la cohérence du discours de l'enseignant en mathématiques et en L2 s'est avérée essentielle pour la dévolution des situations intégrées. L'enseignant a,

également, dû expliciter en amont les significations des mots concepts essentiels dans les apprentissages en lien avec les situations proposées : **l'hypothèse 5** est donc confortée.
Dans chacun des cas, il est clair que des situations "bien construites", visant à privilégier l'accès au sens, jouent un rôle essentiel dans l'accès à des concepts mathématiques avancés.
Notre travail s'inscrit donc aussi dans une étude sur le parallèle entre divers types de preuve et sur la transposition de ces considérations au niveau de la pratique en classe. Le cas du lien existant entre une preuve visuelle et une preuve par induction nécessite que l'institutionnalisation en classe puisse aussi s'appuyer sur un savoir savant officiel, y compris du côté de la L2 (contexte CLIL). C'est ce que nous envisageons, entre autres, comme poursuite de nos travaux actuels.
Par ailleurs, le travail dans deux langues permet aussi que les élèves aient des éclairages complémentaires sur la formulation des concepts, d'où leur meilleure appropriation. Ceci avait déjà pu être ébauché dans des précédentes recherches effectuées dans le cadre de la TSD (p.ex. les fonctions en espagnol, cf. Bloch 2000) même si la 'démonstration' n'en avait pas été conduite à ce niveau.

4. Perspectives de recherche

- Construire des situations bilingues pour d'autres thèmes mathématiques

Il serait très intéressant d'étudier d'autres thèmes mathématiques. Un examen des arguments et des formes de validation spécifiques à l'analyse, par exemple, devrait, en contexte bilingue, apporter un autre éclairage des objets mathématiques impliqués. Le concept de limite, par exemple, est lui aussi un concept qui nécessite que l'on recourt à la visualisation en phase d'apprentissage. Les arguments que les élèves peuvent avancer, lorsque les situations sont suffisamment bien construites pour que ceux-ci émergent en phases adidactiques, sont à la base d'un raisonnement qui doit ensuite être formalisé dans le cadre su SPA (système de Preuve de l'Analyse, cf. Bloch 2000), et c'est par exemple le statut des nombres vis-à-vis de la notion d'infini qui est pris en compte. En contexte monolingue, ceci avait été analysé en détail par Isabelle Bloch, dans sa thèse où le thème de la situation était celui du flocon de Von Koch.
Le thème des probabilités mériterait également une étude spécifique en contexte bilingue. Les probabilités nécessitent en effet que l'on mobilise fortement les capacités intuitives, mais avec un contrôle strict de la théorie. La place et la forme des justifications sont encore très différentes de ce dont nous avons parlé. Du fait même des multiples possibilités de contextualisation, que ce soit dans la vie de tous les jours ou dans les autres disciplines, le rapport à la langue prendrait d'autres facettes tout comme les discours produits, en classes bilingues ou européennes. La composante transversale et culturelle des activités pourrait sans doute y être encore plus importante.
Nous pourrions également envisager des études spécifiques pour le cas de la géométrie, sans oublier celui de l'algorithmique. Les travaux de Simon Modeste (2012) pourraient servir de support épistémologique et didactique dans une perspective d'enseignement intégré de l'algorithmique.
La place de la validation, essentielle en mathématiques, a déjà donné lieu à des travaux de recherche qui se rapportent aux questions de langues vivantes. Notre travail peut aussi s'orienter dans cette direction, et notamment considérer les modes différents dont est envisagée la validation en mathématiques dans la culture francophone et anglophone.

- CERME et le groupe de travail *langage et mathématiques*

Nous souhaitons avoir l'occasion de participer nous-même à un groupe de travail de recherche tel que celui portant sur les rapports entre langage et mathématiques. Les congrès CERME sont l'occasion d'un enrichissement personnel du point de vue de la didactique des mathématiques, et ils ont, de par leur nature, une dimension européenne. Ils sont aussi l'occasion, pour chacun, d'apporter sa propre contribution. Lieu d'échange international, ils permettent aussi de mettre en pratique l'anglais sur des thèmes de didactique.
Signalons que la lecture des actes de ces congrès nous a été profitable pour nos propres travaux. Nous avons ainsi pu constater que des auteurs travaillaient également, certes dans un cadre monolingue, sur le thème des preuves multimodales. Comme nous l'avons précisé, leur approche est différente. Néanmoins, la confrontation de représentations contradictoires – au sens argumentatif – est souvent une chose positive, que les interactions permettent indubitablement.

- Approfondissement des études sur les répertoires de représentation

Lorsque nous évoquons les facettes des processus d'abstraction, en relation avec une explicitation effective au niveau discursif, nous réalisons que des schèmes cognitifs sont impliqués. Nous les avons évoqués, analysés dans nos travaux pour finalement nous rendre compte que c'est en amont aussi, ou mieux, de manière transversale, que ces questions peuvent être abordées. Dans une perspective éthique, il est clair que l'élève, de retour chez lui, ou en dehors de l'école, n'est pas confronté de la même manière à des possibilités d'appréhension et de modification de ses propres processus de pensée. La perception des connotations, de la polysémie, la fréquentation suffisante avec des situations mobilisant des connaissances de niveau d'abstraction élevé et les occasions de reformulation, ne sont pas des choses que l'on peut considérer comme acquises mais au contraire constituent un champ d'investigation pour un véritable travail interdisciplinaire.
Le travail sur les métaphores, grâce au principe d'analogie sur laquelle elles reposent, permet justement d'établir un lien entre les situations de la vie courante et les situations en classe, quel que soit le champ disciplinaire concerné, pour favoriser une entrée dans les processus d'abstraction. En effet, celles-ci concernent la possibilité de travailler à des niveaux supérieurs en se rattachant au concret, du simple fait de leur enracinement dans la spatialité et des capacités naturelles de perception qu'elles mobilisent. Lorsque nous décrivons verbalement les choses perçues, dans les situations concrètes, nous préparons le terrain pour un recours ultérieur aux métaphores, en les appliquant cette fois à des objets abstraits. La métaphore est un des moyens d'accès au sens, la prise de conscience de l'enracinement de l'objet dans la réalité sensible ou l'abstraction progressive en sont d'autres.
Les processus de catégorisation que l'on met en pratique en mathématiques ont des répercussions, au niveau conceptuel, dans d'autres disciplines et réciproquement. Un travail conjoint, pensé en amont, et d'une manière éthique, est ce vers quoi nous devrions naturellement nous orienter.
Le concept de représentation en mathématiques, notion centrale de notre étude, mérite bien sûr d'être encore creusé. Comme piste d'investigation, nous envisageons par exemple, le rapport entre l'objet mathématique et les dualités du type statique/dynamique, fini/infini. Dans l'enseignement secondaire, les discours qui s'y rapportent ne sont en effet pas encore véritablement codifiés. Ils sont néanmoins pris en considération au niveau de la recherche (voir Font et Godino, par exemple).

La position physique que l'individu occupe dans l'espace, le rapport qu'il entretient avec le micro, le méso et le macro espace ne concernent pas que les mathématiques, bien au contraire. La difficulté de décrire les objets éloignés, puis les objets absents de notre champ de perception nous amènent déjà vers un début d'abstraction en nous contraignant, ou en nous invitant, à nous rattacher à nos représentations des objets immédiats et de l'expérience familière que nous en avons, tout en mobilisant nos capacités imaginatives. Regarder au loin, c'est déjà, d'une certaine manière, recourir à des objets abstraits et/ou idéalisés, mais c'est aussi reconstruire ou se représenter, au choix. Imaginer ce que l'on ne voit plus de manière directe, c'est parfois aussi rêver ou penser, mais penser autrement, bien sûr. Des multiples possibilités de l'évocation naturelle, nous retenons la valeur (humaine) sous-jacente au partage du sens puisque, si nous nous mettons d'accord sur ce que nous voyons, nous partageons déjà quelque chose et c'est précisément souvent ce sur quoi nous nous appuierons pour communiquer et comprendre. En mathématiques, ce sont encore une fois les situations permettant aux élèves d'effectuer des actions diversifiées et de communiquer à propos de celles-ci et des raisonnements qui les sous-tendent, qui doivent être l'objet de recherches approfondies en didactique.

我听见 我忘记。我看见 我记住。我做 我了解。

J'entends, j'oublie ;

Je vois, je retiens ;

Je manie, je comprends.

Confucius (551 av. - 479 av.)

"Il reste toujours un peu de parfum à la main qui donne des roses"

BIBLIOGRAPHIE

ABRIC, J.-C. (1984) L'artisan et l'artisanat : Analyse du contenu et de la structure d'une représentation sociale. *Bulletin de Psychologie,* XXXVII, **366**, 861-875.

ABRIC J.-C. (1988) *Coopération, compétition et représentations sociales*. Fribourg – Cousset, Delval.

ALSHWAIKH J. (2007) Mathematical visual forms and learning geometry: towards a systemic functional. *D. Küchemann (Ed.) Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics,* **27**, 2.

ALSHWAIKH J. (2008) Reading Geometrical Diagrams: A Suggested Framework. in Proceedings of *The fourth YERME Summer School* (YESS-4), Trabzon, Turkey.

ALSHWAIKH J. (2009) Diagrams as interaction: The interpersonal (meta)function of geometrical diagrams. In M. Joubert (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics;* Cambridge: British Society for Research into Learning Mathematics. **29**, 1-6.

ALSHWAIKH J. (2011) *Geometrical Diagrams as Representation and Communication: A Functional Analytic Framework.* PhD Institute of Education, University of London.

ALSINA C. and ROGER B. (2010) An Invitation to Proofs Without Words. *European Journal of Pure and Applied Mathematics* **3-1**, 118-127.

ARTIGUE M. (1992) *Cognitive difficulties and teaching practice.* The concept of Function, Aspect of epistemology and Pedagog*y*, MAA notes n°25.

ARTIGUE M. (2012) " Enseignement et apprentissage de l'algèbre". Contribution à la conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques du 13 mars 2012. ENS de Lyon. Consultable à l'adresse : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale-artigue-1

BAETENS BEARDSMORE H. (1999) Consolidating experience in plurilingual education. In MARSH D. & MARSLAND B. (Eds.), *CLIL Initiatives for the Millennium* 24-30. University of Jyväskylä: Continuing Education Centre.

BALACHEFF N. (1987) Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, **18 (2)**, 147-176, KLUWER.

BALACHEFF N. (1988) *Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de collège*. Thèse d'état, Université Joseph Fourier de Grenoble.

BALACHEFF N. (1995) Conception, Connaissance et Concept. *Séminaire Didactech : Didactique et Technologies Cognitives en Mathématiques,* 1994-1995, 219-244. Grenoble : Université Joseph Fourier.

BALACHEFF N., MARGOLINAS C. (2005) cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In *Mercier A. & Margolinas C. (Ed.), Balises en Didactiques des Mathématiques*, 75-106. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BANEGAS D. L. (2011) Content and language integrated learning in Argentina 2008–2011. *Latin American Journal of Content & Language Integrated Learning*, **4(2)**, 33-50. http://journals.sfu.ca/laclil/index.php/LACLIL/article/view/67

BANEGAS D. L. (2012) CLIL teacher development: challenges and experiences. *Latin American Journal of Content and Language Integrated Learning*, ***5*(1)**, 46-56. http://journals.sfu.ca/laclil/index.php/LACLIL/article/view/71

BANEGAS D. L. (2013) *Teacher developing language-driven CLIL through collaborative action research in Argentina* (Unpublished doctoral dissertation). University of Warwick, Coventry, UK.

BARBIN E. (1988) La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques. *Bulletin APMEP*, **366**, 591-620.

BARNABÉ A. (2012) *Corps, perception, déplacements : de l'expérience kinesthésique à la cognition linguistique. Étude du schème du chemin en grammaire et sémantique anglaises et statut de ce schème en linguistique cognitive*. Thèse de l'Université de Bordeaux III.

BARNABE A. (2013) De l'expérience kinesthésique à la structuration prépositionnelle du schème-image du chemin. *Corela,* (11) 1, URL : http:// corela.revues.org/2886

BARRIER T. (2009) *Une perspective sémantique et dialogique sur l'activité de validation en mathématiques.* Thèse de l'Université Claude Bernard, Lyon 1.

BARRIER T., DURAND-GUERRIER V. et BLOSSIER T. (2009) Semantic and game-theoretical insight into proof and argumentation. *In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna & M. de Villier (Eds.),* Proof and proving in mathematics education. ICMI study conference proceedings, **1**, 77-82. Taipei, Taiwan.

BARRIER T., MATHE A.-S., DURAND-GUERRIER V. (2009) A discussion about Toulmin's and Duval's models. *Proceedings of CERME 6*, Lyon, France.

BERTHELOT R., SALIN M-H. (1994) L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*, **53**, 39-53, IREM de Grenoble.

BERTHELOT R., SALIN M-H. (2001) L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x,* **56**, 5-34, IREM de Grenoble.

BLOCH I. (1999) L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* **19/2**, 135-193, Grenoble : La Pensée Sauvage.

BLOCH I. (2002) Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations : recherche d'une dialectique scientifique entre analyses théoriques et contingence. *Actes de la 11e Ecole d'Eté de DDM, Dorier Ed.* 125-139, Grenoble : La Pensée Sauvage.

BLOCH I. (2005) *Quelques apports de la Théorie des Situations Didactiques dans l'enseignement secondaire et supérieur.* Note de Synthèse pour une Habilitation à Diriger des Recherches. Université Paris 7-Denis Diderot.

BLOCH I. (2005) La sémiotique de C.S. Peirce et la didactique des mathématiques. *Conférence SFIDA*, Université de Turin.

BLOCH I. (2009) Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves : Comment travailler leur pertinence en formation ? *Petit x*, **81**, 25-52, IREM de Grenoble.

BLOCH I. (2012) Rôle et statut des savoirs dans la pratique mathématique : l'exemple d'un basculement épistémologique dans l'enseignement de l'analyse. *Colloque Espace mathématique francophone*, Université de Genève.

BLOCH I., GIBEL P. (2011) Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **31-2**, 191-228, Grenoble: La Pensée Sauvage.

BLOCH I. (2015) Concepts, objets, symboles, enseignement des mathématiques…Quelques réflexions sur l'épistémologie des mathématiques. *Petit x,* **97,** 71-79, IREM de Grenoble.

BOREL S. (2010) *Alterner pour apprendre : disponibilités du contact de langues pour l'acquisition.* Thèse de l'Université de Genève.

BOUCHAICHA H. (2011, 2012) *La caricature comme étant une image dans une percpective semiologique.* Mémoire élaboré en vue de l'obtention du diplôme de magistère en Sciences du Langage. Université de Mohamed Kheider- Biskra, Algérie.

BROUSSEAU G. (1988) Les différents rôles du maître. Conférence prononcée à l'UQAM, Québec, Canada*. Bulletin de l'Association mathématique du Québec*, **2**(**23**), 14-24.

BROUSSEAU, G. (1990) Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9, **3**, 309–336, (Actes de la V ème Ecole d'été de Didactique des mathématiques, Plestin les grèves). Grenoble : La pensée sauvage

BROUSSEAU G. (1996) *Théorie des Situations didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. (2004) Les Représentations : Etude en Théorie Des Situations Didactiques. *Revue des sciences de l'éducation,* **30** (**2)**, 241- 277. Montréal, Québec, Canada : Ed. Gisèle Lemoyne.

BROUSSEAU G., GIBEL. P. (1999) Analyse didactique d'une séquence de classe destinée à développer certaines pratiques du raisonnement des élèves. *Actes de la X° Ecole d'été de Didactique des Mathématiques,* (2), 54-71.

BROUSSEAU G., GIBEL P. (2005) Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations, in *Beyond the apparent banality of the mathematics classroom,* 13-58, Guest Editors Laborde C., Perrin Glorian M.J., Sierpinska A., Springer.

BROUSSEAU G., GIBEL P. (2005) Didactical Handling of Students'Reasoning Processes in Problem Solving Situations, *Educational Studies in Mathematics,* **59**, 13-58, KLUWER.

CABASSUT R. (2005) *Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne*. Thèse de l'Université Paris 7.

CAVALLA C. (2008) *Propositions didactiques pour l'enseignement d'éléments phraséologiques en FLE*. Colloque international ReFLEt - Enseigner les structures langagières en FLE, 20-22 mars, Enseigner les structures langagières en FLE, Bruxelles : Université Libre de Bruxelles, 2008.
http://gramm-r.ulb.ac.be/fichiers/colloques/Nantes2008/Cavalla.pdf
[consulté le 15 04 2013]

CHAPMAN A. (1993) Language and learning in school mathematics : a social semiotic perspective. *Issues in Educational Research,* **3 (1),** 35-46.

CAVALLI M. (2005) *Education bilingue et plurilinguisme. Le cas du Val d'Aoste*. Paris : Didier.

CHAROLLES M. (1987) *Spécialisation des marqueurs et spécificité des opérations de reformulation, de dénomination, et de rectification,* L'analyse des interactions verbales, la Dame de Caluire : une consultation, Berne, P. Lang.

CHEVALLARD Y. (1986) La Transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné. *Revue française de pédagogie,* 76(1), 89-91, ENS Lyon.

CHINI D. (2004) *Entre didactique et psycholinguistique, l'activité en classe de langue : quel rôle pour la problématique énonciative ?* Note de synthèse pour l'HDR, université de Pau et des Pays de l'Adour. Consultable en ligne : http://acedle.org/spip.php?article210.

CHINI D. (2008) Approche actionnelle, plurilinguisme et conceptualisation linguistique. In Chini, D. & Goutéraux, P. (dir.) *Psycholinguistique et didactique des langues étrangères*: Journées d'études INRP, 5-18.

CLIL Tool Kit (The) *Transforming theory into practice*. Univ. of Cambridge, ESOL examinations. Consultable à l'adresse: www.CambridgeESOL.org

CLIL Teaching Knowledge *Test (2009) Glossary*. Univ of Cambridge, ESOL examinations. Consultable à l'adresse: www.CambridgeESOL.org

COLE M. (1996) *Cultural Psychology*. Cambridge, Massachusetts: The Belknap Press of Harvard University Press.

COMIN E. (2000) *Proportionnalité et fonction linéaire ; Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*. Thèse de l'Université de Bordeaux 1.

CONSEIL DE L'EUROPE (2000) *Cadre européen commun de référence pour les langues*, Paris, Didier.

COOK V. (2012) Some key issues for SLA research. Draft of paper in Lucian Pedrazzini, Andrea Nava (eds) *Learning and Teaching English*: Insights from Research, Polimetrica Publisher, Italy.

COULANGE (2012) *L'ordinaire dans l'enseignement des mathématiques. Les pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves.* Note de synthèse présentée en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches. Université Paris Diderot.

COULANGE L., GRUGEON-ALLYS B. (2008) Pratiques enseignantes et transmissions de situations d'enseignement en algèbre. *Petit x*, **78**, 5-23, IREM de Grenoble.

COYLE D. (1999) Theory and planning for effective classrooms: supporting students in content and language integrated learning contexts in Masih J. (ed.) *Learning through a Foreign Language,* London: CILT

COYLE D., HOOD P., MARSH, D. (2010) *CLIL: Content and language integrated learning.* Cambridge: Cambridge University Press.

DALE L., TANNER R. (2012) *CLIL Activities, a ressource for subject and language teachers.* Cambridge University Press.

DE GROOT A. M. B. (1998) La Représentation lexico-sémantique et l'accès lexical chez le bilingue. *Psychologie française*, 43/4, 297-312.

DELEDALLE G. (1990) *Lire Peirce aujourd'hui.* Bruxelles : De Boeck.

DE VILLIERS M. (1990) The role and the function of proof in mathematics, *Pythagoras* **24**, 17-24.

DE VILLIERS M., GARNER M. (2008) Problem solving and proving via generalisation *Learning and Teaching Mathematics*. **5**, 19-25, AMESA, the Association for Mathematics Education of South Africa.

DIAS T. (2009) L'apprentissage de la géométrie dans la scolarité obligatoire : une dialectique entre objets sensibles et objets théoriques. In Bloch I., Conne F. eds, *Nouvelles perspectives en Didactique des Mathématiques*, 43-64. Grenoble : La pensée sauvage

DIGEST CLIL / EMILE (2004) Document préparé par le groupe d'accompagnement de l'immersion linguistique. Article consultable à l'adresse suivante : http://www.segec.be/Documents/Fesec/Immersion/Immersion_Linguistique-CLIL-EMILE.pdf

DOMENJOZ J-C. (1998) L'approche sémiologique. Article en ligne consultable à l'adresse : http://www.edu.ge.ch/dip/fim/ifixe/Approche_semiologique.pdf.

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7.2, 5-31, Grenoble: La Pensée Sauvage.

DOUEK N. (1999) Argumentation and conceptualization in context: a case study on sunshadows in primary schools. *Educational Studies in Mathematics* **39**(**1/3**) 89-110, KLUWER.

DOUEK N. (2003) *Les rapports entre argumentation et conceptualisation dans la didactique des domaines d'expérience*. Thèse de l'Université R. Descartes, Paris V.

DURAND-GUERRIER V. (2005) Natural deduction in Predicate Calculus A tool for analysing proof in a didactic perspective, in *Argumentation and proof, Topic Group 4 to the CERME 4 Conference*, Mariotti M. A., Knipping C., Küchemann D., Nordstrom K. http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/05Automne/CERME4Durand.pdf

DURAND-GUERRIER V. (2008) Faire l'épreuve des objets en mathématiques : le cas des polyèdres réguliers. Contribution n° 2, in *La conceptualisation dans l'apprentissage des sciences : faire l'épreuve des objets*, Colloque international Efficacité et équité en éducation. Université de Rennes 2.

DUVAL R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **5**, 37-65, IREM de Strasbourg.

DUVAL, R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang, publisher.

DUVAL R. (1996) Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*. **16/3**, 349-380, Grenoble : La Pensée Sauvage.

DUVAL R. (2000) Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **20/2**, 135-170, Grenoble: La Pensée Sauvage.

DUVAL R. (2001) Écriture et compréhension : Pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ? In *Produire et lire des textes de démonstration*. Collective work coord. by É Barbin, R. Duval, I. Giorgiutti, J. Houdebine, C. Laborde. Ellipses, Paris.

DUVAL R. (2004) A crucial issue in mathematics education: The ability to change representation register. *ICME*, 10, 15,16.

ECO U. (1988) *Le signe*. Bruxelles, Labor.

EDUSCOL *Ressources pour les disciplines non linguistiques. Mathématiques en langue étrangère*. Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et de la vie associative (DGESCO). Consultable à l'adresse suivante :
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/84/4/doc_ress_DNL_math_v4_relu_Sd_212844.pdf

ELLIS N. C. (1996) *Vocabulary acquisition: Psychological perspectives.* Vocabulary Acquisition Research Group Virtual Library, University of Wales at Swansea.
consulté le 10 05 2011: http://www.swan.ac.uk/cals/calsres/vlibrary/ne95a.htm

EVERAERT-DESMEDT N. (1990) *Le processus interprétatif : introduction à la sémiotique de CS Peirce.* Liège : Mardaga.

FABERT C., GRENIER D. (2011) Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique. *Petit x,* 87, IREM de Grenoble.

FALCADE R. (2006) *Théorie des situations, médiation sémiotique et discussions collectives, dans des séquences d'enseignement avec Cabri-Géomètre pour la construction des notions de fonction et de graphe de fonction.* Thèse de l'Université Joseph Fourier.

FISETTE J. (1993) *Introduction à la sémiotique de C.S.Peirce*. Montréal : XYZ éditeur.

FONT V., GODINO JUAN D., GALLARDO J. (2012) The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, **82**, 97–124, KLUWER.

FREDERICKS J. and VAN CLEAVE M. (2007) Student Mathematical discourse and Team Teaching. *Conference of Research in Undergraduate Mathematics Education,* San Diego.

FUCHS C (2004) *Introduction à l'ouvrage* « La Linguistique Cognitive » (C. Fuchs, ed.), Ophrys/MSH, 2004. Consultable à l'adresse suivante : http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/06/79/34/PDF/2004_LING_COGN.pdf

GAJO L. (2006) Types de savoirs dans l'enseignement bilingue: problématicité, opacité, densité. *Education et sociétés plurilingues* **20**, 75-87.

GAUDIN, N. (2002) Conceptions de fonction et registre de représentations, étude de cas au lycée. *For the Learning of Mathematics* (**22**)2, 35-47.

GAUDIN, N. (2005) *Place de la validation dans la conceptualisation, le cas du concept de fonction*. Thèse de l'Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

GEZUNDHAIT H. (2010) Langage et Communication *Département d'études françaises,* Université de Toronto, article consultable à l'adresse : http://www.linguistes.com

GIBEL P. (2004) *Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnements dans la relation didactique en classe de mathématiques à l'école primaire.* Thèse de l'Université de Bordeaux 2.

GIBEL P. (2008) Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **13**, 5-39, IREM de Strasbourg.

GIBEL P. (2009) Analyse des connaissances et des savoirs utilisés par les élèves lors de l'élaboration de raisonnements en situation adidactique. Colloque Espace Mathématique Francophone, Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal.

GIBEL P. (2015) Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire, *Education et Didactique*, **9-2***,* 51-72, Presses Universitaires de Rennes.

GILLY M., ROUX J.P., TROGNON A. (1999) *Apprendre dans l'interaction. Analyse des médiations sémiotiques.* Nancy : Presses Universitaires de Nancy, 69-94.

GLEDHILL C. (2000) *Collocations in Science Writing.* Tübingen, Gunter Narr Verlag.

GODINO J.D. (2002) Un enfoque ontologico y semiotico de la cognicion matematica. *Recherches en didactique des Mathématiques*, **22/2.3**, 237-284, Grenoble: La Pensée Sauvage.

GODINO J.D. y RECIO A.M. (2004) *Un modelo semiotico para el analisis de las relaciones entre pensamiento, lenguaje y contexto en educacion matematica*, Universidad de Granada.

GONZALEZ-REY I. (2002) *La phraséologie du français*, Toulouse, Presses Universitaires du Mirail.

GRENIER D. (2001) Learning proof and modelling. Inventory of fixtures and new problems. *Proceedings of the 9th International Congress for Mathematics Education*, Tokyo, Août 2000.

GRENIER D. (2003) The concept of « induction » in mathematics, *Mediterranean Journal For Research in Mathematics Education,* vol. 3. ed. Gagatsis. Nicosia Cypru

GRENIER D. (2012) Une étude didactique du concept de récurrence. *Petit x*, **88**, 27-47, IREM de Grenoble.

GRENIER D., PAYAN, C. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en didactiques des mathématiques*, **18** (1), 59-99, Grenoble: La Pensée Sauvage.

GROUPE µ (1992) *Traité du signe visuel*, Paris, Seuil.
HADDAD S. (2012) *L'enseignement de l'intégrale en classe Terminale de l'enseignement tunisien.* Thèse de l'Université virtuelle de Tunis.
HALLIDAY M. A. K. (1978) *Language and social semiotics.* London: Edward Arnold.
HANDBOOK LICI (Language in Content Instruction). Consultable à l'adresse suivante : http://lici.utu.fi ..
HANNA G. (1995) Proof and Knowledge in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* Review of M. Detlefsen (Ed.). **28** (1), 87-90, KLUWER.
HANNA G. (2000) Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, Issues 1&2, K. Jones, Á. Gutiérrez, M. A. Mariotti (eds.) **44,** 5-23, KLUWER.
HAREL G. (2001) The Development of Mathematical Induction as a Proof Scheme: A Model for DNR-Based Instruction. In S. Campbell & R. Zaskis (Eds.). Learning and Teaching Number Theory. In C. Maher (Ed.). Journal of Mathematical Behavior. New Jersey, Ablex Publishing Corporation, 185-212.
HAREL G. (2008) DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction, Part II. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*. **40**,487–500.
HÉBERT L. (2010) Typologie des structures du signe : le signe selon le Groupe µ, *Actes Sémiotiques* [En ligne]. n° 113. Consultable à l'adresse suivante :
http://epublications.unilim.fr/revues/as/1761 (consulté le 05/03//2015)
HEYDT-METZUYANIM E. *Mathematizing, subjectifying and identifying in mathematical discourse – Preliminary ideas on a method of analysis.* Thesis, University of Haifa.
HILTON H. (2010) *Modèles de l'acquisition lexicale en L2 : où en sommes-nous ?* ASp, **35-36**, 201-217. Consultable à l'adresse : http:// asp.revues.org/1668
HOFFMANN M. H. G. (2001) Peirces Zeichesbegriff: seine Funktionen, seine phänomenologische Grundlegung und seine Differenzierung.
http://www.unibielefeld.de/idm/semiotik/Peirces_Zeichen.html.
HOFFMANN M. H. G. (2003) *Mathematik verstehen – Semiotische Perspektiven*. Hildesheim, Franzbecker.
HOFFMANN M. H. G. (2004) Semiotische Grundlagen der Mathematikdidaktik, DGS
HUINKER D., Freckmann J. L. (2004) Focusing conversations to promote teacher thinking. *Teaching Children Mathematics*, 10(7) 352-357.
JAUBERT M., REBIERE M. (2001) Pratiques de reformulation et construction de savoir. *Aster*, **33**, 81-110.
JAUBERT M., REBIERE M. et BERNIE J.-P. (2003) L'hypothèse « communauté discursive » : d'où vient-elle ? où va-t-elle ? *Les cahiers Théodile,* **4**, 51-80.
JODELET D (1991) "Représentation sociale" dans *Grand dictionnaire de la psychologie,* Paris. Larousse, 668-672.
KNIPPING K. (2008) A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education* **40/3**, 427-441, SPRINGER.
KNOTT L., SRIRAMAN B., JACOB I. (2008) Morphology of Teacher Discourse. *The Mathematics Educator*, **11**, 1-2 , 89-110, University of Georgia : MESA.
LERMAN S. (2005) Theories of Mathematics Education: a problem of plurality? London South Bank University, in *Theories of Mathematics* (forum), PME, **29**, 179-183.

LIMA I. (2006) *De la modélisation de connaissances d'élèves aux décisions didactiques des professeurs: Etude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN H. (2012) Items for a description of linguistic competence in the language of schooling necessary for learning/ teaching mathematics (*in secondary education)* An approach with reference points, *in Language and school subjects linguistic dimensions of knowledge building in school curricula, n° 4, Language Policy Unit Directorate of Education, DGII,* Platform of resources and references for plurilingual and intercultural education Council of Europe.

LYSTER R., BALLINGER S. (2011) Content-based language teaching: Convergent concerns across divergent contexts. *Language Teaching Research*, **15(3)**, 279-288.

MALT M. (2010) Quelques propriétés des représentations, le cas de la notation musicale. *Revista do Conservatório de Música da UFPel, Pelotas,* **3***, 2010.* 1-26.

MARGOLINAS C. (1998) Etude de situations didactiques "ordinaires" à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur. *Actes de la 8ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

MARGOLINAS C. (2002) Situations, milieux, connaissances – Analyse de l'activité du professeur. *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, 141-156, Grenoble : La Pensée Sauvage.

MARGOLINAS C. (2004) *Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques.* HDR. Université de Provence Aix-Marseille I. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://tel.archives-ouvertes.fr/tel- 00429580/en/

MARSH D. et al. (2001) *Profiling European CLIL Classrooms. Languages open Doors*. Finland and Netherlands: University of Jyväskylä and European Platform for Dutch Education.

MARTY R. (1992) *99 réponses sur la sémiotique.* Montpellier : CRDP.

MAZALEYRAT H. (2010) (a) *Vers une approche linguistico-cognitive de la polysémie, représentation de la signification et construction du sens*, Thèse de l'Université Blaise Pascal – Clermont II.

MAZALEYRAT H. (2010) (b) Ambigüités sémantiques et lexicographie bilingue. Communication affichée. Colloque des doctorants et des jeunes chercheurs - Coldoc09 Consultable à l'adresse suivante : hal.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/455742/ filename/amb_sem_et_lexicog_bilingue.pdf

MIDGLEY K. (2009) *Le lexique bilingue.* Thèse de l'Université d'Aix-Marseille I.

MILLER R. L. (2012) *On Proofs Without Words.* Whitman College.

MOATE J. (2010) The integrated nature of CLIL: A sociocultural perspective. *International CLIL Research Journal*, ***1*****(3)**, 38-45.

MODESTE S. (2012) *Enseigner l'algorithme pourquoi ?* Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble.

MORRIS C. (1938) *Foundations of the Theory of Signs*. Chicago University Press.

MORRIS C. (1946) *Signs, Language and Behavior*. New York, Prentice Hall.

MOSCHKOVICH J. N. (2002) A situated and sociocultural perspective on bilingual mathematics learners. In Nasir, N. & Cobb, P. (Eds.) Diversity, Equity, and Mathematical Learning. *Mathematical Thinking and Learning* **4(2-3)** (Special Issue) 189-212.

NARCY-COMBES J-P., WALSKI J. (2004) Le concept de tâche soumis au crible de nouvelles questions. *Les Cahiers de l'APLIUT*, **XXIII**, **1**, 27-44.

O'HALLORAN K. L. (2005) *Mathematical discourse: Language, symbolism and visual images*. London: Continuum.

OLERON P. (1977) *Le raisonnement*. Paris : Presses Universitaires de France.

OTTE M. (2005) *Mathematical epistemology from a peircean semiotic point of view.* PME Utrecht.

PECMAN M. (2004) *L'enjeu de la classification en phraséologie. EUROPHRAS 2004*, 26-29, Université de Bâle, Suisse. Baltmannsweiler : Schneider Hohengehren Verlag.

PECMAN M. (2005) *De la phraséologie à la traductologie proactive : essai de synthèse des fondements théoriques sous-tendant la recherche en phraséologie*. Meta : journal des traducteurs / Meta: Translators' Journal, **50 (**4)**.**
Consulté le 05 07 2012 à l'adresse : http://id.erudit.org/iderudit/019853ar

PEDEMONTE B. (2002) *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

PEDEMONTE B. (2005) Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration? *Recherches en didactique des mathématiques*, **25/3**, 313-348. Grenoble: La Pensée Sauvage.

PEDEMONTE B. (2007) How can the relationship between argumentation and proof be analysed ? *Educational Studies in Mathematics*, **66**, 23-41, KLUWER.

PEDEMONTE B., BUCHBINDER O. (2011) Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: the case of triangular numbers *ZDM The International Journal of Mathematics Education* **43/2**, 257-267.

PEIRCE C.S. (1978) *Écrits sur le signe.* Paris : Seuil.

PENNEC B. (2006) *La Reformulation en Anglais Contemporain, Indices Linguistiques Et Constructions Discursives* Thèse de l'Université Rennes II.

PERRAUDEAU M. (2006) *Les stratégies d'apprentissage*. Paris, Armand Colin.

PERRIN L.-M. (2005) *Des représentations du temps en wolof*. Thèse de l'Université de Paris VII. Consultable à l'adresse : http://tel.archives-ouvertes.fr

PETITJEAN C. (2009) *Représentations linguistiques et plurilinguisme*. Thèse de l'Université de Provence/Université de Neuchâtel, Aix-en-Provence/Neuchâtel.

PRESMEG N. C. (2006) Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future,* 205-235. Rotterdam: Sense Publishers.

PRINCE P. (1999) *L'Apprentissage lexical en deuxième langue : des réseaux évolutifs*. ASp **23-26**, 335-47.

PUREN C. (2006) De l'approche communicative à la perspective actionnelle. *Le Français dans le monde* **347**, 37-40.

PUREN C. (2007) Histoire de la didactique des langues-cultures et histoire des idées. *Cuadernos de Filología Francesa* (revista del Departamento de Filología Románica, Área de Filología Francesa de la Universidad de Extremadura, Cáceres (España), **18**, 127-143. Consultable à l'adresse :
http://www.aplv-languesmodernes.org/spip.php?article1323

PUREN C. (2009) Nouvelle perspective actionnelle et (nouvelles) technologies éducatives : quelles convergences … et quelles divergences ? *Cyberlangue 2009*

RADFORD L. (2002) The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectivation of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics,* **22-2**, 14-23.

RADFORD L. (2004) Rescuing perception: Diagrams in Peirce's theory of cognitive activity. *Research Program, Social Sciences and Humanities Research Council of Canada*.

RADFORD L. et al. (2003) Calculators, graphs, gestures and the production of meaning. *Conference of the International Group of PME, PME 27*, **4**, 55-62.

RADFORD L. (2009) Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics,* **70**, 111-126, KLUWER.

RADFORD L. (2010) Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education.* **12-1**, 1-19, Hipatia Press.

RADFORD L., BARDINI C., SABENA C. (2007) Perceiving the general: The multisemiotic dimension of students' algebraic activity. *Journal for Research in Mathematics Education,* **38(5),** 507-530, Hipatia Press.

RADFORD L., EDWARDS L. D., Arzarello, F. (2009) Introduction: beyond words. *Educational Studies in Mathematics*, **70**, 91-95, KLUWER.

RINVOLD R. A., LORANGE A (2011) Multimodal derivation and proof in algebra, in M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda. *Proceedings of CERME 7*, 233-242. University of Rzesvow, Poland.

RINVOLD R. A., LORANGE A. (2013) Multimodal proof in arithmetic, *Proceedings of* Cerme8. Consultable à l'adresse :
www.mathematik.unidortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf

ROLLAND Y. (2004) La difficile émergence d'une cohérence en didactique des langues par l'éclectisme théorique et la multiplicité des conflits d'interprétation. *ASp* **45-46**.

ROUCHE N. (1989) Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications ? in *La démonstration mathématique dans l'histoire.* IREM de Lyon. 9-38.

ROUX, J.P. (1996) Médiations entre pairs et co-élaboration de savoirs en milieu scolaire. *Educations*, **9**, 20-22.

ROUX J.P. (1999) Contexte interactif d'apprentissage en mathématiques et régulation de l'enseignant. In M. Gilly, J.P. Roux & A. Trognon (Eds.). *Apprendre dans l'interaction,* 259-278. Nancy : Presses Universitaires de Nancy.

ROUX J.P. (2003) Résumé de la conférence de J.-P. Roux : *Les enjeux cognitifs : « interactions et apprentissages scolaires»* Séminaire du Pôle Sud-Est des IUFM Organisé par l'IUFM d'Aix-Marseille.

SACKUR, C., ASSUDE T., MAUREL M., DROUHARD J.P., PAQUELIER Y. (2005) L'expérience de la nécessité épistémique *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **25/1**, 57-90, Grenoble: La Pensée Sauvage.

SCHNEUWLY B. (1986) Les capacités humaines sont des constructions sociales. Essai sur la théorie de Vygotsky. *European Journal of Psychology of Education*, **1**, 5-16.

SFARD A. (2000a) Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb,K. E. Yackel, & K. McClain (Eds), *Symbolizing and communicating: perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design,* 37-98. Mahwah, NJ: Erlbaum.

SFARD A. (2000b) Steering (dis)course between metaphor and rigor: Using focal analysis to investigate the emergence of mathematical objects. *Journal for Research in Mathematics Education,* **31(3),** 296-327, Hipatia Press.

SFARD A. (2001a) There is More to Discourse than Meets the Ears: Learning from mathematical communication things that we have not known before. *Educational Studies in Mathematics*, **46(1/3),** 13-57, KLUWER.

SFARD A. (2001b) Learning mathematics as developing a discourse. In R. Speiser, C. Maher & C. Walter (Eds.), *Proceedings of 21st Conference of PME-NA*, 23-44. Columbus, OH: Clearing House for Science, Mathematics, and Environmental Education.

SOUZA HODNE L. C. (2009) *Collocations and teaching*. A thesis for the Master's Degree program in English, University of Bergen. Consultable à l'adresse : https://bora.uib.no/bitstream/handle/1956/3824/65352869.pdf?sequence=1

TAJMEL T. (2011) Wortschatzarbeit im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. *Ide. Informationen zur deutschdidaktik:* "Wortschatz"Insbruck, Studienverlag GEs.m.b.H.

Teaching Maths Through English, a CLIL approach, Univ of Cambridge, ESOL examinations. Consultable à l'adresse : www.CambridgeESOL.org

TANGUAY D. (2000) *Analyse du développement de la notion de preuve dans une collection du secondaire*. Mémoire de Maîtrise. Université Du Québec à Montréal. Mémoire consultable à l'adresse : http://www.archipel.uqam.ca/2144/1/M%C3%A9moire_DenisT.pdf

TANGUAY D. (2002) Analyse des problèmes de géométrie et apprentissage de la preuve au secondaire. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, **2- 3**, 371-396.

TANGUAY D. (2006) Comprendre la structure déductive en démonstration. *Revue Envol*, **134**, 9-17.

THOMPSON T. (2008) Mathematics teachers'interpretation of higher order thinking in Bloom's taxonomy. *International Electronic Journal of Mathematics Education* **3-2**. Consultable à l'adresse : www.iejme.com

TIERCELIN C. (1993) *La pensée signe. Études sur C.S. Peirce.* Nîmes : Jacqueline Chambon.

TOULMIN E. S. (1993) *The use of arguments*. Cambridge : University Press 1958; Traduction française par De Brabanter P. Les usages de l'argumentation, Presses universitaires de France

VYGOTSKI L.-S. (1985/1933) Le problème de l'enseignement et du développement mental à l'âge scolaire. In B. Schneuwly & J.P. Bronckart (Eds.), *Vygotsky aujourd'hui*, 95-117. Genève : Delachaux et Niestlé.

VYGOTSKI L.-S. (1997) *Pensée et Langage.* Paris, La Dispute.

ZAZKIS R., LILJEDAHL P. (2002) Arithmetic sequence as a bridge between conceptual fields. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, **2(1)**, 93-120, Toronto : University of Toronto Press.

Enseignement et apprentissage des mathématiques en anglais langue seconde

Christian Larue

ANNEXES

Table des matières

ANNEXE 1 : Situation des *Nombres Triangulaires*

Liste des documents

Document 1 : Différence de deux carrés

Document distribué aux élèves à l'issue d'une séance située en amont de la séquence sur les nombres figurés. Ce document concerne les manipulations spatio-visuelles portant sur des configurations géométriques.

Document 2

Transcription du document Powerpoint utilisé en classe lors de la séance 1 de la séquence sur les nombres figurés.

Document 3

Document sur les nombres polygonaux (commenté et distribué aux élèves)

Document 4

Lexique joint au document précédent et distribué aux élèves.

Document 5

Transcription du document Powerpoint utilisé en classe lors de la Séance 1 bis de la séquence sur les nombres figurés. Il s'agit de la séance précédent celle relative à la Situation des Nombres Triangulaires proprement dite.

Document 6

Transcriptions de la Séance 1 bis et commentaires

Document 7 (fourni aux élèves)

Lexique constitué des termes et expressions rencontrées à l'occasion de la séance 1 bis (précédent celle relative à la Situation des Nombres Triangulaires).

Document 8

Consignes données lors de la Situation des Nombres Triangulaires (Séance 2).

Document 9

Test donné aux élèves de Première européenne à l'issue de la séquence des Nombres Triangulaires

Posters

Posters réalisés en phase adidactique par la classe de première européenne

Document 1 Difference of two squares

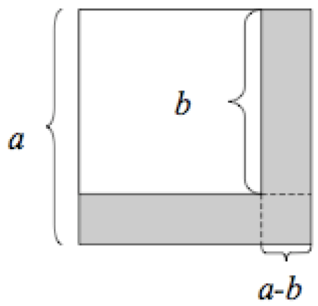
The difference of two squares can also be illustrated geometrically as the difference of two square areas in a plane.

In the diagram, the shaded part represents the difference between the areas of the two squares, i.e. $a^2 - b^2$.

The area of the shaded part can be found by adding the areas of the two rectangles:

$a(a - b) + b(a - b)$, which can be factorized to $(a + b)(a - b)$.

Therefore $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$



Another geometric proof proceeds as follows:

We start with the figure shown in the first diagram below, a large square with a smaller square removed from it. The side of the entire square is a, and the side of the small removed square is b. The area of the shaded region is $a^2 - b^2$.

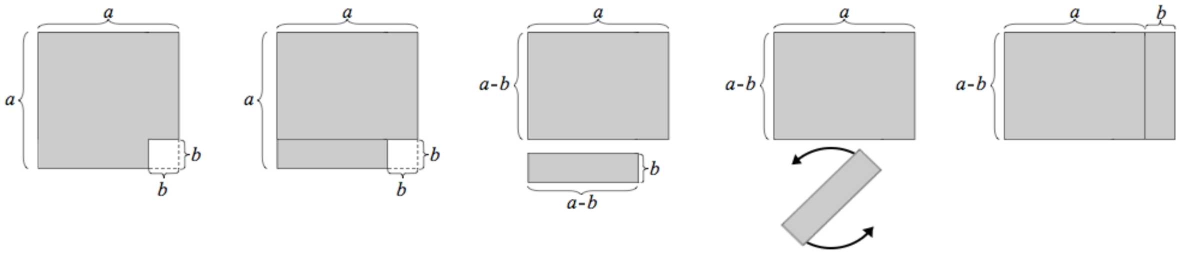
A cut is made, splitting the region into two rectangular pieces, as shown in the second diagram.

The larger piece, at the top, has width a and height a-b. The smaller piece, at the bottom, has width a-b and height b. Now the smaller piece can be detached, rotated, and placed to the right of the larger piece.

In this new arrangement, shown in the last diagram below, the two pieces together form a rectangle, whose width is $a + b$ and whose height is $a - b$.

This rectangle's area is $(a + b)(a - b)$. Since this rectangle came from rearranging the original figure, it must have the same area as the original figure.

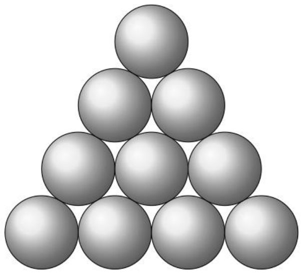
Therefore, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.



<u>Document 2</u> (transcription du document Powerpoint utilisé en classe lors de la Séance 1)

<u>Diapositive n°1</u>

Triangular number



<u>Diapositive n°</u>2

Numbers for the Ancient Greeks

A breakthrough in mathematical understanding
occurred when mathematicians realized that,
in addition to being useful as tools for calculation,
numbers are also interesting objects of study in their own right.

<u>Diapositive n°3</u>

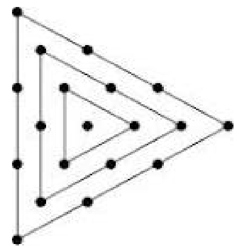
Some of the first people to study numbers as objects
were the Pythagoreans,
who were obsessed with the mystical properties of numbers.
One of the most important properties to the Pythagoreans
was a number's shape.

<u>Diapositive n°4</u>

Figurate number
A figurate number is a group of dots.
dot : point
figurate : figuré

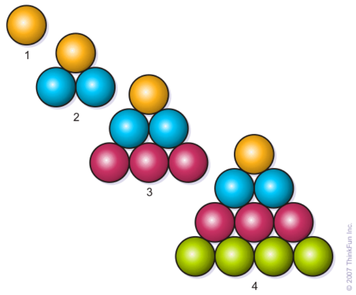
Diapositive n°5

Centered triangular number



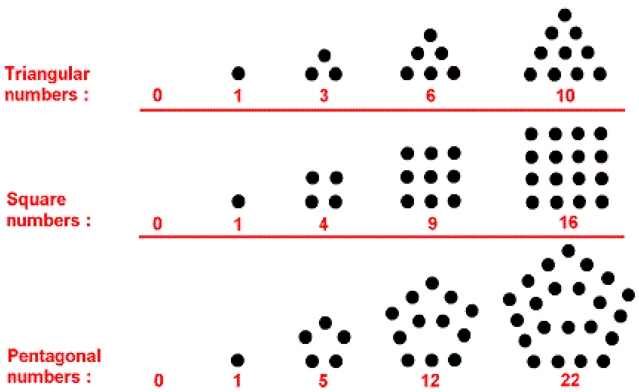
Diapositive n°6

Triangular numbers



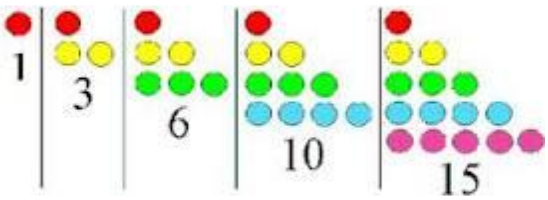
Diapositive n°7

Polygonal numbers



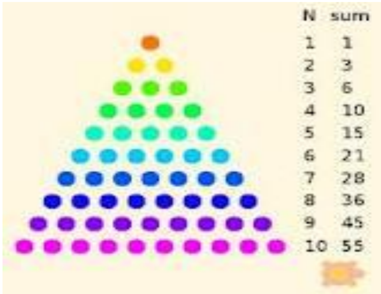
Diapositive n°8

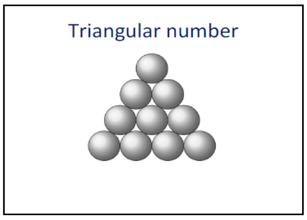
other arrangements

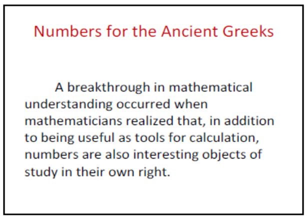


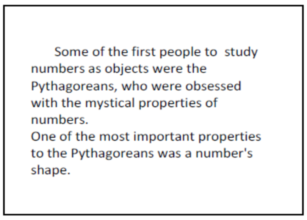
Diapositive n°9

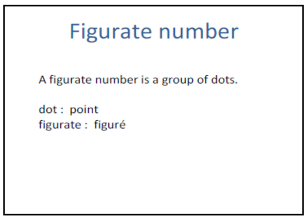
several triangular numbers simultaneously

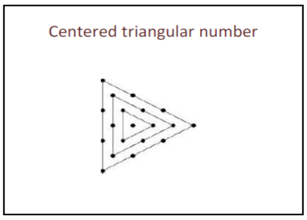


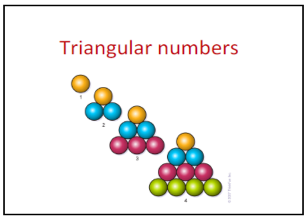








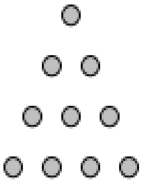




Document 3 (fourni aux élèves) Polygonal numbers

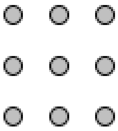
In mathematics, a **polygonal number** is a number represented as dots or pebbles arranged in the shape of a regular polygon. The dots were thought of as alphas (units). These are one type of 2-dimensional figurate numbers.

The number 10, for example, can be arranged as a triangle :

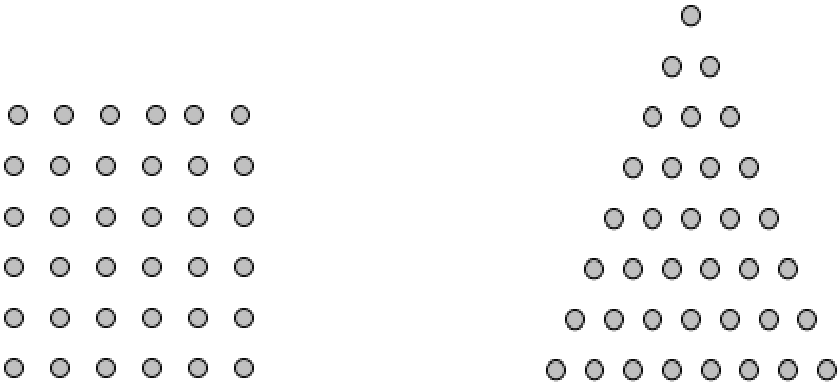


But 10 cannot be arranged as a square.

The number 9, on the other hand, can be:



Some numbers, like 36, can be arranged both as a square and as a triangle (square triangular number):



By convention, 1 is the first polygonal number for any number of sides.

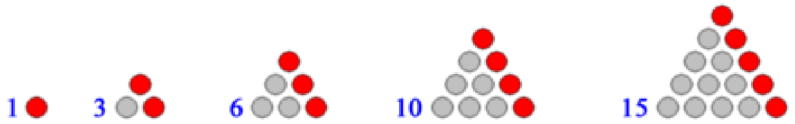
The rule for enlarging the polygon to the next size consists in

extending two adjacent arms by one point

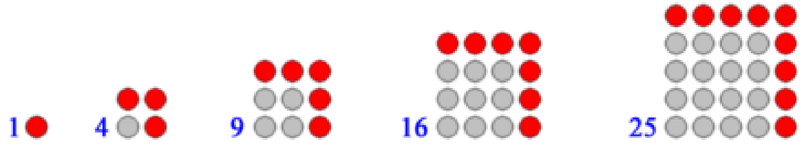
and in then adding the required extra sides between those points.

In the following diagrams, each extra layer is shown as in red:

Triangular numbers

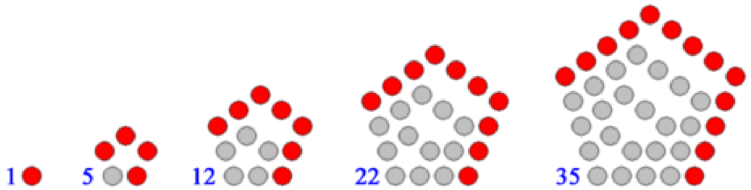


Square numbers

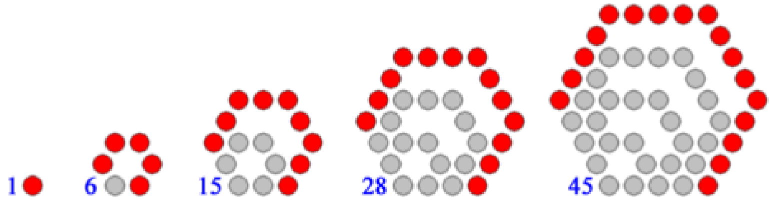


Polygons with higher numbers of sides, such as pentagons and hexagons, can also be constructed according to this rule, although the dots will no longer form a perfectly regular lattice like above.

Pentagonal numbers



Hexagonal numbers



A breakthrough in mathematical understanding occurred when mathematicians realized that, in addition to being useful as tools for calculation, numbers are also interesting objects of study in their own right.

Some of the first people to study numbers as objects were the Pythagoreans, who were obsessed with the mystical properties of numbers.

One of the most important properties to the Pythagoreans was a number's shape.

<u>Document 4</u> (fourni aux élèves)

to enlarge : agrandir, élargir

pebble : caillou, galet

required : requis, exigé

extra layer : couche supplémentaire

constructed according to a rule : construit selon une règle

lattice : treillis

breakthrough : découverte capitale, percée

to occur : se produire

in one's own right : par son seul talent, pour soi, en soi

mystical : mystique

mysticisme : doctrine, croyance fondée sur une union intime de l'homme et de la divinité, union rendue possible dans la contemplation.

doctrine religieuse essentiellement fondé sur le sentiment de la divinité plus que sur une conception rationnelle de celle-ci.

A figurate number is a group of dots.

to bring together : regrouper

to reverse, to turn round : retourner (un objet)

to put upside down : mettre à l'envers

layout : disposition, agencement

arrangement : disposition, arrangement

to move, to shift : bouger, déplacer

calculation : calcul [étymologie / calcul : du latin *calculus*, caillou]

the method's right but the calculations are wrong : le raisonnement est bon mais le calcul est faux

<u>Document 5</u> (transcription du document Powerpoint effectivement utilisé en classe pour la Séance 1 bis)

<u>diapositive n° 1</u>

Warm-up

<u>diapositive n° 2</u>

In mathematics,
a polygonal number
is a number
represented as dots or **???????** arranged in the shape
of a **???????** polygon.

<u>diapositive n° 3</u>

In mathematics,
a polygonal number
is a number
represented as dots or **"cherries"** arranged in the shape
of a **"red"** polygon.

<u>diapositive n° 4</u>

<u>Remember</u>:
Calculus is a Latin word
meaning "*pebble*" or *stone*
used for counting.
<u>Definition</u>: a "*regular"* polygon is
a polygon that has *all sides equal*
and *all interior angles equal*.

<u>diapositive n° 5</u>

In mathematics,
a polygonal number
is a number
represented as dots or **pebbles** arranged in the shape
of a **regular** polygon.

<u>diapositive n° 6</u>

What are the next **3** triangular numbers?

What **rule**

do you apply to get the next numbers?

diapositive n° 7

We add 6 to the 5th number , then 7 to the 6th , 8 to the 7th.

We add « 1 more unit » to the rank and add the obtained number to the previous triangular number.

diapositive n° 8

One among the first 8

triangular numbers

(i.e. 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36)

is « particular ».

What is this number,

and *in what respect*

is it « particular »?

diapositive n° 9

Some numbers, like **36**,

can be arranged both as a **??????**

and as a **????????**

diapositive n° 10

Some numbers, like 36,

can be arranged both as a **square** and as a **triangle.**

diapositive n° 11

Isn’t it funny

to say that something

is *triangular* and *square*

at the same time?

diapositive n° 12

Try to explain

in what respect

we can say that

a figurate number

(such as 36)

is square and triangular.

diapositive n° 13

Each figurate number has a certain numerical value.

Each figurate number corresponds

to a certain amount of dots.

We say that the number

(corresponding to a numerical value)

is triangular

if the dots can be arranged

so as to form a triangular pattern.

But in some cases, the same number of dots

can be arranged as a square.

diapositive n° 14

The possibility for some numbers (of dots)

to be arranged in different ways

justifies the fact

that a number is sometimes

either triangular or square or else…

diapositive n° 15

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36

6 x 6 = 36

A triangular number

is the ??? of ??????????? integers

while a square number

is the ??????? of an integer

by ?????? .

diapositive n° 16

A triangular number

is the **sum** of **consecutive** integers

while a square number

is the **product** of an integer

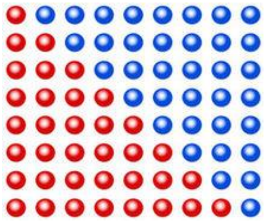
by **itself**.

diapositive n° 17

As the saying goes:

"Strength lies in unity"

diapositive n° 18



A rectangular number is made up of two identical triangular numbers.

We can count the total number of dots easily.

diapositive n° 19

By bringing together

2 identical triangular numbers

we get a rectangular number

Le document conçu initialement est un ensemble de diapositives pour lesquelles il était envisagé que toutes ne soient pas nécessairement utilisées comme support d'interactions orales (voir précédemment pour le support effectivement utilisé). Par conséquent, certaines d'entre elles ont été réservées à la constitution d'un document de synthèse (voir ci-dessous), obtenu une fois l'ensemble imprimé en pdf.

Warm-up

In mathematics,
a polygonal number
is a number
represented as dots or
??????? arranged in the shape
of a ??????? polygon.

We add 6 to the 5th number ,
then 7 to the 6th , 8 to the 7th.

We add « 1 more unit » to the rank and add the obtained number to the previous triangular number.

One among the first 8
triangular numbers
(i.e. 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36)
is « particular ».

What is this number,
and *in what respect*
is it « particular »?

In mathematics,
a polygonal number
is a number
represented as dots or
“cherries” arranged in
the shape
of a **“red”** polygon.

Remember:

Calculus is a Latin word
meaning *“pebble”* or *stone*
used for counting.

Definition: a *“regular”* polygon is
a polygon that has *all sides equal*
and *all interior angles equal*.

Some numbers,
like **36**,
can be arranged
both as a **??????**
and as a
????????

Some numbers,
like 36,
can be
arranged both
as a **square** and
as a **triangle.**

In mathematics,
a polygonal number
is a number
represented as dots or
pebbles arranged in the
shape
of a **regular** polygon.

What are the next **3**
triangular numbers?

What **rule**
do you apply to get
the next numbers?

Isn't it funny
to say that something
is *triangular* and *square*
at the same time?

Try to explain
in what respect
we can say that
a figurate number
(such as 36)
is square and triangular.

Each figurate number has a certain numerical value.
Each figurate number corresponds
to a certain amount of dots.
We say that the number
(corresponding to a numerical value)
is triangular
if the dots can be arranged
so as to form a triangular pattern.
But in some cases, the same number of dots
can be arranged as a square.

The possibility for some numbers (of dots)
to be arranged in different ways
justifies the fact
that a number is sometimes
either triangular or square or else…

By bringing together
2 identical triangular numbers
we get a rectangular number.

$$2T_4 = 4(4+1)$$

$$T_4 = \frac{4(4+1)}{2}$$

Try to *generalize*
the previous observation.

We intend to express T_n
in terms of n .

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36

6 x 6 = 36

A triangular number
is the ??? of ?????????? integers
while a square number
is the ??????? of an integer
by ?????? .

A triangular number
is the **sum** of
consecutive integers
while a square number
is the **product** of an
integer
by **itself**.

Generalization

$$2T_n = n(n+1)$$

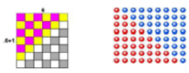
$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Question:

Is there a relation
between a *square number*
and *triangular numbers*?

As the saying goes:

« strength lies in unity »



total = 9 x 8 dots

Hence T_8 = ………

Here is a saying
that may be of help to you:
« divide and rule »

We have to divide in order to rule.

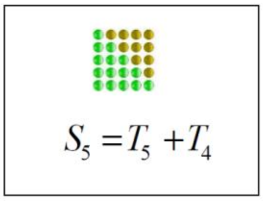
to rule = to command
a saying : un dicton

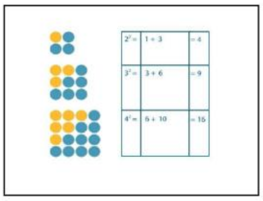
As is said in the saying
start by considering
the following square number
and divide*!*

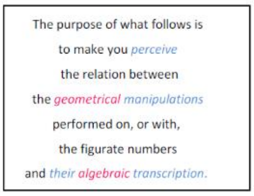
S_5

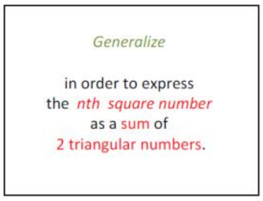
Then write :

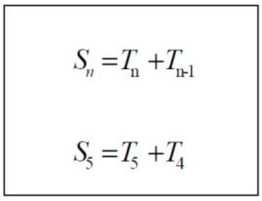
S_5 = …. + ….

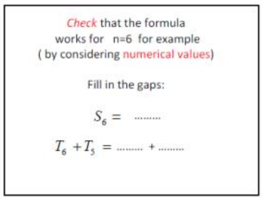

$S_5 = T_5 + T_4$

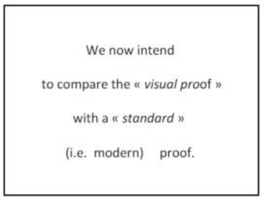

$2^2 =$
1 + 3
= 4
$3^2 =$
3 + 6
= 9
$4^2 =$
6 + 10
= 16


The purpose of what follows is
to make you *perceive*
the relation between
the *geometrical manipulations*
performed on, or with,
the figurate numbers
and *their algebraic transcription*.


Generalize
in order to express
the *nth square number*
as a sum of
2 triangular numbers.

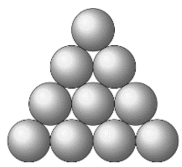

$S_n = T_n + T_{n-1}$
$S_5 = T_5 + T_4$


Check that the formula
works for n=6 for example
(by considering numerical values)
Fill in the gaps:
$S_6 =$ ....
$T_6 + T_5 =$ .... + ...


We now intend
to compare the « *visual proof* »
with a « *standard* »
(i.e. modern) proof.

Document 6 Transcriptions de la Séance 1 bis et commentaires

Phase interactive d'introduction avec support Powerpoint

1.	P	So, let's start. I want you to take an active part in this lesson. (quelques explications supplémentaires sur le thème/ non retranscrites)	
2.	P	(s'adressant à E1) Can you tell me what we did last time ?	
3.	E1	We saw a picture with balls	
4.	P	What were the terms I used?	
5.	E2	Rows and columns	
6.	E3	In a rectangle	
7.	P	Just a rectangle, with only the outlines?	
8.	P	Let me switch on the Interactive Board (affiche la première diapositive) This is the first slide	<u>diapositive n° 1</u> **Warm-up** 
9.	P	We spoke of imaginary lines… Did we see a real triangle? What is a real triangle?	
10.	E1	A real triangle is defined by three points	
11.	P	A triangle is made up of sides, of vertices … Does a point exist?	
12.	E5	No because… (hésite)	
13.	P	(commentaires non retranscrits) What are the missing words? Can you match the question marks with a word?	<u>diapositive n° 2</u> In mathematics, a polygonal number is a number represented as dots or **???????** arranged in the shape of a **???????** polygon.

14.		Try to guess the missing words What do you suggest? A dot is already an abstraction Something not visible To you, a dot is like a little circle Do you accept dots as objects?	
15.		What sort of polygon do we actually consider?	
16.	E3	regular	
17.	P	Let's check (P affiche la diapositive suivante) (P lit le contenu de la diapositive)	<u>diapositive n° 3</u> In mathematics, a polygonal number is a number represented as dots or **"cherries"** arranged in the shape of a **"red"** polygon.
18.	P	Can you tell me the origin of the word calculus? Nobody knows? (P lit le contenu de la diapositive) Take a look at the next slide	<u>diapositive n° 4</u> <u>Remember</u>: *Calculus* is a Latin word meaning "*pebble*" or *stone* used for counting. <u>Definition</u>: a "*regular"* polygon is a polygon that has *all sides equal* and *all interior angles equal*.
19.	P	[…] Arranged in the shape of a regular polygon. What does the adjective *regular* mean? Can you rephrase?	<u>diapositive n° 5</u> In mathematics, a polygonal number is a number represented as dots or **pebbles** arranged in the shape of a **regular** polygon.
20.	E6	Same dimensions […]	
21.		He has…	

22.	P	It’s not a person, it’s a polygon so, say “it” and not “he”	
23.	P	You could describe similar things in three dimensions? In this case we’d talk about a regular **polyhedron**.	
24.	P	Give me an example of a polygon	
25.	E7	A square	
26.		We see that it can be inscribed in a circle	
27.		Remind me of what we said about the Ancient Greeks. (s’adresse à un autre élève) What did they do? concerning numbers	
28.	E8	They made pictures for numbers	
29.	P	What sort of numbers?	
30.	E1	triangular	
31.	P	Here are the first 5 triangular numbers. By the way, we say the first three or the first five. “Les cinq premiers” In English, the order is reversed. What are the next three. Take a look at the slide. What rule do you apply to get the next numbers?	<u>diapositive n° 6</u>  What are the next **3** triangular numbers? What **rule** do you apply to get the next numbers?
32.	E9	21	
33.	P	Right (s’adresse à E10) And the following ones ?	
34.	E10	28 and …36	
35.	P	This is mental calculation. You’re right. So, you seem to understand the rule. Who can explain the rule?	
36.	E3	You have to add a number…you can divide…	
37.	P	No	
38.	E1	If you take … […] you add the precedent number of **the** pebbles…	
39.	P	To explain things, it’s better to denote things	
40.	E1	To calculate the sixth, you take the fifth. T_5 and you add 6.	

41.	P	What is 6 with respect to the previous number. You add one more unit to the ...? To the what…? (attente)… (personne ne répond) To the rank. “Le rang” You recognize the rank when you say T_5 (P insiste sur **“five”**)	
42.	P	We add one more unit to the rank and add it to the previous number	diapositive n° 7 We add 6 to the 5th number , then 7 to the 6th , 8 to the 7th. ***We add « 1 more unit » to the rank and add the obtained number to the previous triangular number.***
43.	P	(P lit le contenu de la diapositive) One among the first 8 triangular numbers (i.e. 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36) is « particular ». Which one?	diapositive n° 8 One among the first 8 triangular numbers (i.e. 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36) is « particular ». What is this number, and *in what respect* is it « particular »?
44.	E1	36 Because it’s a square	
45.	P	(P montre la diapositive suivante) (P lit le début) Some numbers, like **36**, can be arranged both as a **…** (attente)…	diapositive n° 9 Some numbers, like **36**, can be arranged both as a **??????** and as a **????????**
46.	E3		As a square and a triangle
47.	P	(P montre la diapositive suivante) Right	diapositive n° 10 Some numbers, like 36,

			can be arranged both as a **square** and as a **triangle.**
48.		Isn’t it funny to say that something is *triangular* and *square* at the same time? In maths, it makes sense.	diapositive n° 11 Isn’it funny to say thatsomething is triangular and square at the same time?
49.	E1	Can we represent this phenomenon?	
50.	P	Look at the next slide	
		(P affiche la diapositive)	diapositive n° 12
		Try to explain in what respect you can say that a figurate number is square and triangular. It’s just a matter of description. Remember A number was just a group of … Of what?	*Try to explain* in what respect we can say that a figurate number (such as 36) is square and triangular.
51.	P	Dots	
52.	P	What can you do with objects?	
53.	E10	We can play…	
54.	P	What kind of game?	
55.	E11	Basket ball	
56.	P	No	
57.	E5	Make a picture	
58.	p	A number, seen as a group of dots, can be arranged as…	
59.	P	(P montre la diapositive suivante)	diapositive n° 13 Each figurate number has a certain numerical value. Each figurate number corresponds to a certain amount of dots. We say that the number (corresponding to a numerical value)

is triangular
if the dots can be arranged
so as to form a triangular pattern.
But in some cases, the same number of dots
can be arranged as a square.

60. (commentaires non retranscrits)

diapositive n° 14
The possibility for some numbers (of dots)
to be arranged in different ways
justifies the fact
that a number is sometimes
either triangular or square or else…

61. idem

diapositive n° 15
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36
6 x 6 = 36
A triangular number
is the ??? of ??????????? integers
while a square number
is the ??????? of an integer
by ?????? .

62. Idem …

…

Voir Document 5 pour les dernières diapositives et la transcription de leur contenu

<u>Document 7</u> (fourni aux élèves)

- Some numbers, like 36, can be arranged both as a square and as a triangle.

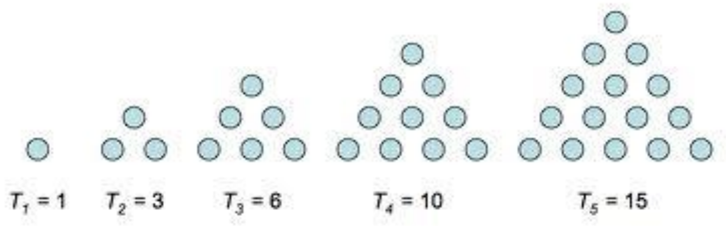
  Certains nombres, comme 36, peuvent être représentés/(mis sous la forme) à la fois d'un carré ou d'un triangle.
- in what respect : *dans quelle mesure.*
- amount of dots : *quantité de points.*
- so as to form a triangular pattern : *afin de former un motif triangulaire.*
- dots arranged in different ways : *points placé(s)/ disposé(s) de diverses manières.*
- A triangular number is the sum of consecutive integers while a square number is the product of an integer by itself.

  Un nombre triangulaire est la somme d'entiers consécutifs tandis qu'un carré est le produit d'un entier par lui-même.
- a saying : *un dicton*
- as the saying goes : *comme dit le proverbe.*
- "Strength lies in unity": *"l'union fait la force".*
- « divide and rule » : « *diviser pour régner* ».
- to rule = to command
- the n-th square number : le n-ième nombre carré.
- We now intend to … : *nous avons maintenant l'intention de …*
- The purpose of what follows is to make you perceive the relation between the geometrical manipulations performed on, or with, the figurate numbers and their algebraic transcription.

  L'objet de ce qui suit est de vous faire percevoir la relation entre les manipulations géométriques réalisées sur, ou avec, les nombres figurés et leur transcription algébrique.
- to move sthg closer to sthg : *rapprocher qqch de qqch.*
- to get closer (to) : *se rapprocher (de)* .

<u>Document 8</u> **Consignes données lors de la Situation des Nombres Triangulaires**

<u>GROUP WORK INSTRUCTIONS</u>



1) Respect the work of others by *keeping your voices down*.
2) *Listen to and respect* your team mates.
3) *No French* is to be spoken in the class.
4) Inside the team some works / tasks can be divided up.

   Remember that there is a time when you have to coordinate your results.

   The motto of a team is: "*all for one, one for all*"
5) At the end of your research, the *spokesperson will present* the results of the work.

<u>Part I</u>

Denote by T_n the nth triangular number.

Recall : $T_1 = 1$

The <u>purpose</u> is to *calculate the numerical value of* T_{100} *directly, i.e. without calculating all the previous numbers.*

<u>Hint</u>: *use pictures, arrangements, bring triangular numbers together*.

Present *on a poster* the different steps of your research and try to justify your calculations.

Never forget that "strength lies in unity".

<u>Part II</u>

Can we obtain 5^2 from triangular numbers?

What about other square numbers?

Present *on a poster* the different steps of your research and try to justify your calculations.

<u>Document 9</u> Test donné aux élèves de Première européenne à l'issue de la séquence des Nombres Triangulaires

Durée : 1 heure

1) What is a <u>*figurate number*</u> (a polygonal number)?
   Give an example. Explain in what way a number can be said to be "triangular" for example.
   Is the notion of figurate number a modern one?...

2) Did you enjoy working in group and if so, why?

3) Imagine yourself as a teacher (but only momentarily!).
   What <u>*instructions*</u> would you give to your pupils to let them work in proper conditions?

4) During a group-work session, you showed that a square number is made up of two triangular numbers.
   Describe in a few words the manipulations you then performed on figurate numbers.

5) Here is the <u>*algebraic*</u> way of proving that the expression of the nth triangular number T_n in terms of n is $\frac{n(n+1)}{2}$:

$$Tn = 1 \quad + \; 2 \quad + \; 3 \quad + \; .... \quad + \mathrm{n}$$

$$Tn = \mathrm{n} \quad + \; (\mathrm{n}-1) + \; (n-2) + \; .... \quad +1 \quad \text{(reversed order)}$$

hence, by adding side to side and by columns we get:

$$2Tn = (\mathrm{n}+1) + (\mathrm{n}-1+2) + (\mathrm{n}-2+3) + ... + (\mathrm{n}+1)$$

notice that there are n terms in the sum, each of them equal to (n+1)

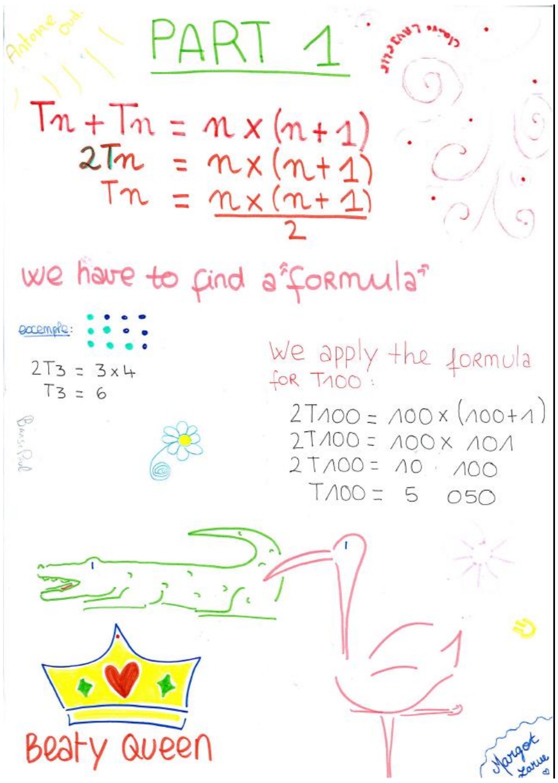
that is : $2Tn = n(n+1)$

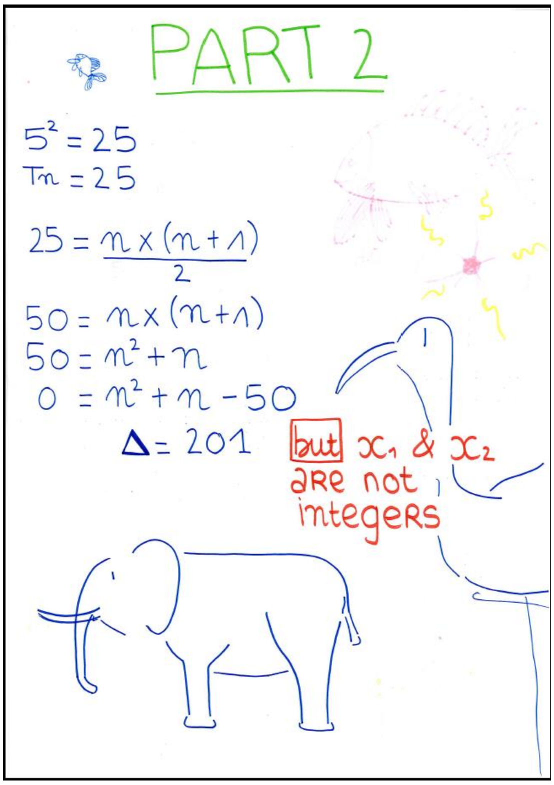
and therefore : $Tn = \frac{n(n+1)}{2}$

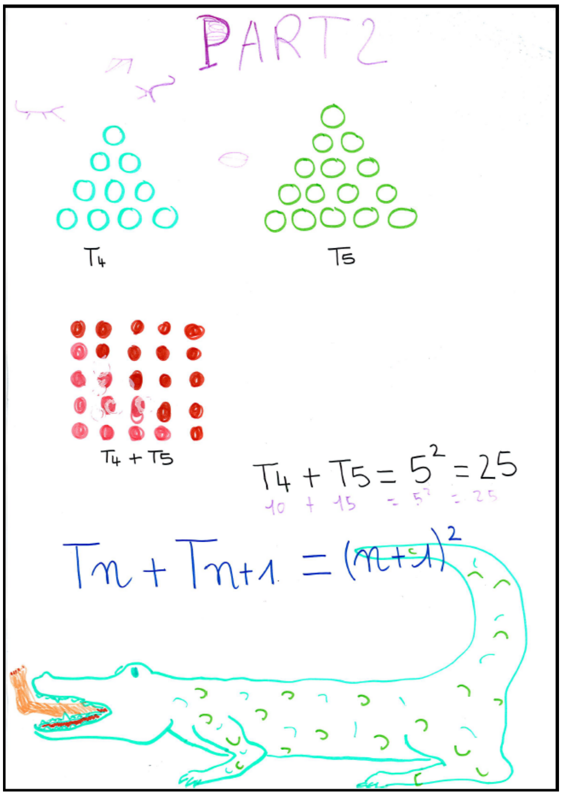
Try to establish a <u>*correspondence*</u> between this proof and the <u>*manipulations*</u> you performed on triangular numbers in order to get the general expression in terms of *n*.

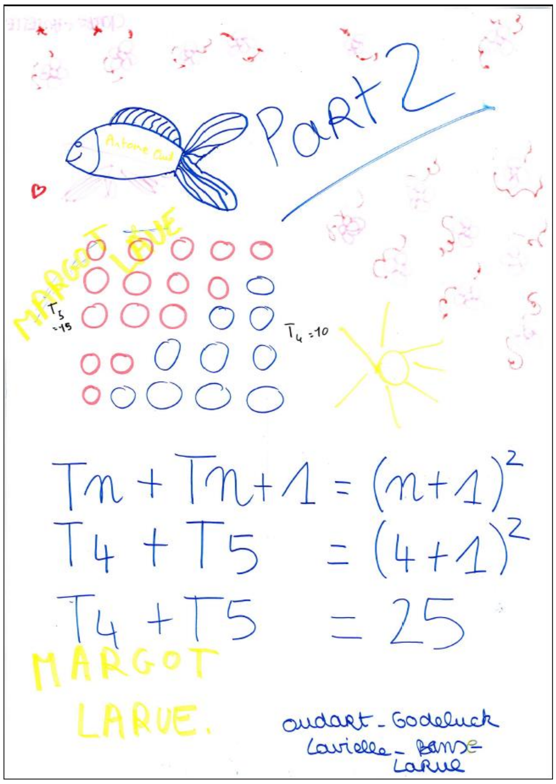
Key-words : adding / rectangular number / number of dots / reversing the order / bringing together / putting upside down …

Posters réalisés par la classe de première européenne

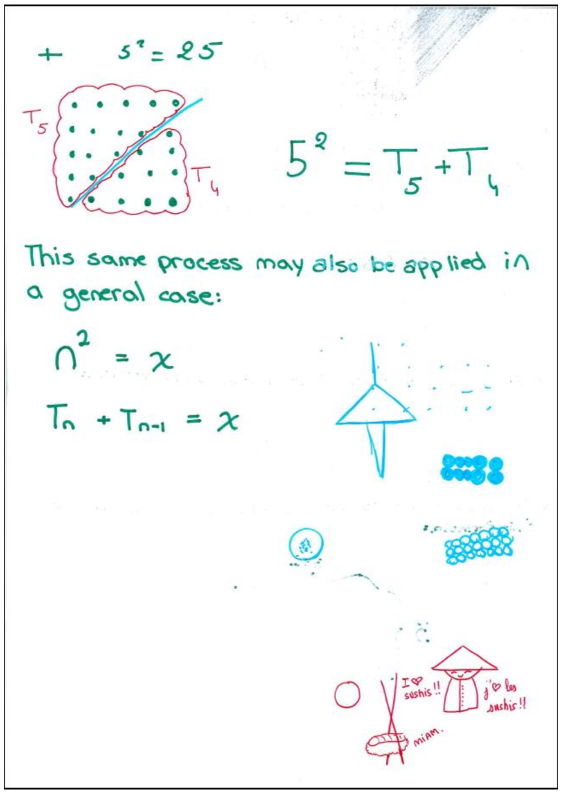


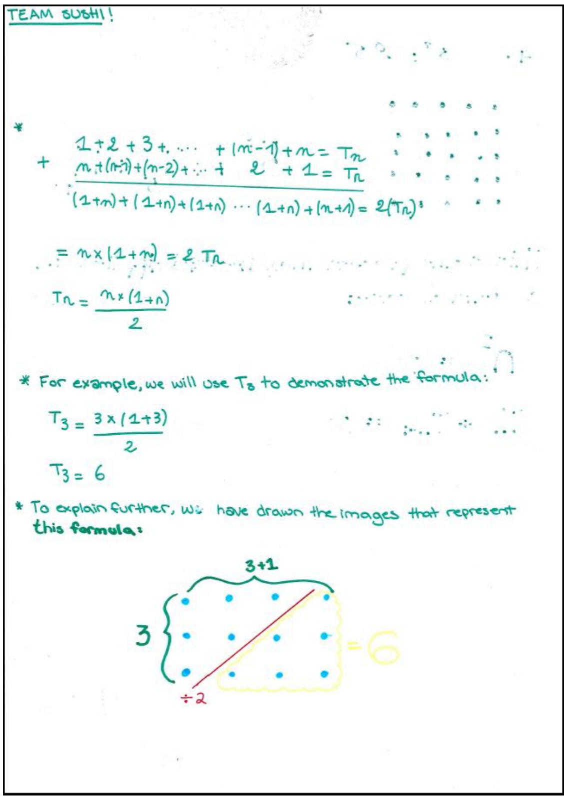


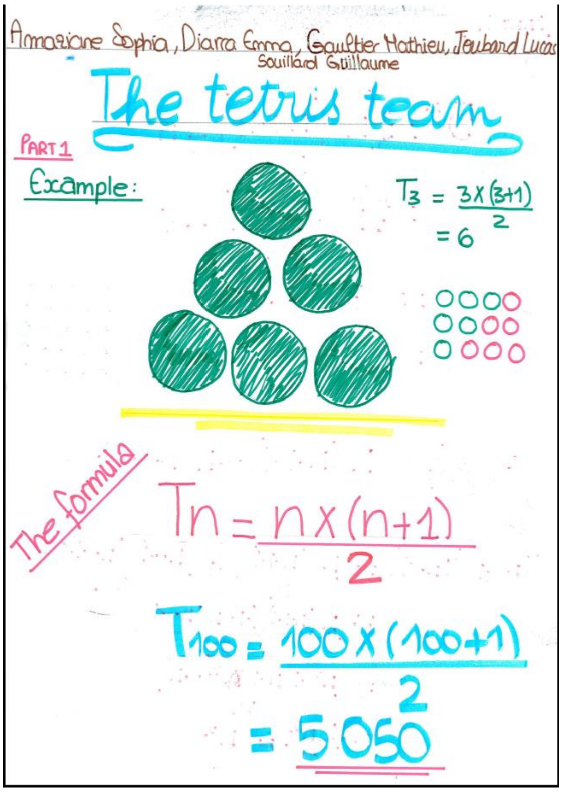


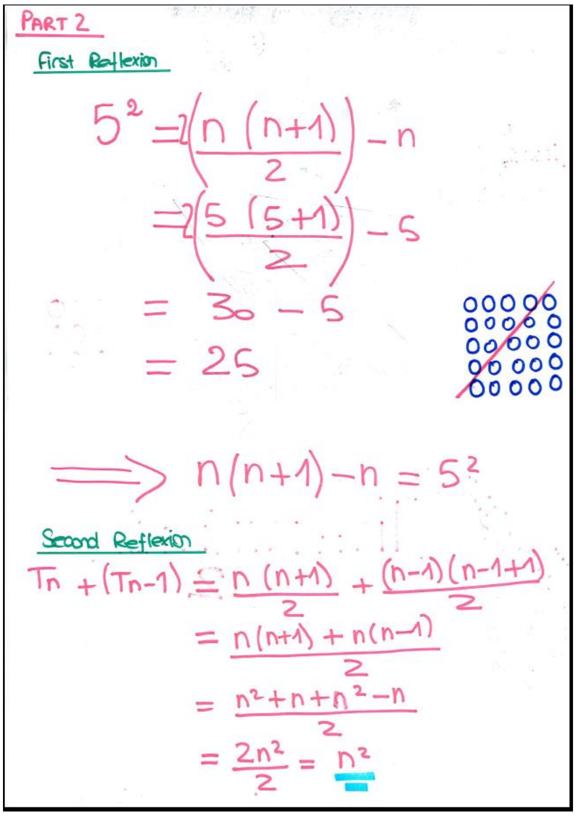


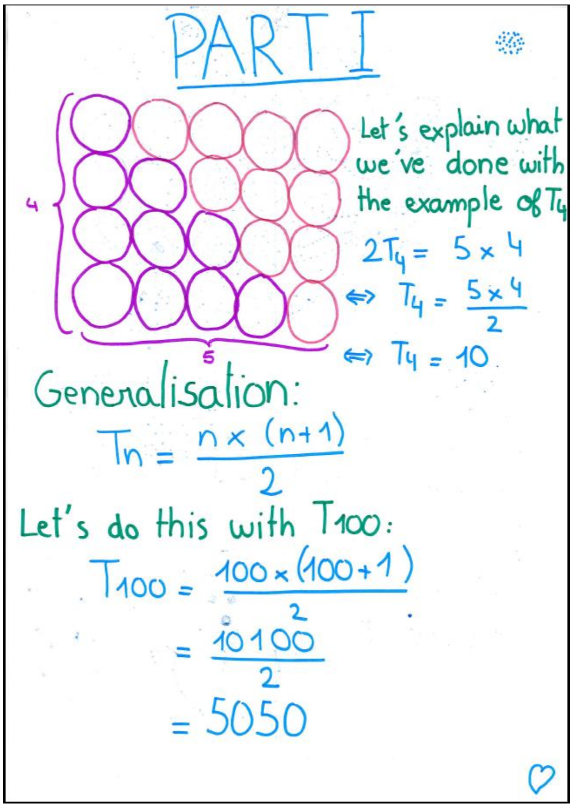

PART 2

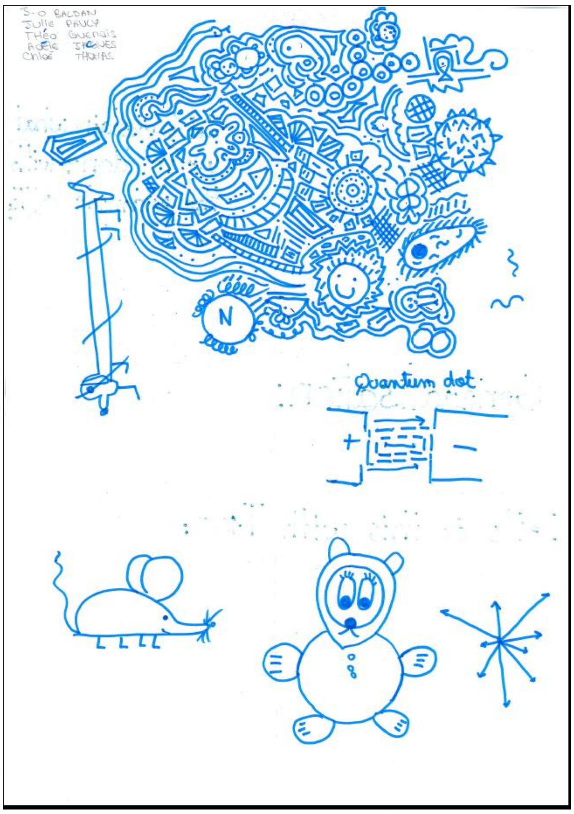

+ $5^2 = 25$
T_5
T_4
$5^2 = T_5 + T_4$
This same process may also be applied in a general case:
$n^2 = x$
$T_n + T_{n-1} = x$
I ♡ sushis !!
j'♡ les sushis !!
miam.

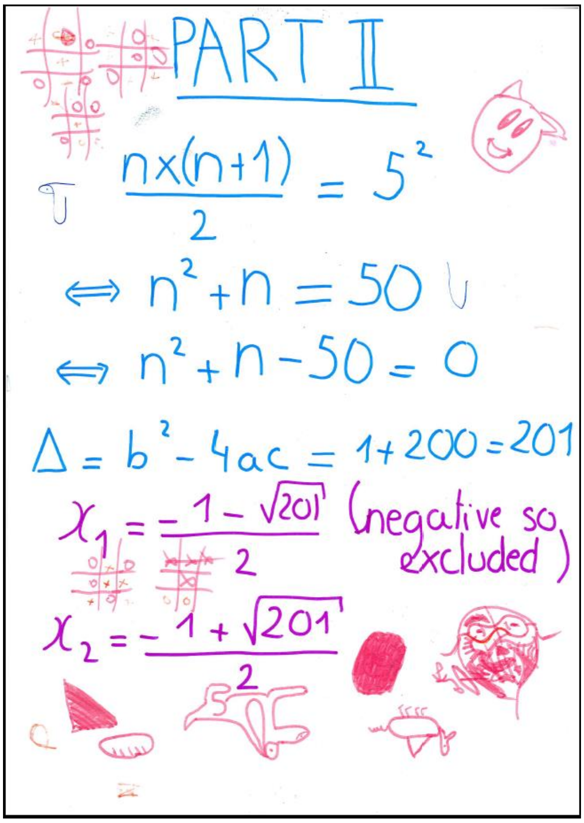

TEAM SUSHI !
$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = T_n$
$+ \; n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = T_n$
$(1+n) + (1+n) + (1+n) \dots (1+n) + (n+1) = 2(T_n)$
$= n \times (1+n) = 2\,T_n$
$T_n = \frac{n \times (1+n)}{2}$
* For example, we will use T_3 to demonstrate the formula:
$T_3 = \frac{3 \times (1+3)}{2}$
$T_3 = 6$
* To explain further, we have drawn the images that represent this formula:
3+1
3
$\div 2$
=6

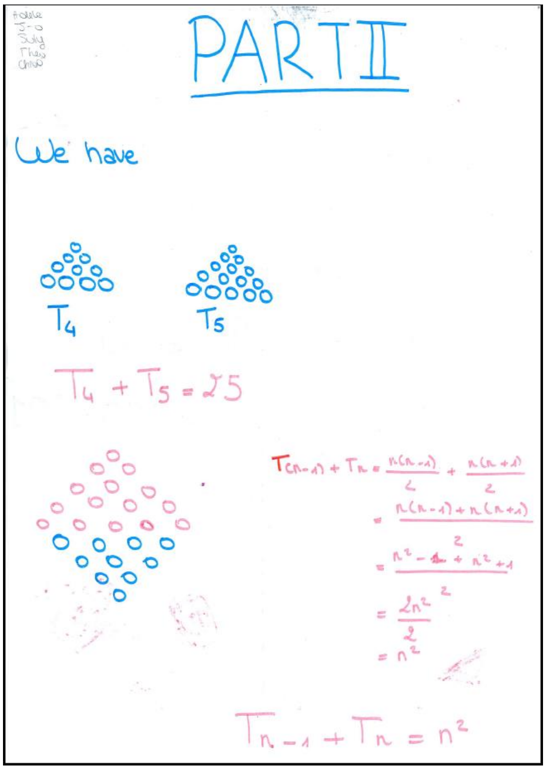

Amaziane Sophia, Diarra Emma, Gaultier Mathieu, Jouband Lucas
Souillard Guillaume
The tetris team
PART 1
Example:
$T_3 = \frac{3 \times (3+1)}{2}$
$= 6$
The formula
$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$
$T_{100} = \frac{100 \times (100+1)}{2}$
$= 5\,050$

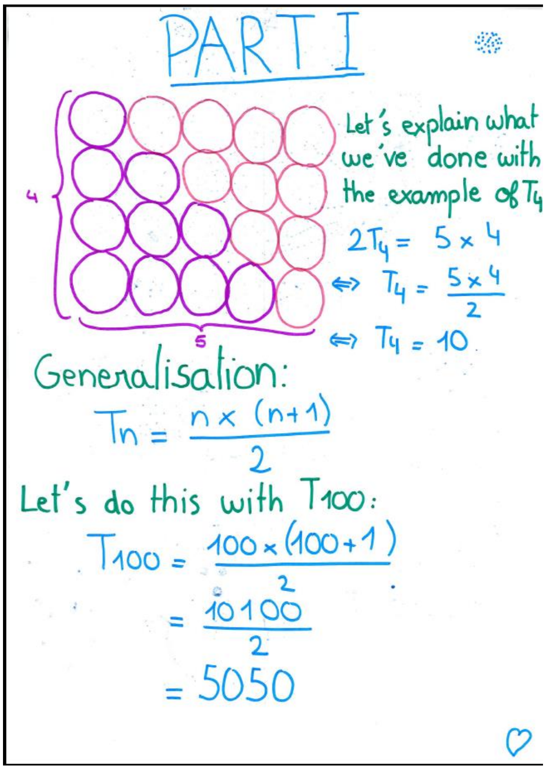

PART 2
First Reflexion
5² = 2(n(n+1)/2) − n
= 2(5(5+1)/2) − 5
= 30 − 5
= 25
⟹ n(n+1) − n = 5²
Second Reflexion
Tn + (Tn−1) = n(n+1)/2 + (n−1)(n−1+1)/2
= (n(n+1) + n(n−1))/2
= (n²+n+n²−n)/2
= 2n²/2 = n²


PART I
4
5
Let's explain what we've done with the example of T4
2T4 = 5 × 4
⟺ T4 = 5 × 4 / 2
⟺ T4 = 10
Generalisation:
Tn = n × (n+1) / 2
Let's do this with T100:
T100 = 100 × (100+1) / 2
= 10100 / 2
= 5050


N
Quantum dot
+
−


PART II
n×(n+1) / 2 = 5²
⟺ n² + n = 50
⟺ n² + n − 50 = 0
Δ = b² − 4ac = 1 + 200 = 201
x1 = (−1 − √201) / 2 (negative so excluded)
x2 = (−1 + √201) / 2


PART II
We have
T_4
T_5
$T_4 + T_5 = 25$
$T_{(n-1)} + T_n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$
$= \frac{n(n-1) + n(n+1)}{2}$
$= \frac{n^2 - n + n^2 + n}{2}$
$= \frac{2n^2}{2}$
$= n^2$
$T_{n-1} + T_n = n^2$


PART I
4
5
Let's explain what we've done with the example of T_4
$2T_4 = 5 \times 4$
$\Leftrightarrow T_4 = \frac{5 \times 4}{2}$
$\Leftrightarrow T_4 = 10$
Generalisation:
$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$
Let's do this with T_{100}:
$T_{100} = \frac{100 \times (100+1)}{2}$
$= \frac{10100}{2}$
$= 5050$

ANNEXE 2 : Cartes mentales / Mind maps

Thème : signe des expressions algébriques (classe de première européenne)

1) Définition et caractéristiques d'une carte mentale

Inventée par le psychologue Tony Buzan, la carte mentale (aussi appelée carte heuristique) permet d'organiser ses connaissances sur un sujet.

Elle repose sur un principe de visualisation de liens entre les idées ou les concepts et peut facilement être réalisée, que ce soit sur papier, à l'aide de crayons ou de feutres, ou bien à l'aide d'un logiciel dédié (de type Freemind ou Xmind par exemple).

Un de ses avantages, et non le moindre, est de permettre une vision à la fois détaillée et globale d'un sujet.

Pour le propos de notre thèse, nous retiendrons cependant l'intérêt didactique qui réside dans les processus-mêmes de création ou d'analyse d'une telle carte.

Nous laissons de côté, en revanche, d'autres types d'avantages qu'elle peut procurer, à savoir la facilitation de la prise de notes par exemple, ou encore la mémorisation ou la restitution d'informations dans une perspective de révision avant le passage d'un examen.

2) Utilisation dans une perspective didactique orientée-tâche.

D'un point de vue didactique, l'élaboration de cartes mentales peut faire l'objet d'un travail en groupe, à propos d'un thème d'étude préalablement fixé.

Inversement, la donnée d'une carte mentale peut donner lieu à une discussion quant à la nature des relations impliquées, qui sont certes visualisées, mais le plus souvent ne sont pas explicitées.

Ces relations peuvent être de types très différents et leur explicitation peut constituer, elle aussi, un objectif didactique dans le cadre d'une présentation orale par exemple.

A cet effet, il semble nécessaire que les élèves aient été auparavant, une ou plusieurs fois, confrontés à ce type de démarche et qu'ils disposent d'un répertoire suffisant en ce qui concerne la description des différents types de relations ou de catégories.

Néanmoins, il ne faut pas perdre de vue qu'une relation entre deux concepts d'une carte mentale, lorsqu'elle n'est pas explicitée, peut tout-à-fait être verbalisée de façon non univoque.

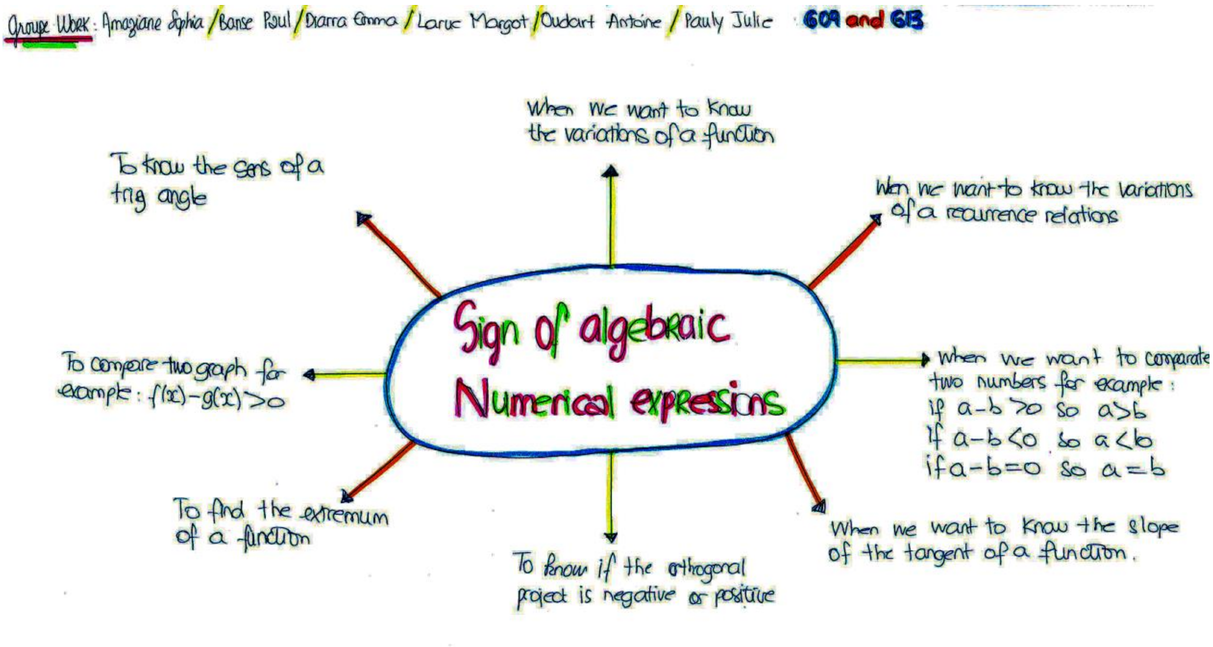
On pourra donc dans un premier temps se focaliser sur des relations élémentaires, de type causal puis, progressivement, dans une démarche métacognitive, interpréter les relations (matérialisées par des traits) comme des consignes éventuelles, voire des stratégies, permettant par exemple de résoudre tel ou tel type de problèmes, ou encore d'accomplir telle ou telle tâche.

Cela sera sans doute aussi l'occasion de faire prendre conscience, par les élèves, de la structuration cognitive non linéaire de nos connaissances mémorisées. On pourra d'ailleurs contraster celle-ci avec la linéarité du processus sémiotique de la pensée lorsque celle-ci se traduit par une verbalisation intériorisée ou oralisée.

3) Production d’une carte mentale en contexte CLIL

Le document ci-dessous est le résultat d’un travail en groupes.

Un responsable de chaque groupe devait présenter le résultat de sa recherche devant la classe.

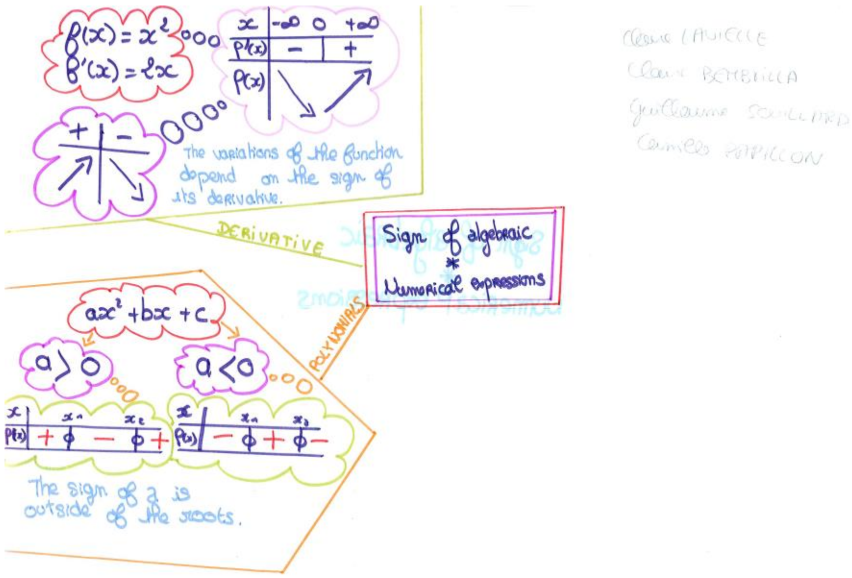


A l’issue de l’activité les élèves ont reçu un document présentant ce qui avait été évoqué lors de la phase d’institutionnalisation. Les erreurs de nature lexicale ou syntaxique apparaissant sur les cartes produites par les élèves ont bien évidemment été rectifiées ! Les élèves n’avaient pas l’habitude de constituer de telles cartes et n’ont pas eu l’occasion de réfléchir à l’avance sur le thème proposé. Ce n’est donc pas une carte dont l’objectif serait de dresser un bilan des connaissances en fin de chapitre.

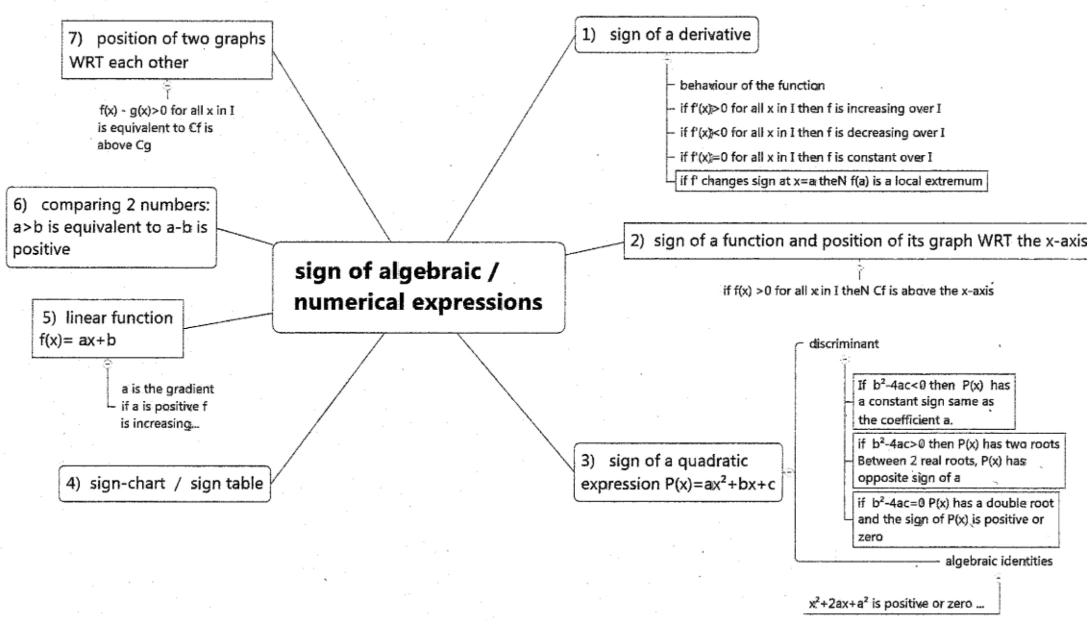
En examinant les éléments dans le sens inverse des aiguilles d’une montre (« anticlockwise ») et en commençant par le haut, on peut relever :

- *to know the variations of a function* est incorrect / on dira *to study or investigate the behaviour of a function.*
- *sens<u>e</u> of a right triangle* est calqué sur le français : on dira plutôt : *a positively oriented right triangle*
- il manqué un *s* à *graph*.
- l’élève utilise *orthogonal project* (**ion**) en pensant au produit scalaire (*dot product*).
- *comparate* est erroné et résulte d’un transfert de la forme –ate (comme dans enumerate) sur la forme correcte *compare*
- *a recurrence relation<u>s</u>* / mis à part le pluriel inapproprié, on dira plutôt *recurring pattern* ou encore *recursive pattern* / de plus, parler de variations s’appliquerait plutôt aux suites (sequences) : *in order to know if a sequence is increasing or decreasing*.

Autres cartes mentales (réalisées à la main)



Carte mentale réalisée avec freemind pour l'institutionnalisation



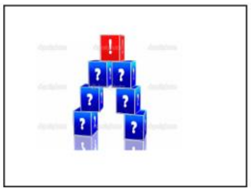
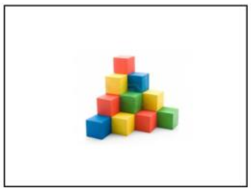
ANNEXE 3 : Situation intitulée *Somme des Carrés*

Préparation pour la séance Somme des cubes

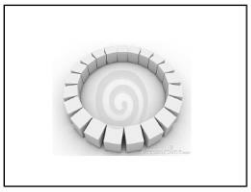
Powerpoint basé sur l'idée de *scaffolding* (suivi d'un lexique distribué aux élèves) dans le but de familiariser les élèves avec les termes tels que :

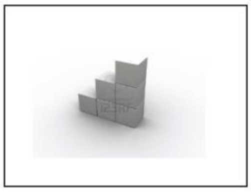
stack, pile up, arrange etc.

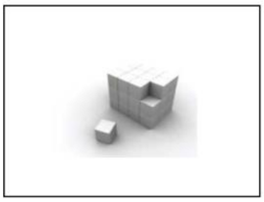
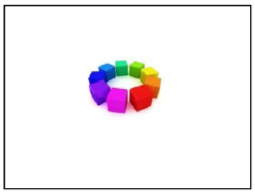
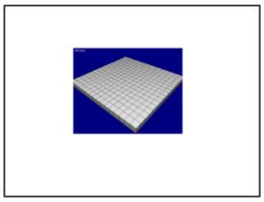
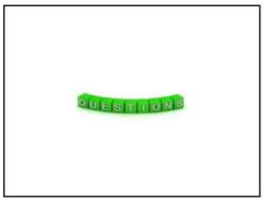


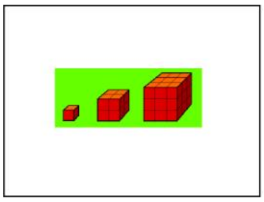









Lexique phraséologique

a heap : un tas

to assemble small identical cubes into a single cube

to be oriented, to be placed in a position

to manipulate

arrangement : arrangement disposition /

to arrange as a square: disposer sous forme de carré

so as to form … : de manière à former

to line up = to align

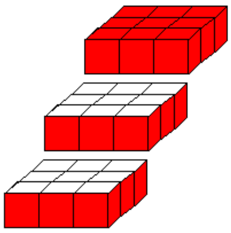
the screen displays n lined-up cubes.

to stack (up) : ranger en hauteur

to heap up : empiler (en tas)

a gift boxed set of 10 stacking cubes (largest measures 16 x 16cm)

a pyramid made of stacked up cubes



cube layers

a layer: une couche

level : niveau

to be arranged in a vertical plane

5 red cubes and 4 blue cubes are placed at random in a row.

find the probability that both end cubes are red.

to place cubes in a row

to remove : enlever / to shift : déplacer

concentric : concentrique

each sugar cube will be stacked one on top of the other in a single, vertical column

the basic piece consists of a single cube

its design also allows it to support four or more **vertically stacked cubes** in required configurations

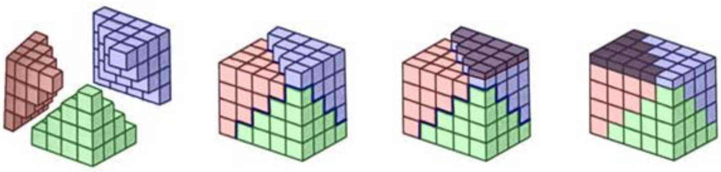
Document fourni aux élèves

Sum of consecutive square numbers : second Visual Proof

We have **already proved** that the following property is true :

$$\left(1^2+2^2+.....+n^2\right)=\frac{1}{6}\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)(2\mathrm{n}+1) \qquad \text{(E1)}$$

We did it by making a **Proof by Induction.**
We also investigated a **3D-Visual Proof based** on the grouping together of three pyramids.



Let's consider the following equality, denoted by (E2) :

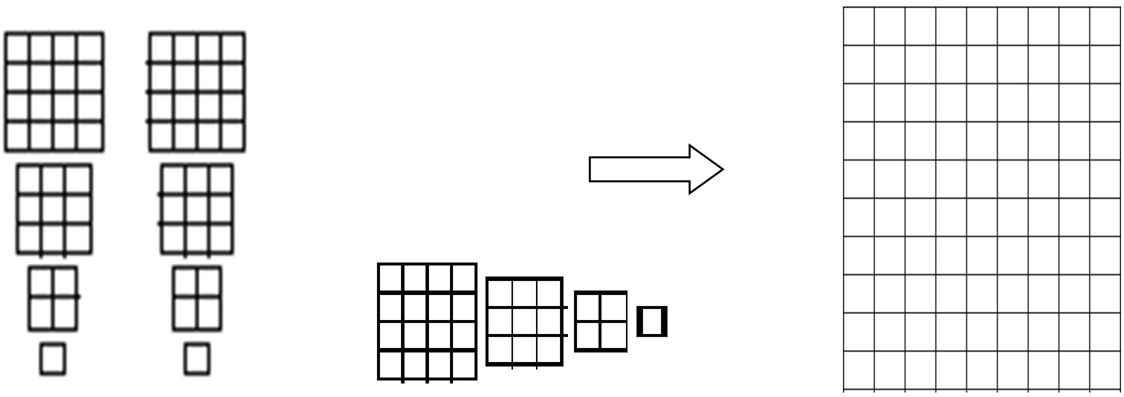
$$3\left(1^2+2^2+.....+n^2\right) = (2\mathrm{n}+1)\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}{2}$$

1) Prove that : (E1) is equivalent to (E2).
2) Then deduce that $3\left(1^2+2^2+.....+n^2\right) = (2\mathrm{n}+1)(1+2+.....+n)$.

The product $(2\mathrm{n}+1)(1+2+....+\mathrm{n})$ can be interpreted either as the area of a rectangle or as the number of squares in a rectangle whose dimensions are $(2\mathrm{n}+1)$ and $(1+2+....+\mathrm{n})$ and $3\left(1^2+2^2+.....+n^2\right)$ can be seen as 3 copies of a pyramid.

The purpose is now to elaborate a **second Visual Proof** based on the previous observations.
The arrangements of squares are no longer in 3D-space. (the former 3 pyramids are supposed to have been laid flat)

3) Considering **three copies** of the sum of square numbers (for the case n=4) ,
Show how to rearrange the squares so as to fill in the rectangle.



Hints:

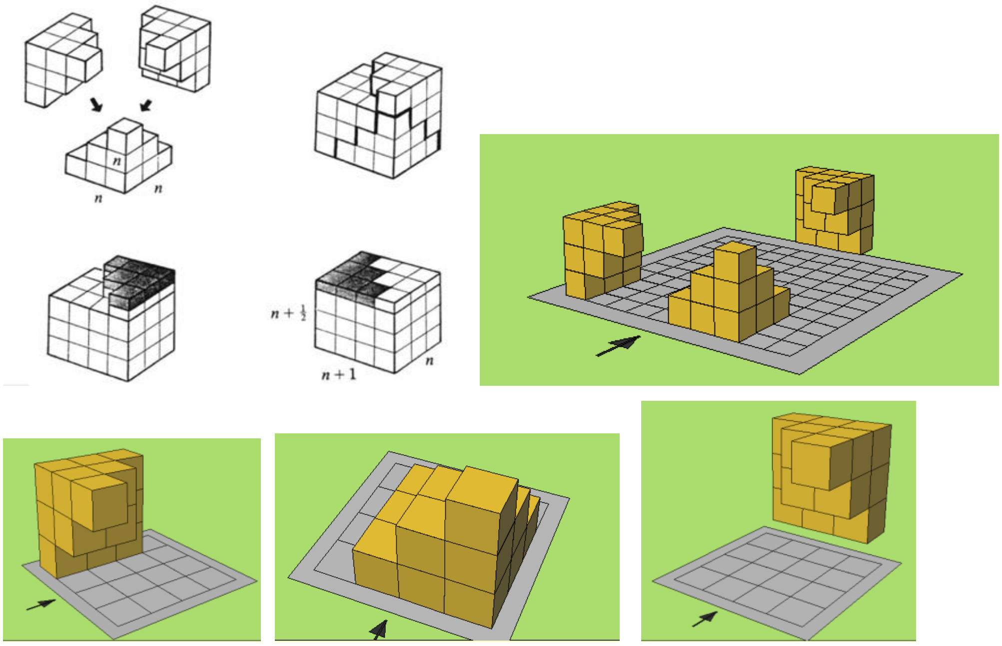
Think of ***gnomons!*** *(gnomons are hidden)* *Arrange* **methodically**! *Introduce* ***order!***

Establish ***relationships*** *(between corresponding rows, columns, gnomons, squares*)

Use colour

Première Preuve visuelle pour la Somme des Carrés

preuve en 3 D



$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3} n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$

This equality is equivalent to :

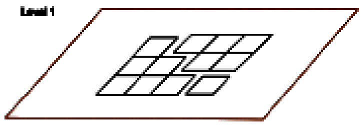
$$3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$

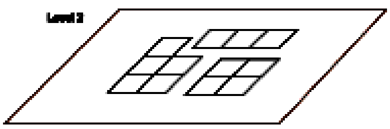
$n(n+1)(n+\frac{1}{2})$ corresponds to the volume of a parallelepiped

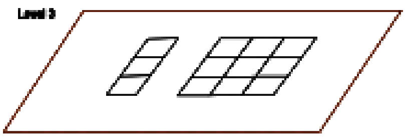
Its dimensions are : n , n+1 and n + 1/2

And $3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$ corresponds to the volume of 3 identical pyramids

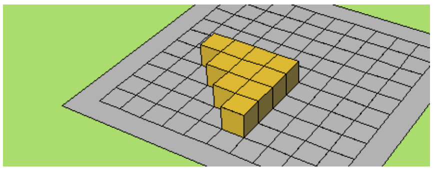
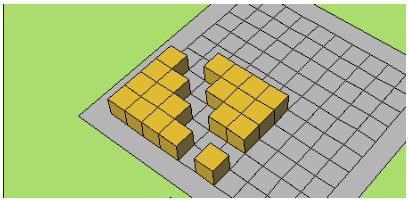
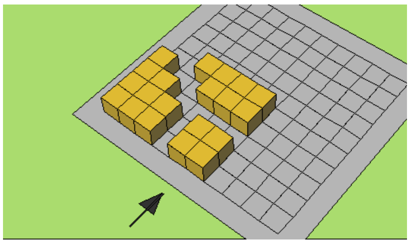
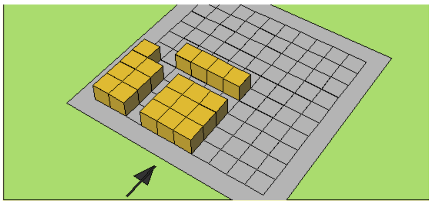
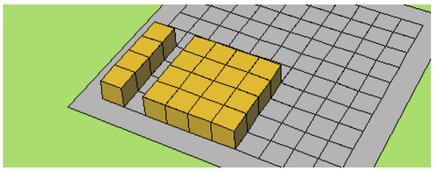
Schematization

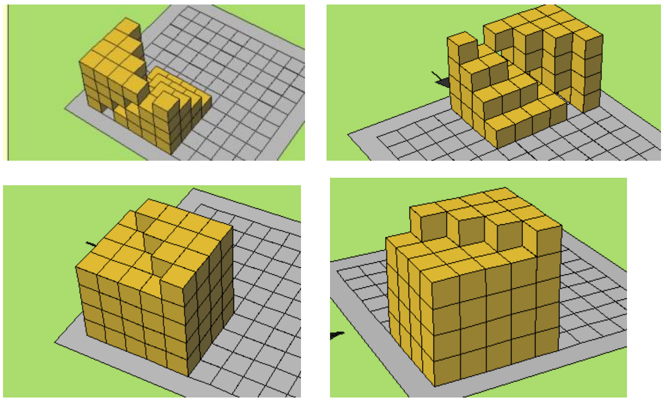






etc

	Level 0 (top of the pyramid)
	Level 1
	Level 2
	Level 3
	Level 4 (bottom of the pyramid)
Les figures de cette colonne correspondent au rang n=4 alors que celles de la colonne de gauche correspondent au rang n=3	



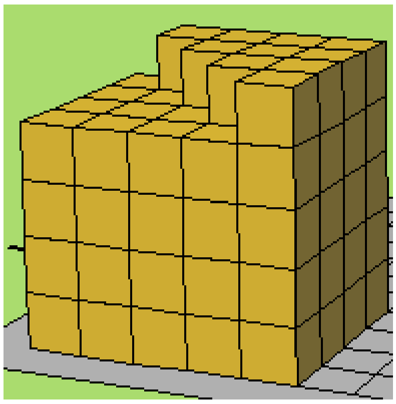
Level 0

Level 1

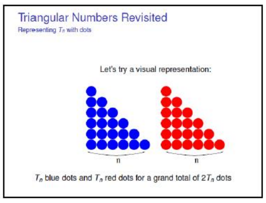
Level 2

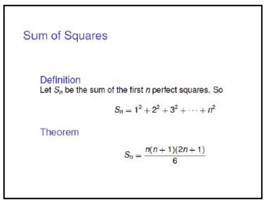
Level 3

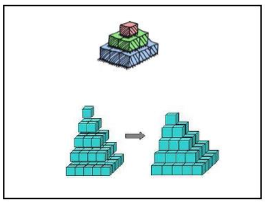
Level 4

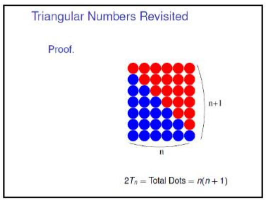


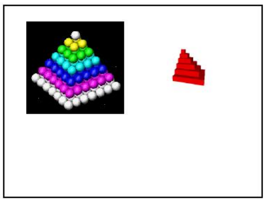
Powerpoint pour la séance Somme des Carrés (2ème preuve visuelle)
Classe de terminale européenne

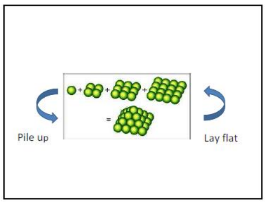


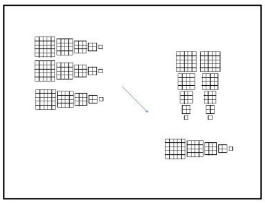


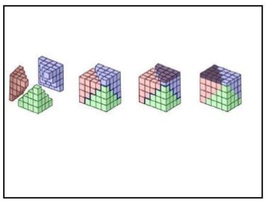


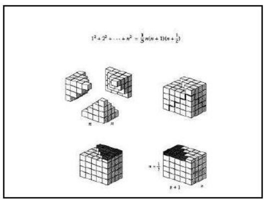


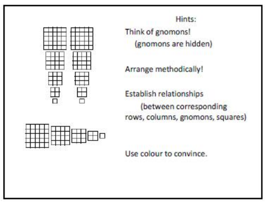


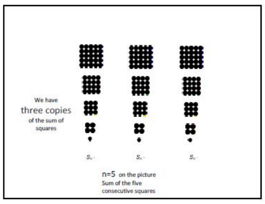


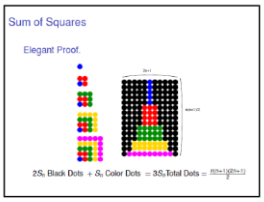


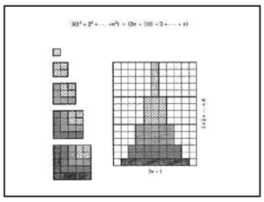






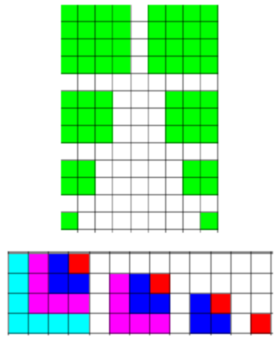






Deuxième preuve visuelle pour la Somme des Carrés

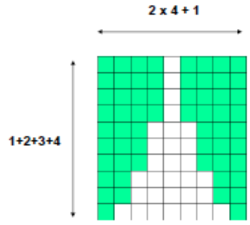
institutionnalisation après la séance adidactique

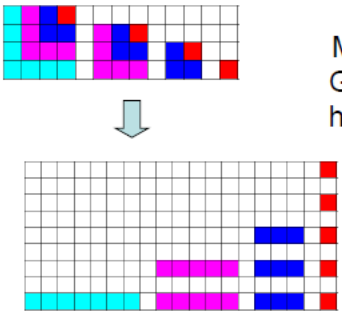


Start with

3 copies **of the sum** of the first **four** square numbers

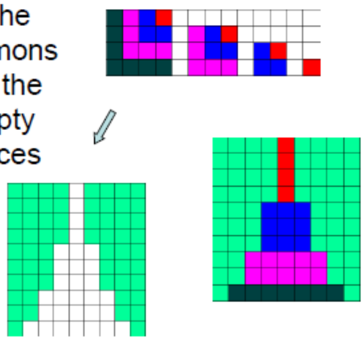
Place the 4 consecutive squares **along the edges** of a rectangle whose dimensions are : **1+2+3+4 and (2x4+1)**



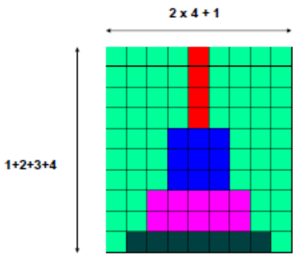


Make the Gnomons horizontal

fit the Gnomons into the empty spaces



This is the Visual proof with n=4

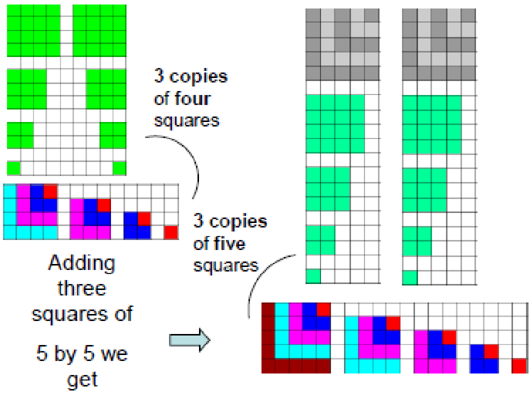


$$3\times(1^2+2^2+3^2+4^2)=(1+2+3+4)\times(2\times4+1)$$

Establish a relationship with the next pattern

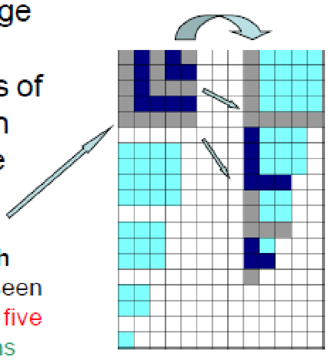
(3 copies of the sum of the first **five** square numbers)

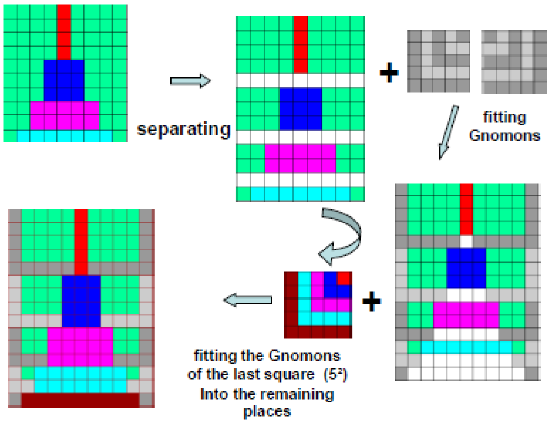
The next pattern
corresponds to a
visual proof
with 5 squares
intead of 4

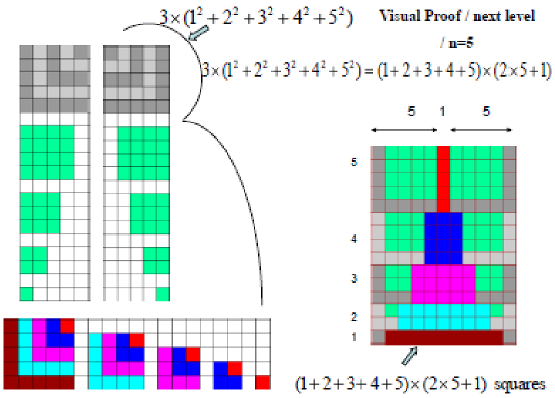


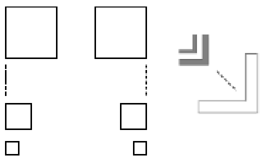
Rearrange
the
Gnomons of
the fifth
square

The **fifth**
square is seen
as a set of five
Gnomons









There is a possibility
of illustrating
the *generalization* of
one (any) of the previous
situations (for n=4 or n=5)

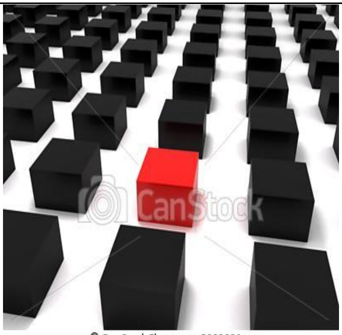
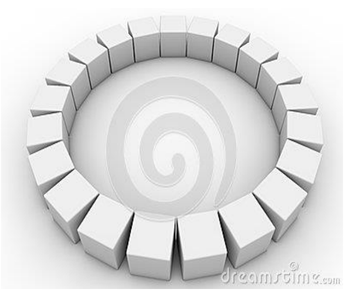
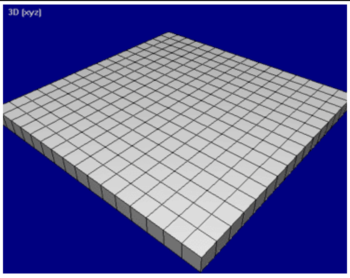
by using dotted lines or suspension dots

And labels such as :

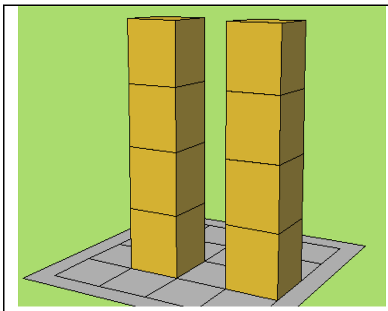
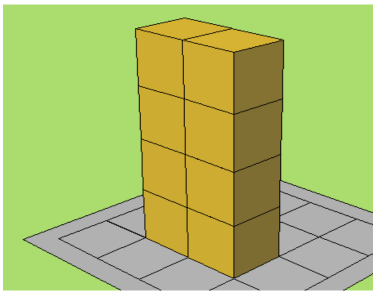
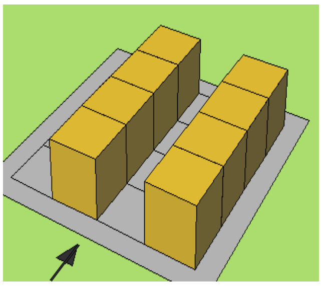
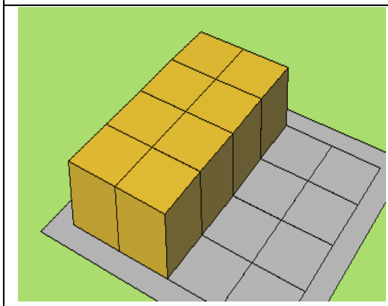
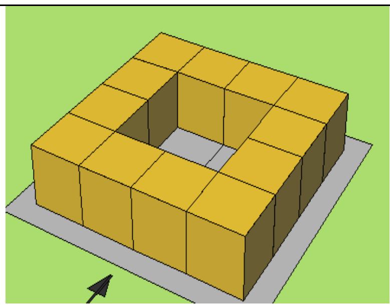
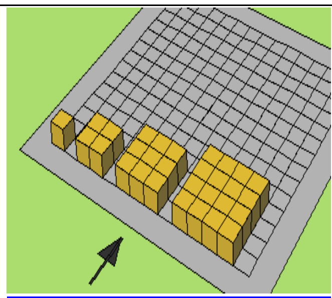
$$n,\ n+1,\ n^2\quad\text{or}\quad(n+1)^2$$

Exercice linguistique de type *consolidating*

Match the following pictures with the corresponding number(s)

	 © Can Stock Photo – csp5662680	
A	B	C
		
D	E	F
		
G	H	I

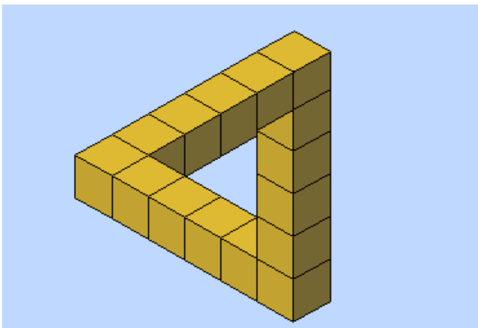
1. The cubes are arranged as a circle.
2. It's a square of 16 by 16 cubes.
3. Each level corresponds to a triangular number.
4. Two parallel columns of cubes.
5. All the cubes have been laid flat so as to form a square.
6. The cubes are arranged around a circle.
7. This is a stack of decorated cubes.

		
J	K	L
		
M	N	O

8. The cubes form a flat pyramid that makes us think of a triangular number.
9. The number of cubes at each level is a square number.
10. All cubes in this pyramid are located in a vertical plane.
11. The cubes are piled up so as to create words.
12. The picture depicts two columns in contact.
13. Cubes are placed on an imaginary grid.
14. There is a sort of passage-way. Cubes form an arch.
15. This pyramid consists of four layers of cubes.
16. The columns or the rows are apart from each other.
17. There are two rows close to each other.
18. The arrangement reveals a square-shaped hole.
19. All the cubes of the staged pyramid have been laid flat.

optical illusion

Comment upon the picture opposite:
What do you think?

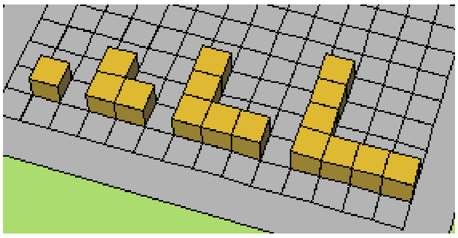


Gnomons

document distribué aux élèves après une phase adidactique de découverte

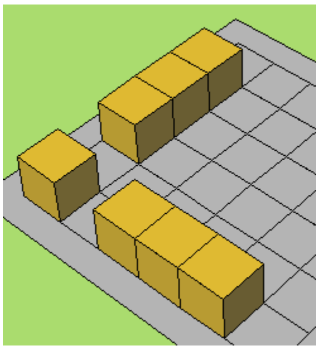
<u>**Convention**</u> :

We agree to denote by G_n the nth Gnomon



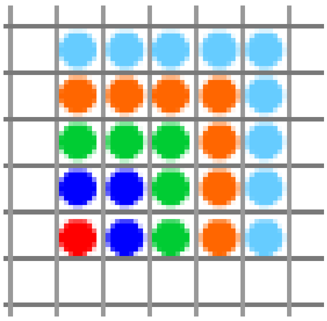
$G_1 = 1$
$G_2 = 3$
$G_3 = 5$
$G_n = 2n - 1$

check that $G_4 = 1 + 2 \times 3$
but we also have : $G_4 = 2 \times 4 - 1$



$G_n = 1 + 2(n-1)$ hence $G_n = 2n - 1$

Visual proof of the following property:
The sum of consecutive odd numbers is a square (number).



On the picture opposite we have represented
the case of the sum of the first five odd numbers.
1+3+5+7+9+11=5².

$G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5 = 5^2$

The principle of extension from the particular case (corresponding to the value n=5 for the previous picture) is natural.

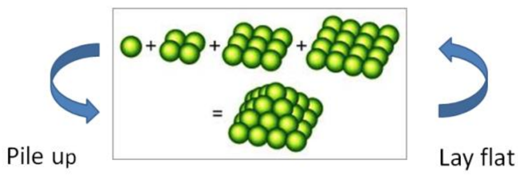
It is based on the fact that we can get a new square (the next one) by adding a Gnomon to a given square.

In the activity, our **purpose** was to :

Establish a second visual proof for the following equality:

$3\left(1^2 + 2^2 + ... + n^2\right) = (2n+1)(1 + 2 + ... + n).$

It's no longer necessary to consider pyramids.



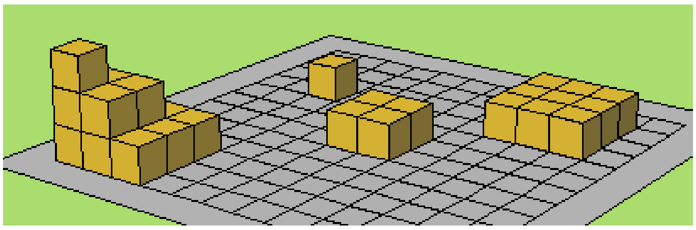
The **new visual proof** will be based **on a plane arrangement**.

We have indeed seen that the expression in the right side of the equality can be interpreted as **the product of the dimensions of a rectangle**: $(2n+1)$ and $(1+2+.....+n)$

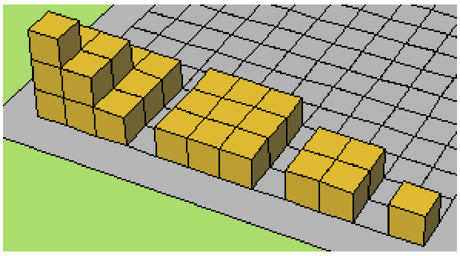
(this is the way we compute areas and it amounts to the same as counting the objects arranged as a rectangle)

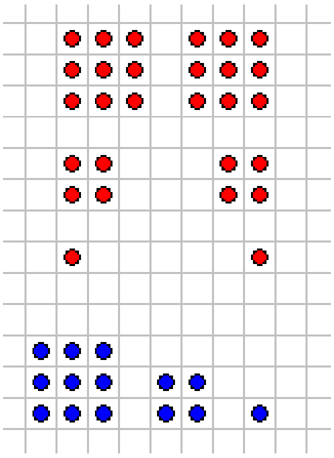
Hence, we'll keep in mind a rectangle of (2n+1) by (1+2 +3+…+n).

We can lay flat the different layers of the pyramid. On the picture opposite, this has been done at random.



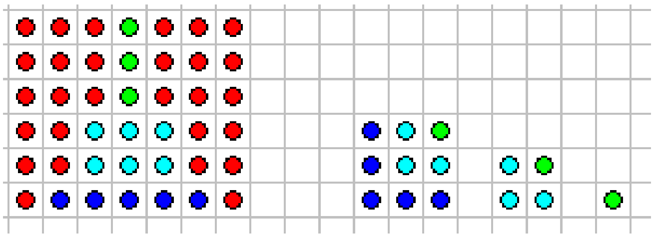
But it's more natural to lay flat the layers of cubes along the edge of the grid.





Then, we can go on, using either cubes that have been laid flat or more simply, arrangements (in a plane) of small squares (or any other objects like on the picture opposite). On this picture, we have represented **three copies of the sum** $(1^2+2^2+3^2)$.

Thinking of Gnomons leads us to the following arrangement :
In this case (corresponding to n=3),
the rectangle has dimensions 2x3+1 and 1+2+3.



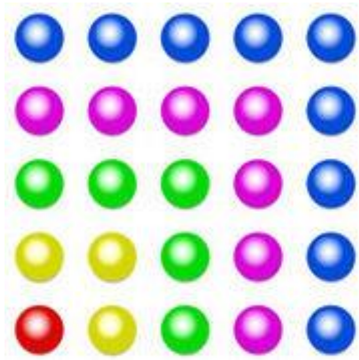
Nevertheless, the **principle of extension** (possibility of extending from the particular diagram) **cannot be so easily perceived and stated**.

It is **not based on the mere adding of 1 single Gnomon** to the whole picture/ shape (which, in this case, is a rectangle). Hence we might find this proof is less convincing than the proof of the sum of consecutive odd numbers but more convincing than that with the 3 pyramids.

Implicite et explicite schématique / principe d'extension / gnomons

Document distribué aux élèves

Our purpose is **to make** the usual Visual Proof concerning the sum of consecutive integers **more convincing**.



We consider the visual Visual Proof concerning the sum of consecutive integers. It is based on pictures like the one opposite.
It is not accompanied by any description or any comments.

Anyway, it contains an **implicit** principle of extension.
That is: we can (and sometimes quite easily, depending on the individuals) **perceive** or **just feel** (sometimes using mental representations) the possibility of extending the picture to the next square by adding the next gnomon.

We consider that **it would be better** to add other diagrams so that the visual proof can keep closer to the standard proof by induction.

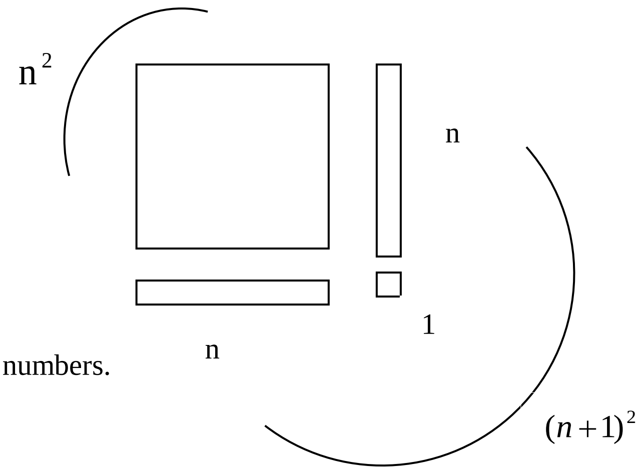
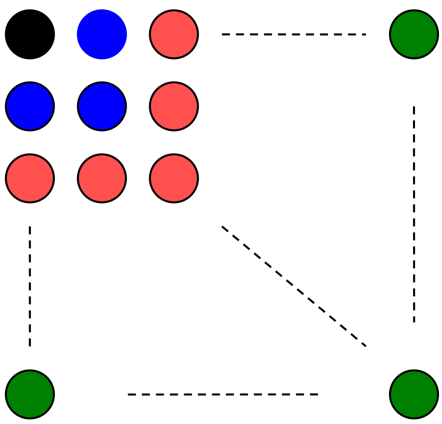


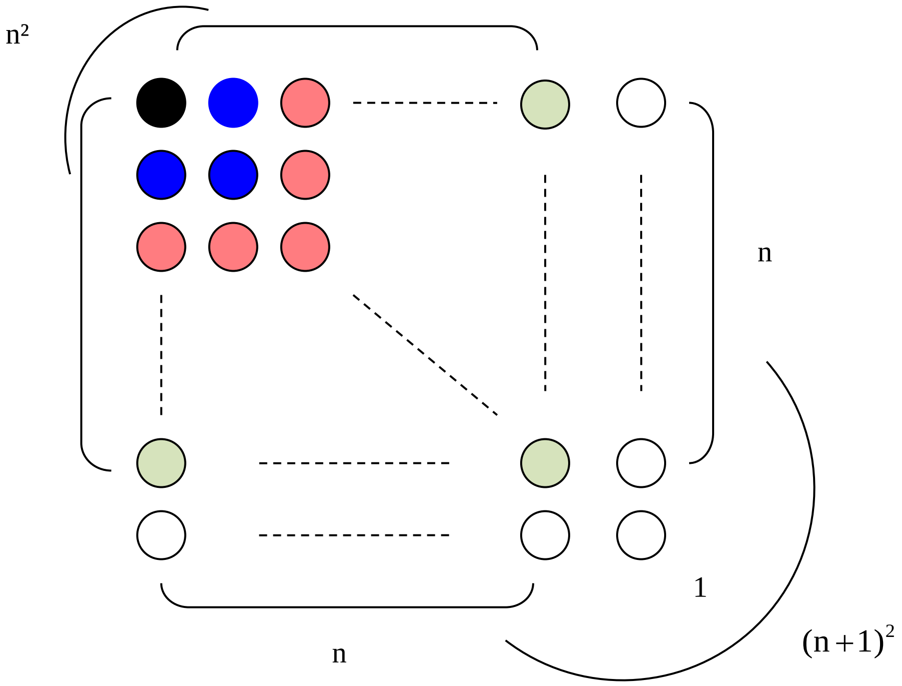
Diagram corresponding to the algebraic equality $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

This illustrates the fact that adding a Gnomon to a square gives the next square.
But this diagram **says nothing about the sum** of odd numbers.



The picture opposite is necessary to illustrate the fact that a sum of consecutive odd numbers is a square (number).
Moreover, it contains an **explicit** principle of extension
The possibility of extension is **materialised** by a dotted line (which plays a similar role to suspension dots in the sum $1+3+5+ \ldots + (2n+1)$. The dotted line prompts you to extend (mentally) the diagram, to extend the pattern.

We can also combine the last two diagrams:

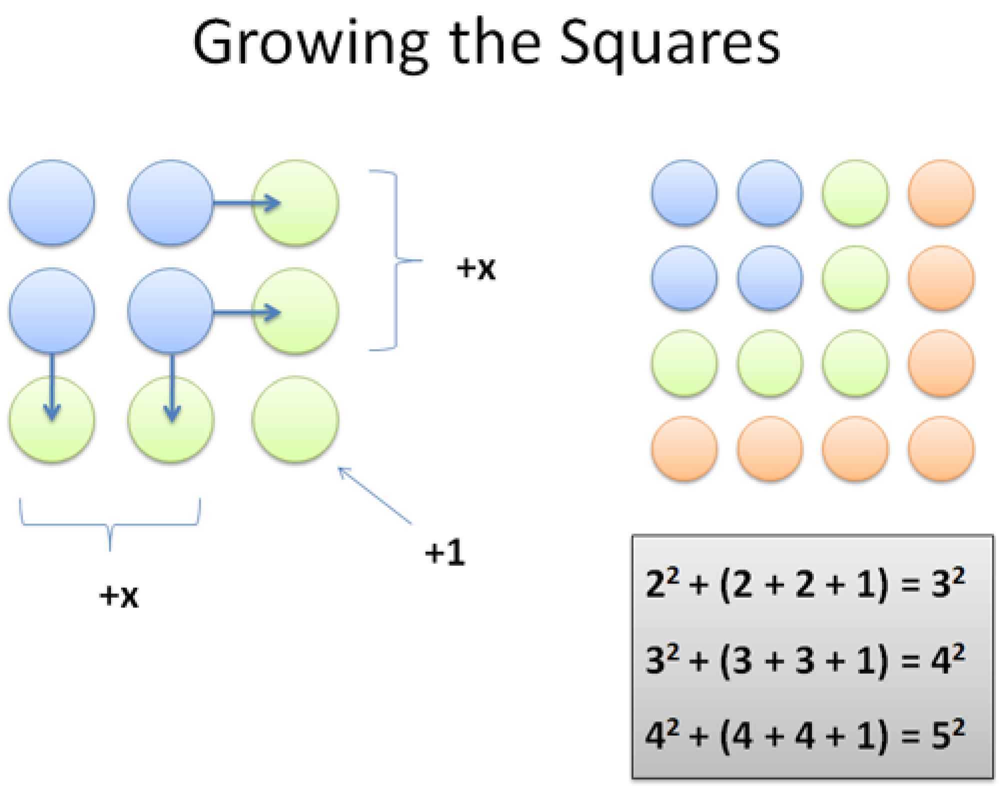


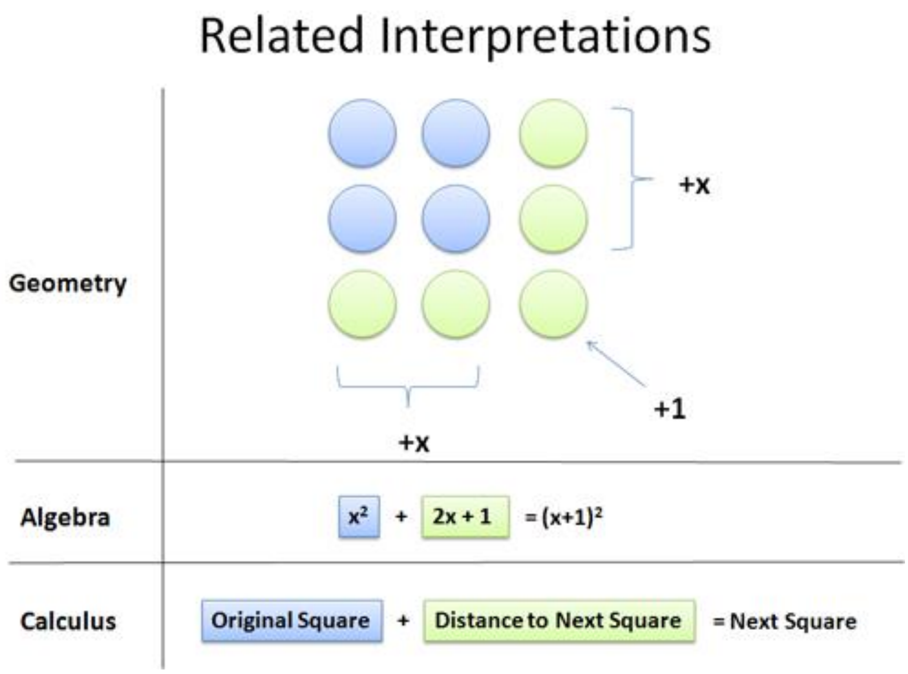
According to me, **this** diagram would deserve to be called a visual proof.

What do you think?

Arguments are explicit, not from a linguistic but from a visual point of view.

Document trouvés sur le net et portant sur le thème des *growing patterns*





ANNEXE 4 : Situation intitulée *Somme des Cubes*

Powerpoint utilisé lors de la séance Somme des Cubes

Rappel : les élèves doivent élaborer une preuve visuelle

Sum of the consecutive cubes

The formula
for the *sum of the consecutive cubes* of integers
is one of the most elegant
in elementary mathematics.

The sum of the cubes seems
to be a square number
question:
it's the square of « *what* »?
What number is it the square of?

$n=1$ $1^3 = 1 = 1^2 = (\ ?\ )^2$
$n=2$ $1^3+2^3 = 9=3^2 = (\ ?\ )^2$
$n=3$ $1^3+2^3+3^3 = 36=6^2 = (\ ?\ )^2$
$n=4$ $1^3+2^3+3^3+4^3 = 100=10^2 = (\ ?\ )^2$
what sort of number is in the bracket ?

Purpose of the introduction:
*establish a **conjecture***
for the formula
concerning
the sum of the cubes.

Denote by *n*
the *number of cube numbers*
in the sum.

What do the numbers
1 , 3, 6, 10 ...
remind you of?
Do you recognize the numbers?

Hence we have :
$n=1$ $1^3 = 1 = 1^2 = (\ 1\ )^2$
$n=2$ $1^3+2^3 = 9=3^2 = (\ 1+2\ )^2$
$n=3$ $1^3+2^3+3^3 = 36=6^2 = (\ 1+2+3\ )^2$
$n=4$ $1^3+2^3+3^3+4^3 = 100=10^2 = (\ 1+2+3+4\ )^2$

Consider the following sums :
$n=1$ $1^3 =\ ?$
$n=2$ $1^3+2^3 =\ ?$
$n=3$ $1^3+2^3+3^3 =\ ?$
$n=4$ $1^3+2^3+3^3+4^3 =\ ?$

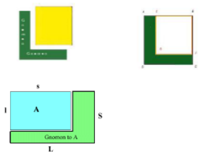
$n=1$ $1^3 = 1$
$n=2$ $1^3+2^3 = 9$
$n=3$ $1^3+2^3+3^3 = 36$
$n=4$ $1^3+2^3+3^3+4^3 = 100$
what do we notice?

We can now establish the
conjecture:
$1^3+2^3+\dots\dots+n^3$ seems to be equal
to $(1+2+3+\dots\dots n)^2$
We can notice that the expression $1+2+3+\dots\dots n$
can be replaced by $\frac{n(n+1)}{2}$

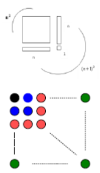
Purpose
of the next part
of the activity (groupwork):
elaborate a Visual Proof
of the previous property

The **Visual Proof**, as a demonstration, must be **both**
practical (using real cubes)
and
schematic (making diagrams)

you must be able
to explain or demonstrate
why,
if something works at **some** level (for some particular value of *n*),
it will **necessarily** work
at the **next** level (for n+1).



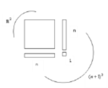
explain or demonstrate
why,
if something works at some level
(for some particular value of *n*),
it will necessarily work
at the next level (for n+1).



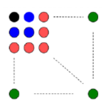
All manipulations
will have to be
accompanied
by a **verbal** (oral) **description**
and, if possible
a **schematization**

Make a **poster**
for explanations
and,
if possible,
a generalization

The diagram opposite
illustrates the fact
that adding a Gnomon
to a square
gives the next square.
But this diagram says **nothing**
about the sum of odd
numbers.



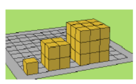
The picture opposite
contains an **explicit**
principle of extension
The possibility of extension is
materialised by a **dotted line**



Anticipate
what you are going to say
(during the *physical*
demonstration)

Recall
a Gnomon **is usually**
L-shaped
(has the form of the letter L)
its dimensions are **not**
necessarily fixed

Cubes available :
(until n=3)



Next cube (for n=4) : not available!

Introduce order while arranging the
(small) cubes
arrange methodically
think of a generalization
of the way you arrange
the small cubes.

Document-support distribué pendant la séance

(après la phase d'établissement de la conjecture et au début de la phase adidactique)

Sum of consecutive cubes

$$1^3 + 2^3 + \dots\dots\dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots\dots n)^2$$

this property has been established as a conjecture

Purpose of the activity : **elaboration of a Visual Proof** after manipulating real cubes.

We expect both a **concrete proof** , "using real cubes" , **and** a proof based on a **diagram**.

Key-idea 1

Manipulate cubes in order to study **particular cases**

key-words

introduce order while laying the cubes flat.

Try to **guess** *what the next step would be* if you had more cubes.

Anticipate a *verbal description* of the manipulations performed.

Key-idea 2

Elaborate a shematization for the **paticular cases**

key-words

use *grid-paper*.

use *colour pens* to give a better visual effect.

start thinking about a *principle of extension*

(explain *how* the *particular situation* can be *extended* to the *next level*)

don't hesitate to produce *several* diagrams.

Key-idea 3

Try to investigate the possibility of **generalizing** both "verbally" **and** through sketching

key-words

think of a special *Gnomon.*

anticipate a *verbal description* of the manipulations performed.

use *dotted lines* for a more *general* diagram

don't hesitate to draw several diagrams in order to explain

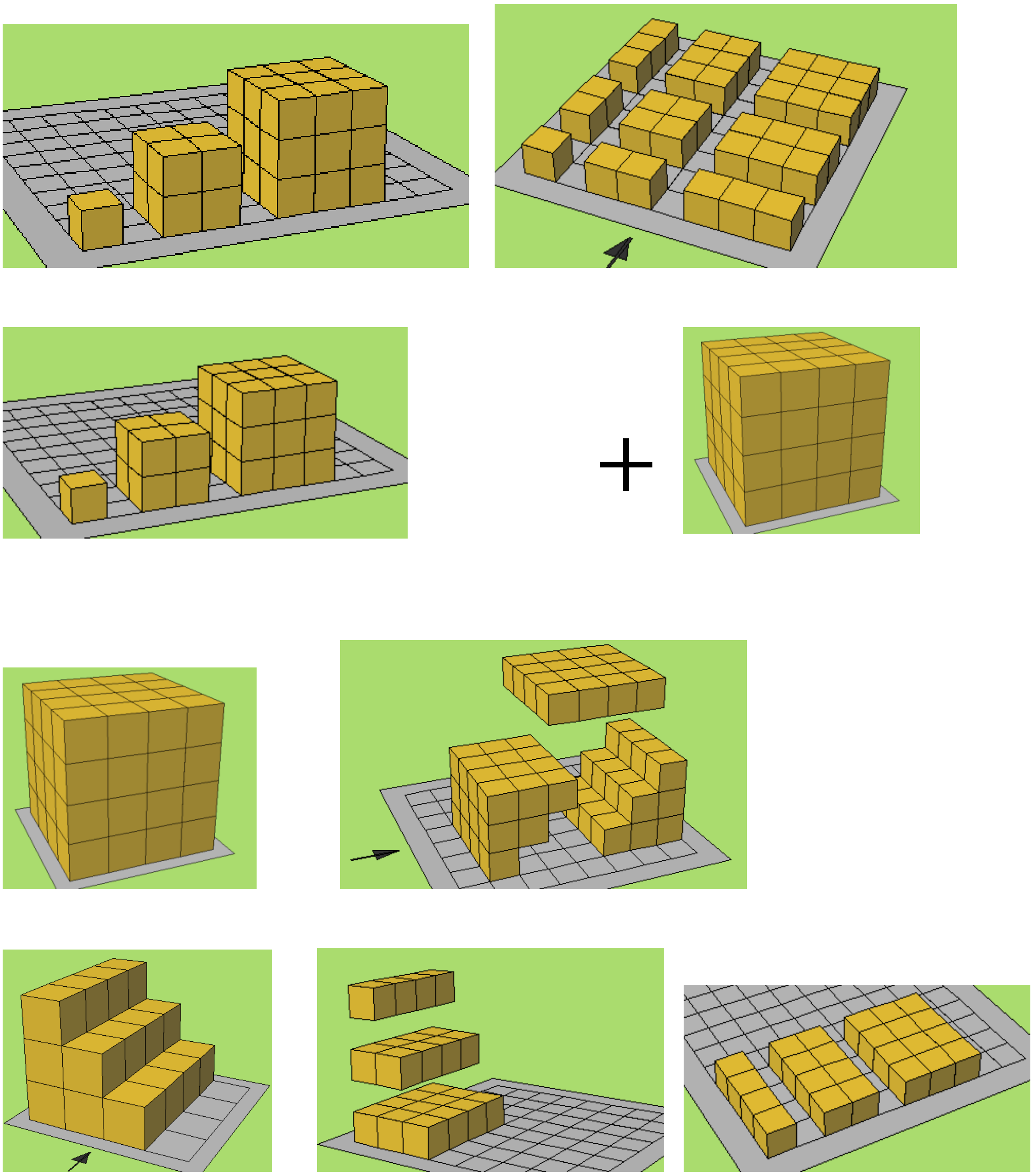
Convincingness of the proof

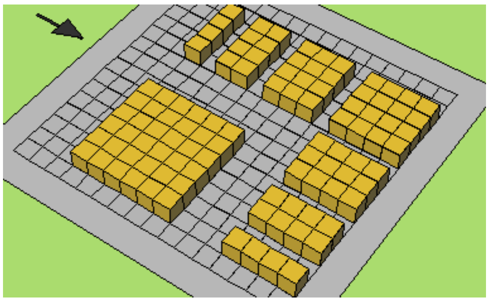
It is *based on* the following fact:

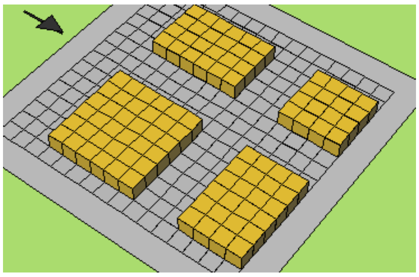
you must *be able to explain or demonstrate* ("making both a **physical *and* a schematic demonstration**") why, if something works at some level (for some particular value of *n*) it will **necessarily** work at the next level.

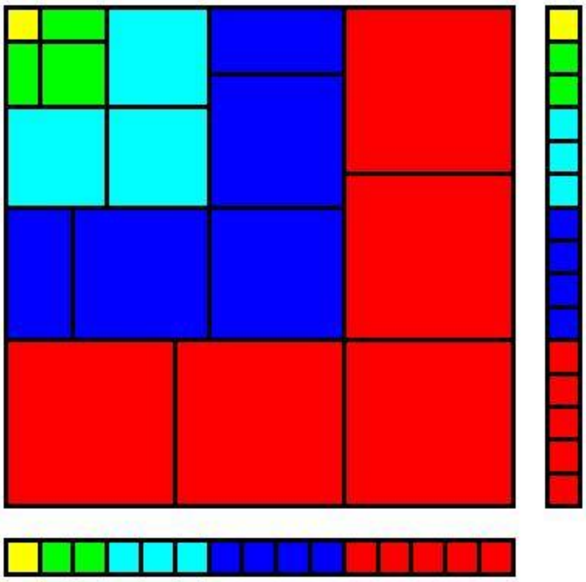
Montage pour la phase d’institutionnalisation de la séance Somme des Cubes

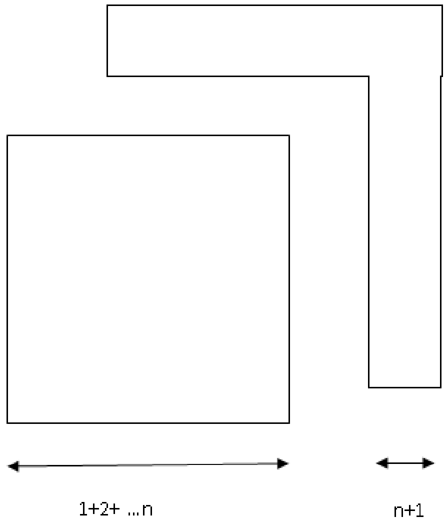
Montage réalisé à l’aide d’un logiciel du site Wisweb





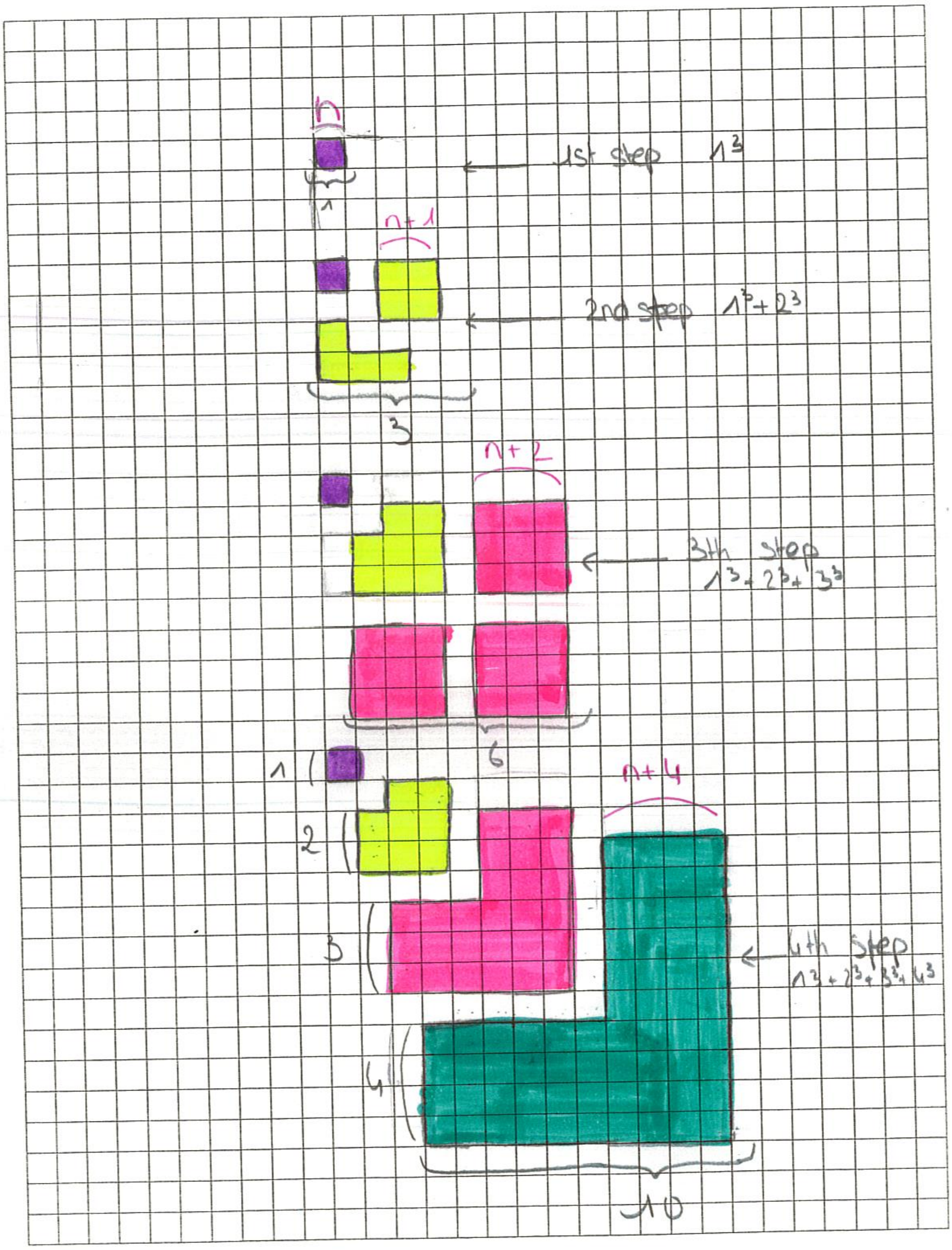




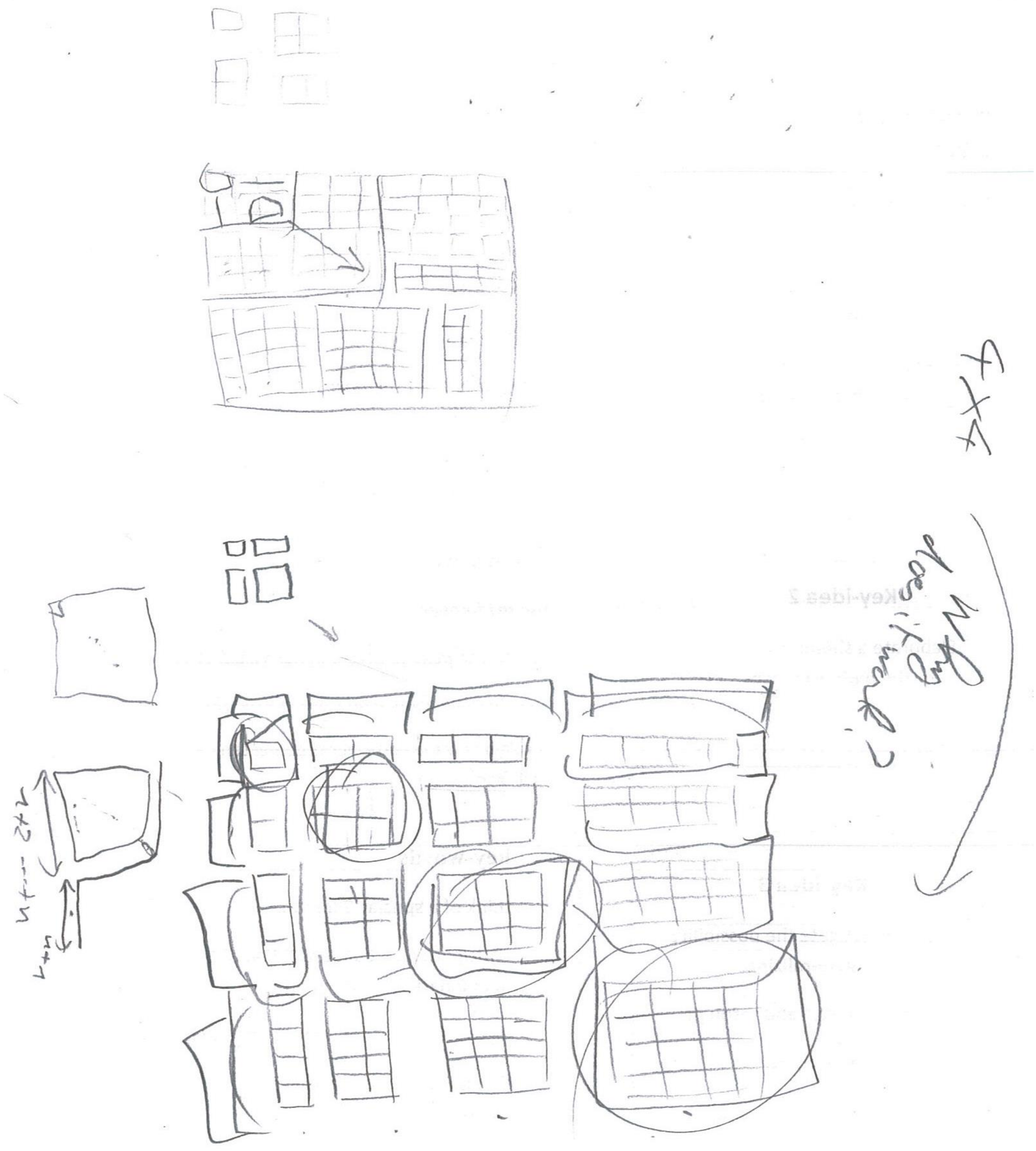

1+2+ ...n
n+1

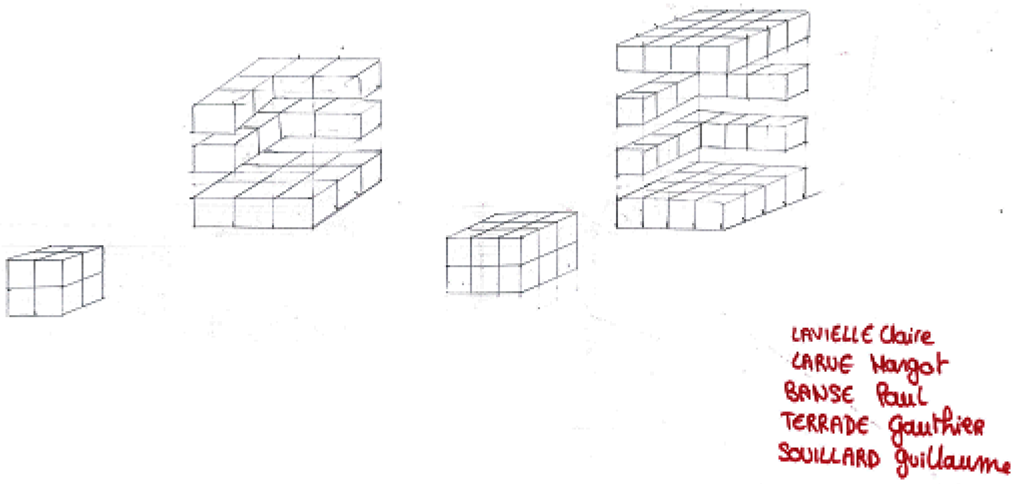
Posters réalisés lors de la séance Somme des Cubes

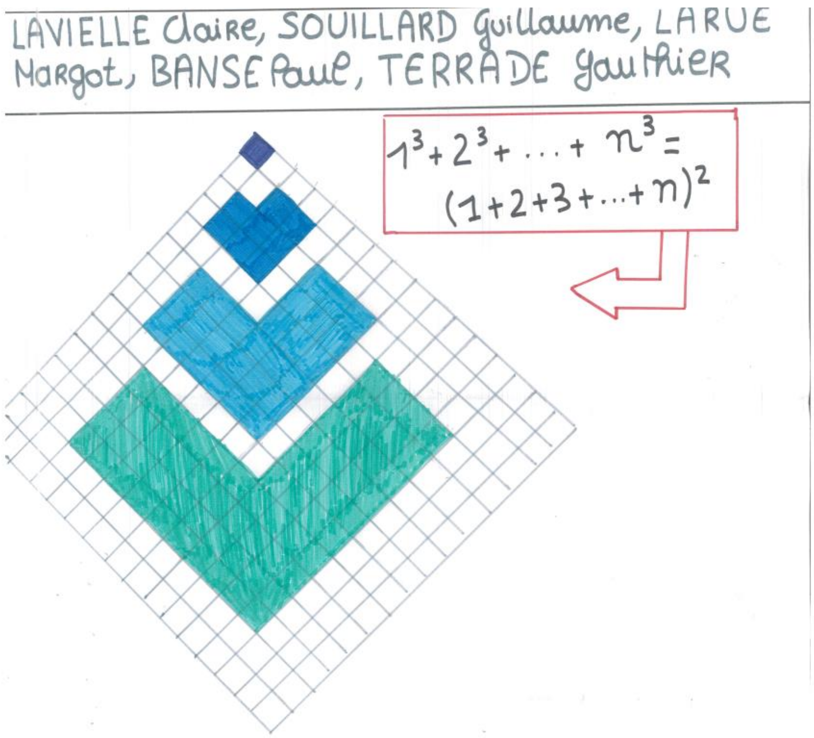
Documents produits par les élèves (classe de terminale européenne)

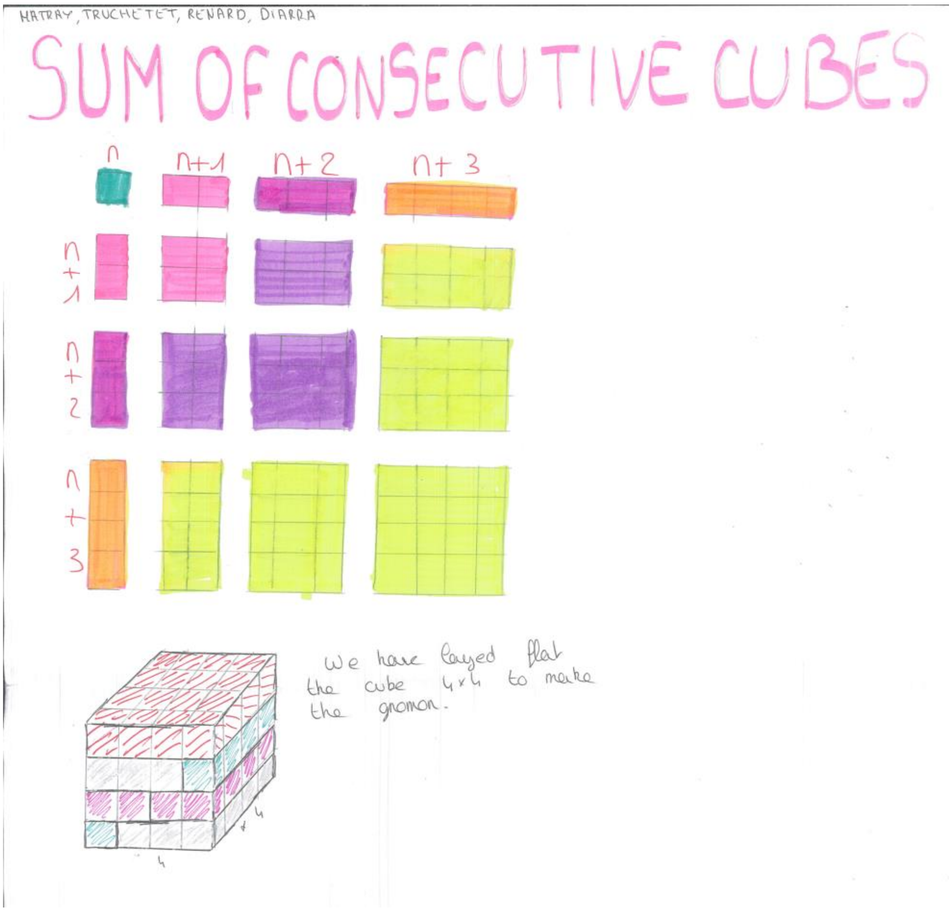


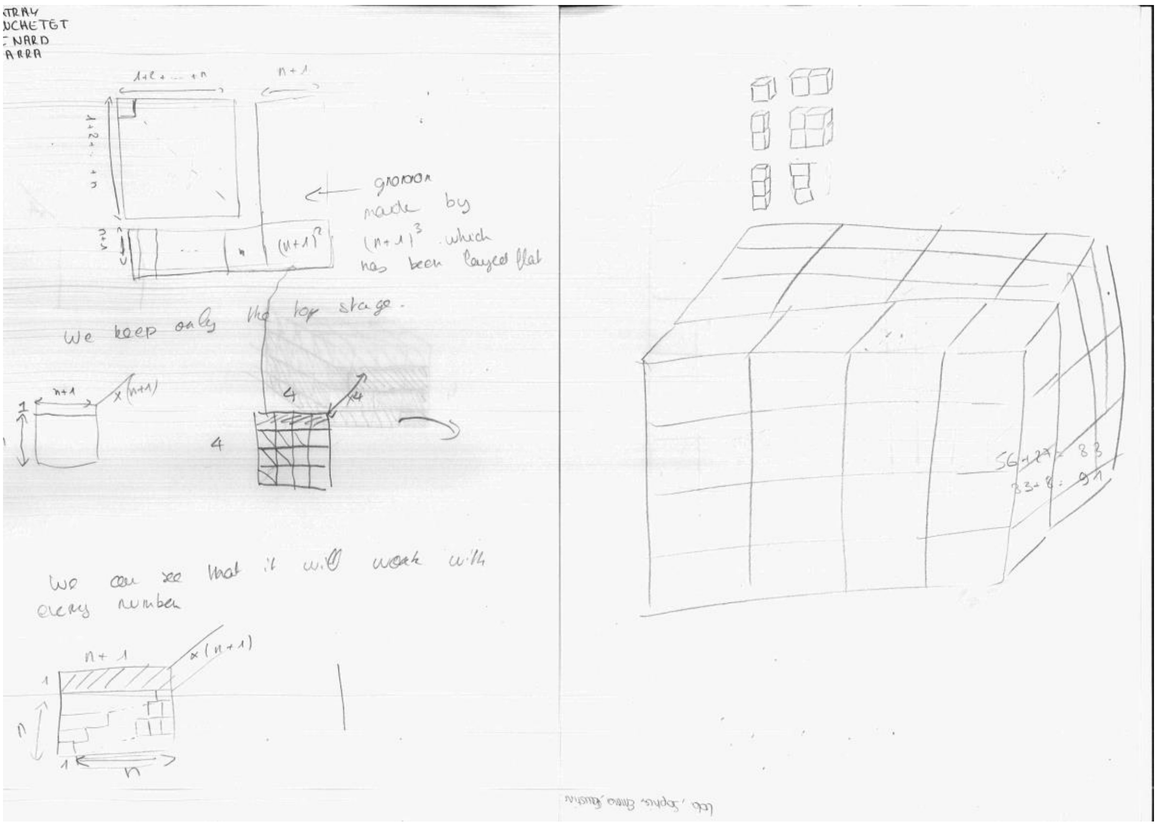
Lola, Faustine, Sophie, Emma

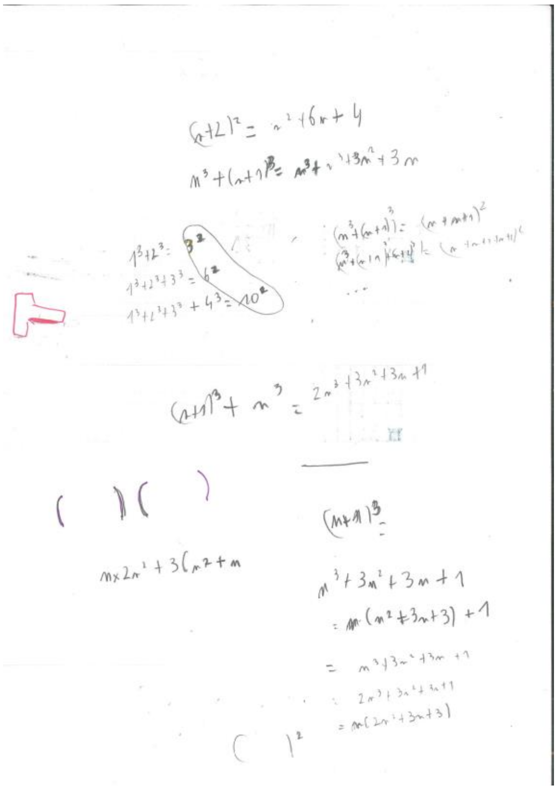


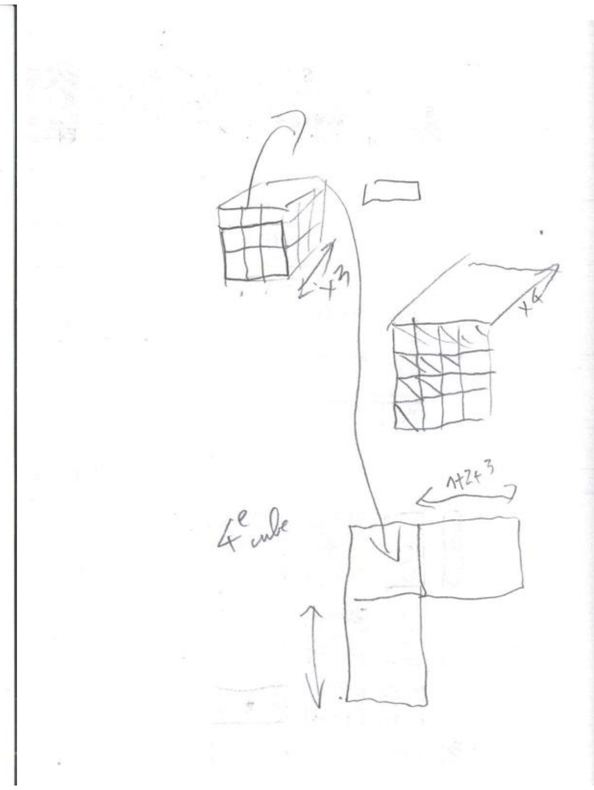

LAVIELLE Claire
LARUE Margot
BANSE Paul
TERRADE Gauthier
SOUILLARD Guillaume

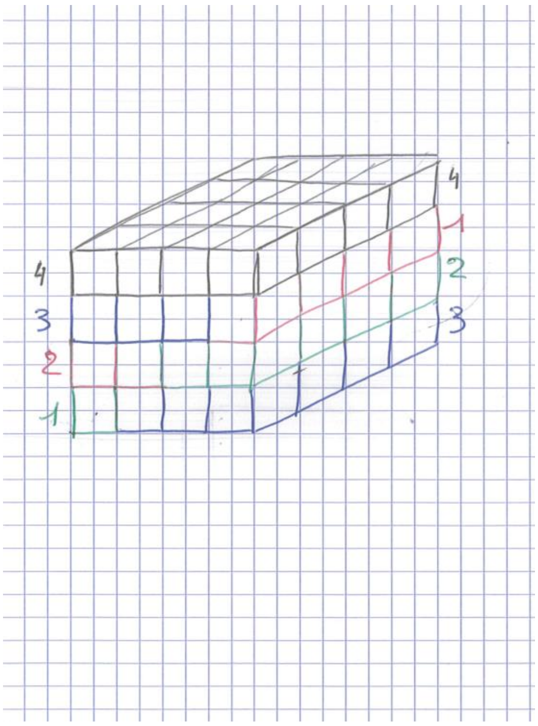

LAVIELLE Claire, SOUILLARD Guillaume, LARUE Margot, BANSE Paule, TERRADE Gauthier
$1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$

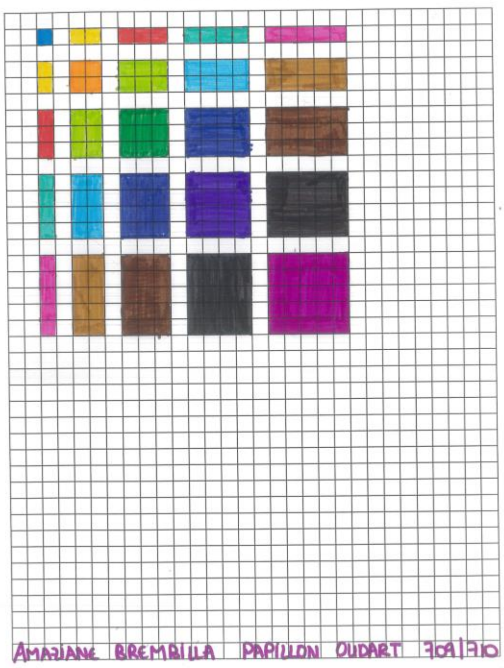

MATRAY, TRUCHETET, RENARD, DIARRA
SUM OF CONSECUTIVE CUBES
n
n+1
n+2
n+3
We have layed flat the cube 4x4 to make the gnomon.

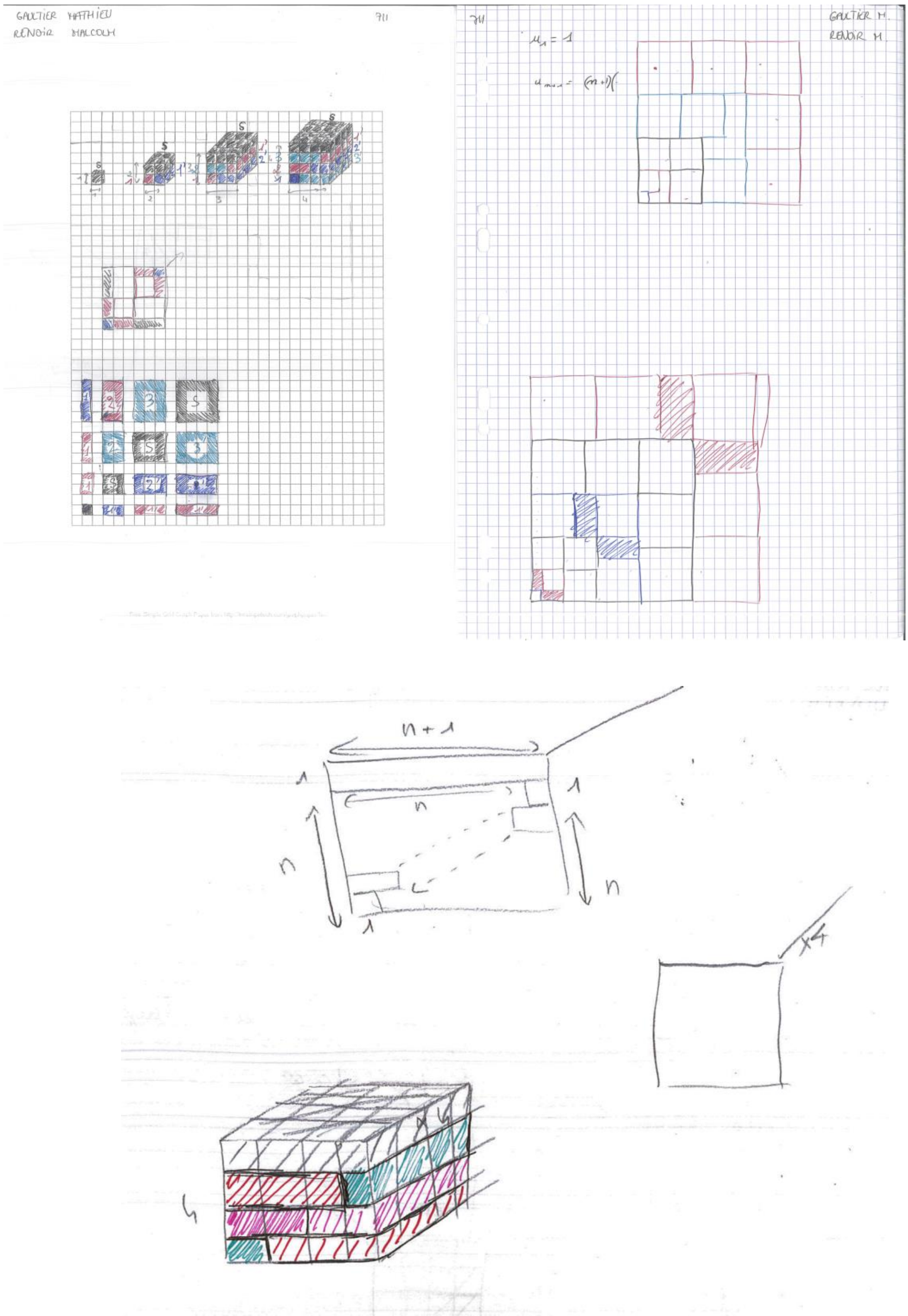

gnomon made by (n+1)³ which has been layed flat
We keep only the top stage.
We can see that it will work with every number
n+1
x (n+1)




4e cube




AMAZIANE BREMBILLA PAPILLON OUDART 709|710


GAULTIER MATHIEU
RENOIR MALCOLM
GAULTIER M.
RENOIR M.
$u_1 = 1$
$u_{n+1} = (n+1)($
n + 1
n
x4
4

CBM2G

Claire
Margot
Guillaume
Gauthier
Paul

$1^3 = 1$ $\qquad 1^2$

$1^3 + 2^3 = 9$ $\qquad 3^2 \quad +2$

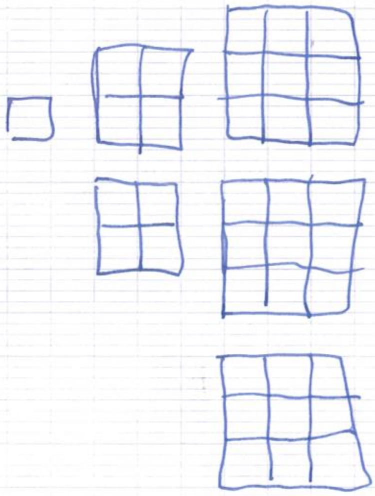
$+3^3 = 36$ $\qquad 6^2 \quad +3$

$+4^3 = 100$ $\qquad 10^2 \quad +4$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left((n-1)^2 + n\right)^2$$

$$= (1+2+3\ldots)^2$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} n\right)^2 = \left(\frac{(n)(n+1)}{2}\right)^2$$



$$n^3 = n^2 + 2(n-1)^2 + (n-1) + (n-1)^{3n}$$

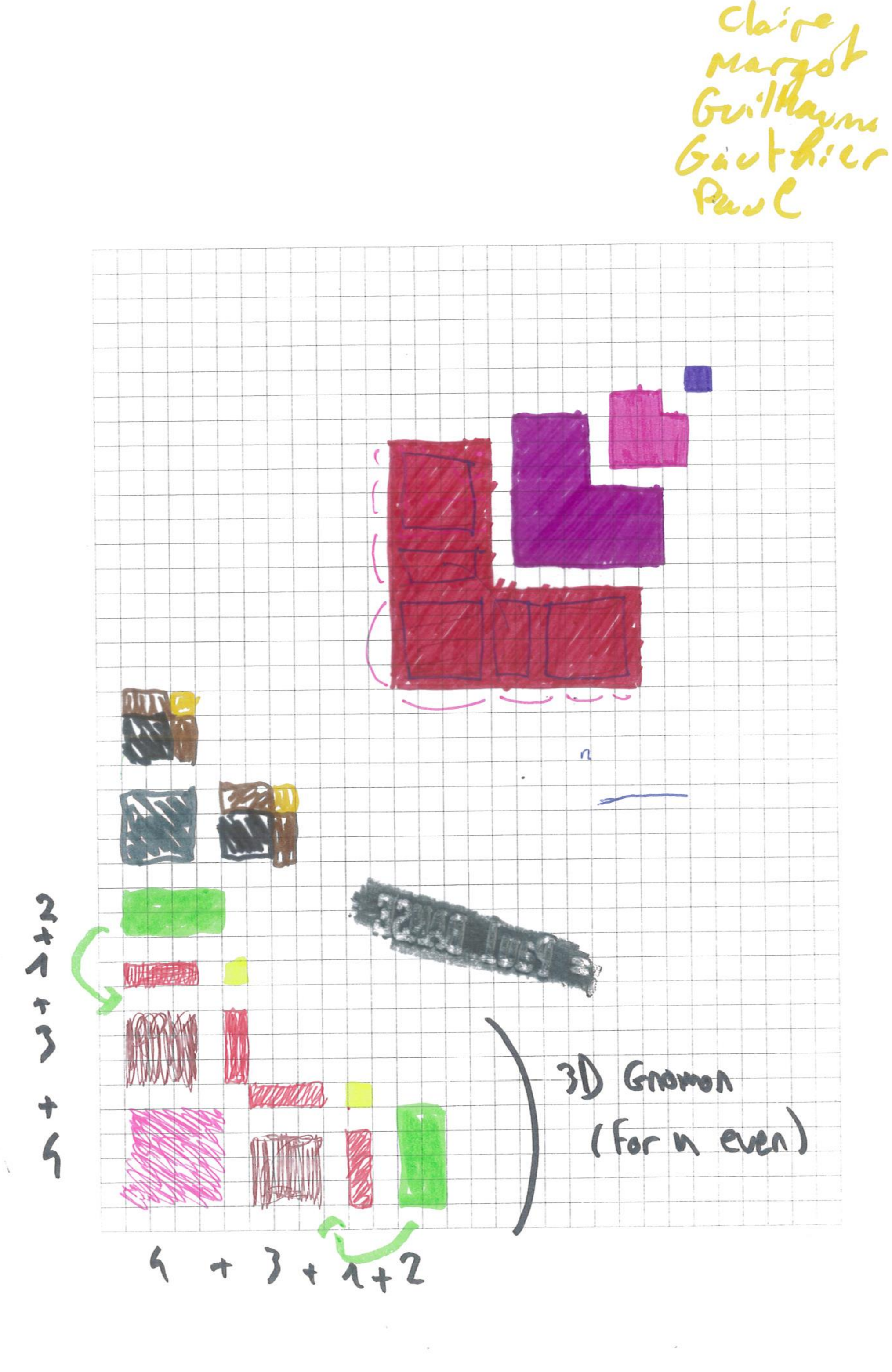
$+3\times(n-1+n)$

$1(n+n-1+n-2+n-3\ldots 0)$

$3(n+n-1+n-2+n-3\ldots 0)$

$5(n+n-$

$$n^3 = (n-1)^3 + (2n+1)(n) + n^2$$

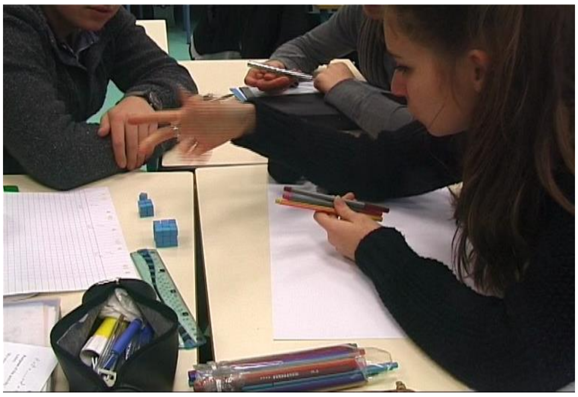

Claire
Margot
Guillaume
Gauthier
Paul C
2 + 1 + 3 + 4
3D Gnomon
(For n even)
4 + 3 + 1 + 2

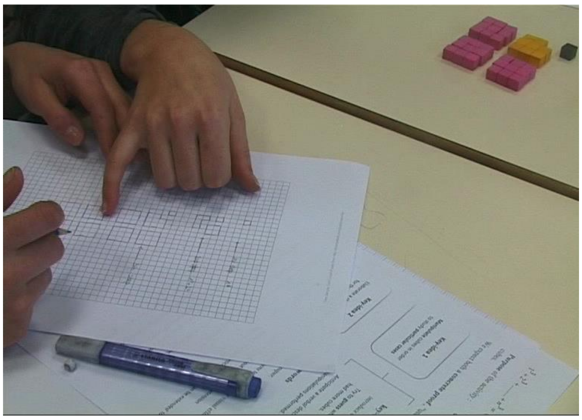
Photos

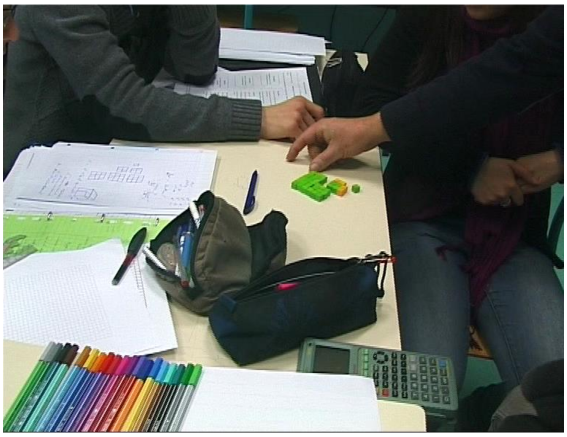
Séance expérimentale

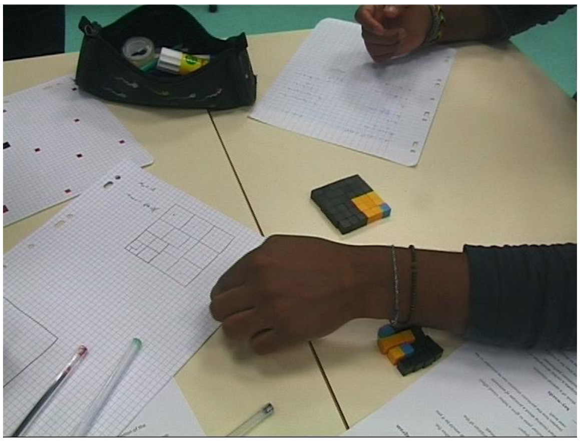
Somme des cubes et Preuve visuelle

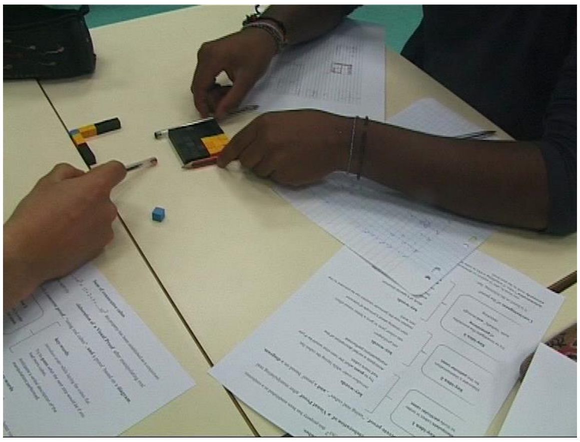


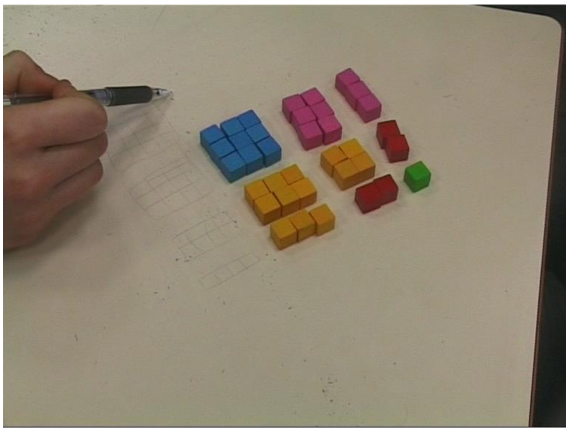



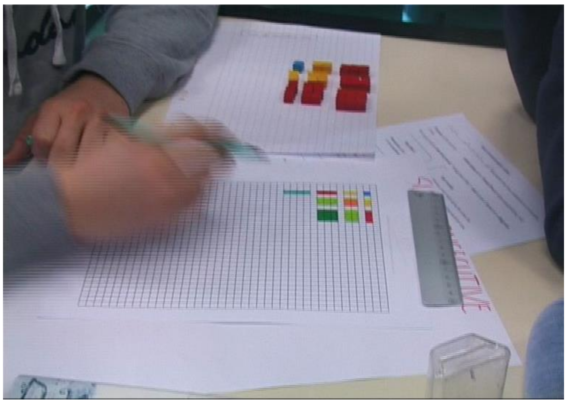




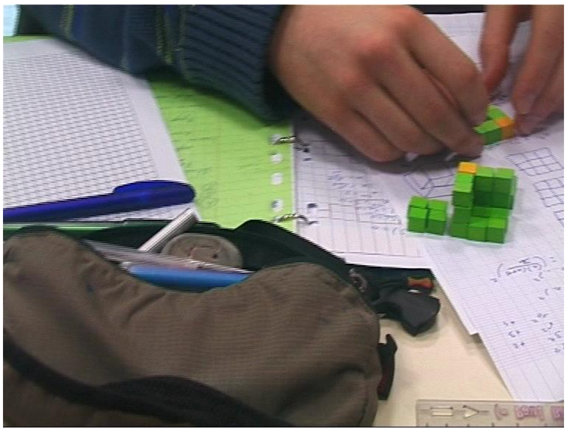


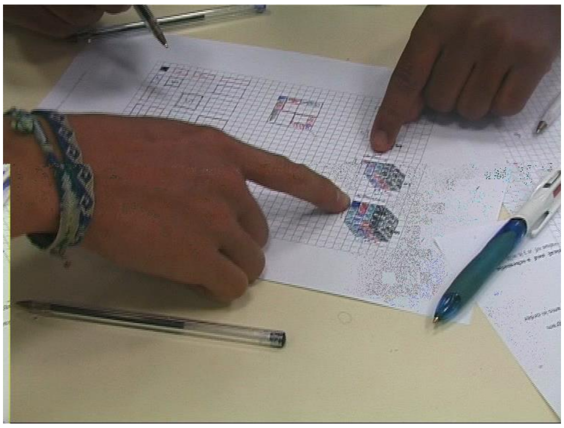


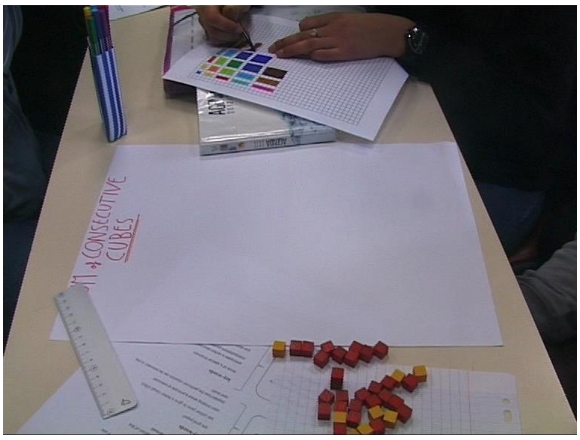


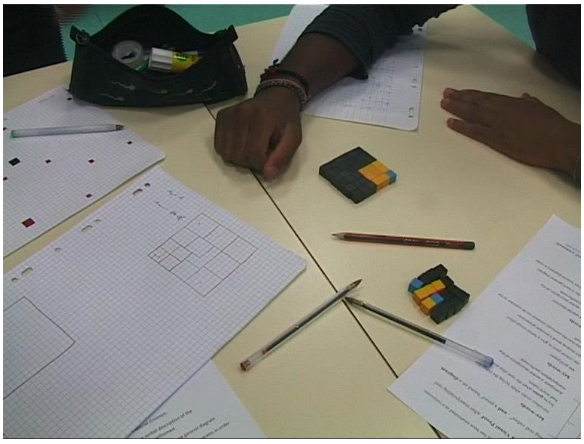


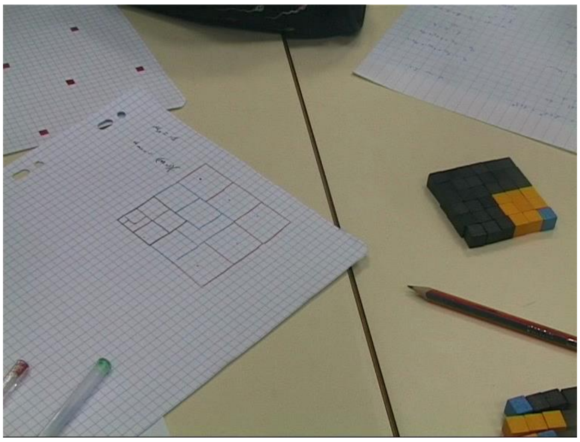

avait rien à écrire.

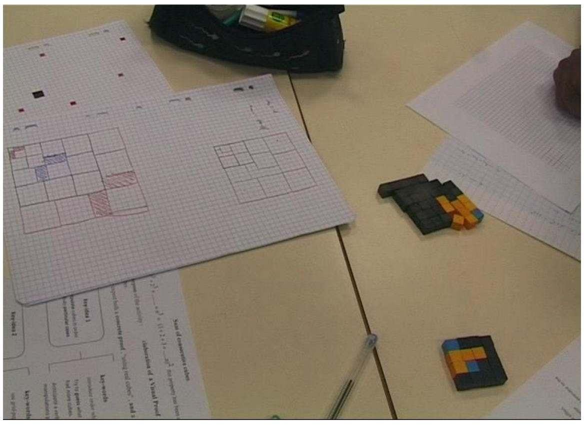


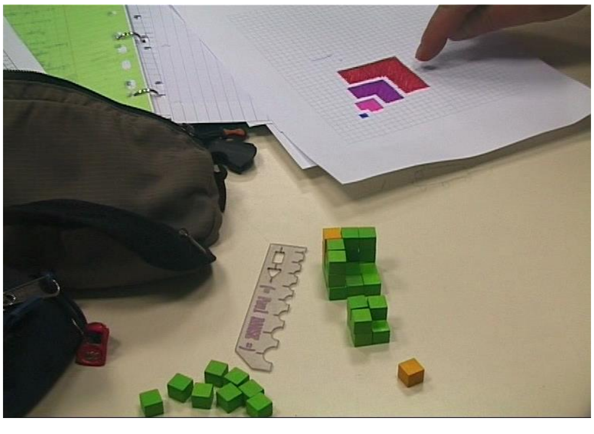



CONSECUTIVE
CUBES









Transcriptions de la séance et commentaires

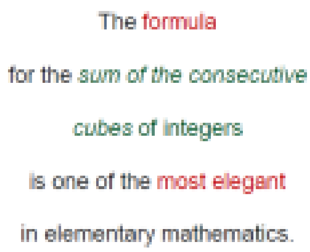
I) Phase interactive d'introduction avec support Powerpoint

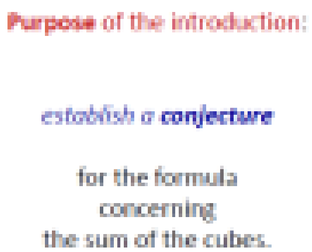
La première phase est un « warming-up »

1. P The topic is about cube numbers
   About the sum of consecutive cube numbers
   Is that clear to you what a cube number is?
   (s'adressant à E1)
   Give me an example of cube number
2. E1 8
3. P Why is it a cube?
4. E1 It's 2 times 2 times 2
5. P [?] sum of consecutive cubes
   What is the first cube?
6. E1, E2 ensemble
   1
7. T Justify why
8. E2 It's 1 times 1 times 1
9. T 1 cubed is equal to 1
   (répète en insistant sur la dernière syllabe)
   1 "cubed"
   The purpose of the first part of the activity is to establish a conjecture
   That's what we are going to do now
   Establish a property but only at the level of a conjecture
   (s'adressant à toute la classe)
   Does anybody know the formula giving the sum of consecutive cubes?
10. E3 You should multiply the sum of the consecutive squares and …heu and [?] by
    the …
    (inaudible)
11. P There is square behind this but it's the sum of the consecutive numbers

Premières diapositives du PowerPoint ayant servi de support à cette phase interactive

Warming-up et établissement de la conjecture





[légère pause]

all “squared”[1]

You know the property but you cannot state it properly

You’ve got some memory of the formula anyway

[E3 n’a pas suivi le même cursus scolaire]

Normally you’re not supposed to know this formula

Denote by *n* …

1 cubed, 2 cubed …

You understand

That’s the sum

Look

Take a look at this slide

Voir désormais page 48 pour le détail des diapositives utilisées dans la suite de la phase interactive d’établissement de la conjecture

[P indique les égalités à compléter ; elles figurent sur la 5ième diapositive p48]

For 1, one cubed is…

E4 [spontanément]

One

P One cubed plus eight is …

E5 nine

P plus 27

3 times 3 times 3

3 times 9

27

[P interroge E6 du doigt]

E6 36

P What sort of number is it?

E1 + E2 +….

A square

P that’s a square

Take a look at that

[P indique en même temps la 6ième diapositive]

[1] all squared : *le tout au carré*

One cubed plus… plus four cubed that is 64.

It's a square number

You see

It works

So what is the conjecture?

[P s'adresse à E7 en particulier, en ammorçant par la formulation…]

It looks like or it seems that …

E7 the square of the sum of the four…

[E7 montre en même temps au tableau, à distance, la formule concernée]

P the question is

And this will be a bit colloquial

C'est familier [alternance codique volontaire]

"That's the square of what"

If you want to be more correct

"what number is it the square of?"

You understand this question??

[P attend l'assentiment des élèves]

E1 + E2 +…

Yes

P It's difficult to state it in English

[P s'adresse à E8]

So, what is in the bracket?

E1 + E2+… [spontanément]

It's one

P that's the square of 1

And then 3

Here, it's 6

What sort of number is in the bracket?

[P s'attend à ce que les élèves reconnaissent des « nombres triangulaires]

So ?

E6 Triangular number(s)

P Triangular numbers

Exactly

What is a triangular number?

I mean, as a number

You remember the picture.

Forget it.

As a number

What is a triangular number?

If the first one is 1

How do you get the next one?

[P s’adresse à E9]

You have one, then you add 2, that’s 3

The you …

It’s the sum of …

E1 + E2 + …

Consecutive numbers

P Integers

Is that the conjecture?

Can you formulate the conjecture as a property now?

E1 + E2 + …

Yes

[P s’adresse à E8]

Try to formulate the property with “any” integer *n*

E8 The sum of the consecutive cube numbers is equal to … [hésite]

P to the ….

[P indique l’exposant 2 sur la diapositive correspondante/ P attend]

E5 [rebondit]

Is equal to the sum of the square of the consecutive… [pause] integers

P exactly

That’s exact

Now

Do you agree with what she said?

E1 + E2 + …

Yes

P do you want to make a traditional proof by induction?

E1 + E2 + …

No, no

P no, that’s not what you’re supposed to do now

You’re going to explain things through manipulations

… try to find a principle of extension

You’re going to make diagrams

And when you feel confident enough, you will show me you have understood using gestures.

[P affiche la diapositive suivante afin de récapituler : « we can now establish a conjecture, etc… »]

You remember the formula

E1 + E2 + …

Yes

P But we don't need it (really)

Forget it

That's not algebraic

It's 1 + 2 + 3 squared

That is, it's a square

What does it make you think of?

What does it call to mind?

[à ce moment, E9 lève déjà la main]

That's physical

Because cubes are something physical

We are going to "**play**" with **real** cubes. [insistance]

[à ce moment, P aperçoit E9 qui lève déjà la main]

Yes ?

E9 It makes me think of a "stack" of cubes.

[E9 vient de réinvestir un terme rencontré lors de la séquence précédente ; celle-ci incluait une phase de consolidation[2]]

P A stack of cubes or, more generally, an arrangement

It's 3D geometry

It's (in) space

You have to do something in space

But a square is not really in space

How could you symbolize a square in a diagram?

We can symbolize cubes by some small squares.

But you remember all that, ok?

You must keep it in mind

You are going to establish a visual proof

I don't expect a traditional proof

[2] Voir Annexes 3

I want you to schematize

You are going to demonstrate with diagrams and you will have to manipulate real cubes

You will have to explain why, if something works at some level, it will necessarily work at the next level

This is the principle of a proof by induction

This is the **logical** principle

But we are not going to make a proof by induction

We are going to make something concrete

We are going to make manipulations

All the manipulations will have to be accompanied – that's the linguistic aspect- will be accompanied by a verbal description

I want you to speak and describe what you do

Is that clear?

E1 + E2 + …

Yes

P I expect you to describe and comment upon your schematization

You will have to make a poster

You know how to generalise

So, if possible, make a generalisation of the property

Use dotted lines

On diagrams

Anticipate what you are going to say

You prepare your explanations to come

[P présente une diapositive, en 3D, élaborée avec Wisweb]

Think of introducing order

Arrange methodically

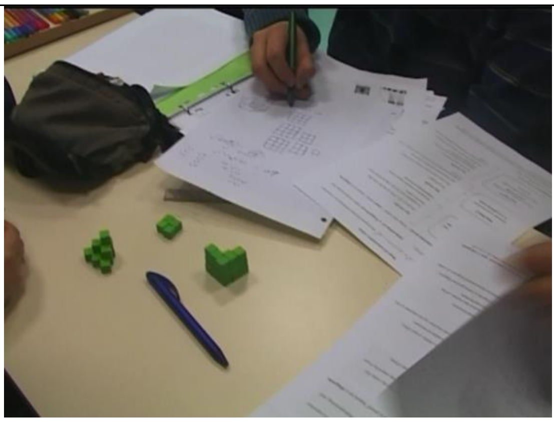
Think of the way you arrange small cubes at a given level and describe how to generalise

And don't forget Gnomons

Remember that they are usually L-shaped

Ensuite les élèves didtribuent le document-support (voir p 48).

Ils se mettent rapidement en groupes de trois ou quatre pour travailler.

	Courts extraits : Groupe1 E1 « après on a une longueur de 2 ici, donc c'est *n* ! » E2 « non, c'est *n*-1, parce que ton *n* c'est 3 »

	Groupe 2 E3 « Bon, juste une question. Est-ce que c'est notre figure initiale, Est-ce qu'on en a besoin pour notre poster ? »

Les échanges sont nombreux. Ils concernent par exemple les propositions d'agencement des cubes, la manière de les nommer, la manière de les schématiser, etc…

Le paragraphe suivant est une transcription de la phase adidactique.

II) Phase adidactique

La phase adidactique débute par la distribution du document-support et des cubes.

Les élèves se placent en groupes de trois ou quatre. Au sein des groupes, les élèves sont invariablement notés E1, E2, E3 et éventuellement E4.

La caméra passe de groupe en groupe.

Groupe 1

1. E1 […] On peut faire des gnomons 3D

Un élève dessine une figure en perspective

Deux élèves manipulent les cubes (E2, E3)

2. E2 Non, c'est pas comme ça le gnomon 3D !

3. E3 Non, c'est comme ça…

En fait tu rajoutes 1 en bas

Et … [pause] sur les côtés…

4. E2 Oui

Faut que ce soit en biais, oui

E2 *rajoute un cube en prolongeant la disposition amorcée par* E1

5. E1 Attends. Après il va falloir qu'on cale ça avec des stylos pour que ça fasse bien droit.

E2 *place des stylos*

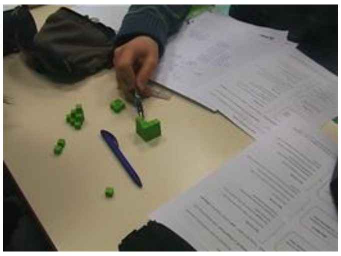
E3 *place des cubes de son côté*

6. E2 Comme ça…

Il va falloir peut-être des cubes en couleur.

Je me répète, là, mais, heu…

7. E3 « English » !



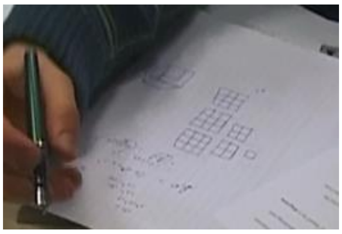
8. E1 Non, on a le droit de parler en anglais, non , heu…, en français.

[pause]

Après, avec le 3D, à la base, là, on a un cube normal…

enfin, à la base, on a un carré.

Donc c'est n²…



9. E2 Hum [acquiesce] …

E2 *suit le raisonnement de* E1

10. E1 Ici, on a n-1 carrés et n-1 carrés

Après on a une longueur de 2 ici, donc c'est n

Ici c'est n

11. E2 Parce qu'il a dit qu'il fallait décomposer [?]

… une formule [?]

12. E3 Non, c'est n-1.

Parce que ton n c'est 3

13. E2 Parce que (n-1)² c'est ça et ça…

14. E3 C'est les petits [?]

E2 *prend deux carrés* (2x2) *dans les mains à partir de l'empilement 3D*

E2 *fait tomber les cubes*

15. E2 On l'a détruit !

De toute façon, fallait le refaire…

[…]

Groupe 2

[…]

16. E1 Non, c'est pas ça !

17. E2 C'est parce qu'on a pas fait de carré(s).

18. E1 Non, mais genre comme ça…

Moi, j'aurais fait… et hop…un petit carré là

E3 *prend la fiche avec les consignes et relit*

Groupe 3

19. E1 On avait 100 tout à l'heure…

20. E2 Ah non … mais c'est *n*… *n*x3

Quatre couches.

21. E1 Tout à l'heure, les nombres qu'on avait…

La somme des nombres positifs,

On avait1, 8… on avait 1, 3, 6…

Groupe 4

22. E1 Tu peux me passer ton stylo.

23. P Vous vous arrêtez à 3.

Moi, je veux l'étape suivante.

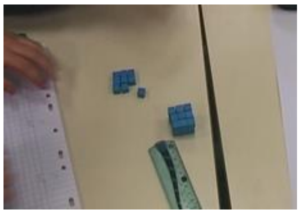
24. E2 Mais oui ça fait 6

25. E3 Parce que là, si on met sur le côté…
26. E4 Vas-y, décompose…
27. E3 Non, non…
28. E4 Regarde, tu laisses la base en bas, hop…

Tu mets sur le côté… Et là

« Plus one »

1^2, ça c'est 2^2



29. E3 Si tu les ajoutes, les deux, ça fait 3^2

1+2 au carré.

30. E2 Ça c'est 2 au cube

E1 Oui mais si tu les ajoutes les deux ça fait quoi…

Ça fait plus un carré, ça fait un rectangle

Si je le mets là ça fait un rectangle

E1 *pense au parallélépipède « rectangle » obtenu ou qu'il va faire apparaître en ajoutant 3^2 sur le haut*

E1 *place la couche carrée* 3x3 *au-dessus, la maintient et la repose*

31. E2 Mais t'es bête ou quoi

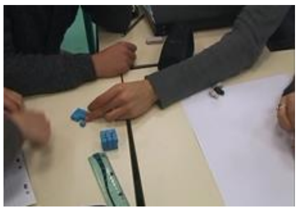
E1 *persiste dans sa manière de voir et de faire*

32. E2,E3 Non, arrête… mais arrête

C'est pas ça qu'il faut faire

E2, E3 *font tomber les cubes* E1 *rigole*

33. E2 Regarde



34. E3 C'était très bien ce qu'on a fait.

Là, regarde

A la limite on peut faire pareil ici

E2, E3 *ont vu que E1 partait sur une mauvaise voie*

Et ça comblera parfaitement…

35. E2 Et celui-là, là

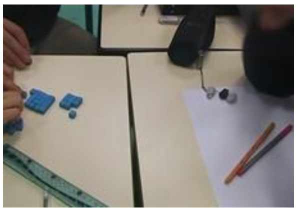
E2 *montre 3 au cube*

36. E1 Je vais le refaire, t'inquiète

E1 *s'apprête à mettre à plat 3 au cube*

37. E3 Attention les cubes vont tomber entre les tables.

E1 dispose les cubes en forme de gnomon, en hésitant



38. E3 Mais pourquoi tu fais ça ?
Tu pars de la base autour… 1, 2, 3 hop 1, 2,3…

39. E2 Attends… 1, 2, 3

40. E3 Fais autour

La redisposition de 3 au cube est celle d'un carré et non pas celle d'un gnomon !

41. E2 Ah non, mais c'est pas ça qu'il fallait faire.

42. E1 Il faut mettre comme ça

E1 *fait un geste le long de 3²*

43. E2 Attends

44. E1 Il faut que tu le rajoutes comme ça pour que ça fasse un gros carré.

45. E2 Comme ça…

46. E1 Non, il faut que tu le rajoutes là et là…

47. E3 Ça fait 27… 27 + 9 …

Groupe 5

48. E1 […] Et après, ça fait [hésite]

49. E2 Non, il en manque là.

50. E1 Ça c'est un L …non…
Ah non, c'est pas un L.

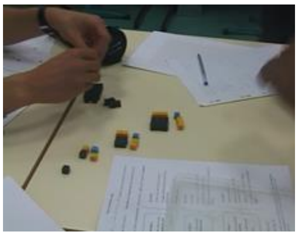
51. E3 Il aurait fallu [?]

52. E1 Tu veux une autre couleur ?

53. E2 Non ,non..

Groupe 3

54. P Il faut faire toute la somme



Groupe 5

55. E1 Non, tu le mets là ça.
56. P Ça commence a être sympa ça !
57. E2 Là, tu le mets comme ça.
58. E3 C'est bon là t'es sûre ?
59. E2 1,2, 3 pour 4, 5, 6 ;
    7, 8, 9 … 10, 11, 12 … 26,27
    C'est bon
60. E3 Et donc ?
61. E2 Ben oui, 3 au cube ça fait 27
62. E3 C'est la fatigue
63. E2 En fait, ça, ce serait ? …

64. E3 C'est ça
    3^2 *est également présent sur le côté*
65. E2 On a 2 au cube et 3 au cube

66. E3 Là c'est bon
    E1, E2, E3 *relisent les consignes*
67. E1 Allez, je le dessine
68. E2,E1 Nous, on fait « algébrique »
    E3 *prend la feuille quadrillée*
69. E3 Donc on va faire le 1 comme ça
    Ensuite j'en fais quatre

Groupe 1

70. P L'idée des gnomons, c'est pas forcément au départ
    Eh oui !
    P *ne veut pas révéler la solution*
    C'est peut-être pour passer d'une somme à la somme n=4, d'accord ?
    Là je veux un seul carré de façon …
    D'abord vous commencez avec 1 ensuite vous rajoutez le cube suivant…
71. E2 …. [?]
72. E1 Moi je sais !...
73. E3 Là, ça fait 3^2
74. E4 Oui mais faut le coupler au visuel
75. E1 Il faut le coupler avec des chiffres.+3 au cube, ça

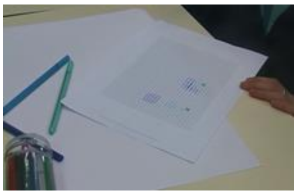
76. E2 fait 3 puissance 3,… 9

77. E3 Ça fait 27 !

78. E2 [rigole] oui, ça fait 27

79. E1 On en a 27, là…

Groupe 2



80. P C'est quoi les dimensions du grand carré ?

81. E1 C'est ça, là …

82. P Et le suivant, vous voyez ce que c'est ?

Je ne vous dis pas plus…

Par contre, il faut me dire pourquoi ça marche

Il faut me dire pourquoi ça va venir pile…

C'est ça l'idée, hein ?

83. E2 Le nombre d'après, c'est (n+1) au cube

84. E4 4 au cube, c'est 4 fois, heu…

Ça fait 16 x 4, 24, 64…voilà

Ça fera 36 + 64, ça fera 100

Ah, ben je sais !

[*perçoit la possibilité de généraliser*]

85. E1 Ça rajoute le nombre de côtés chaque fois…

Ce qu'il y a à rajouter, c'est le nombre

E2 et E4 *discutent à part sur le cas algébrique*

86. E2 *n*, déjà, ça va être sur le côté […]

Groupe 5

E1 *dessine*

87. E1 Je fais mes trois carrés

88. E2 Tu les fais pas ensemble maintenant

89. E1 Non, non, non

Tu fais ça et après je changerai de couleur pour le quatrième…

90. E2 Regarde

Parce que là, on les a rajoutés

Donc ceux-là, il faudrait…

Il faut que tu les rajoutes

E1 *efface la dernière partie et reprends en tenant compte de la remarque de* E2

E1 *passe du dessin à la disposition à plat*

91. E1 Colle-moi les trois là ! […]

Groupe 2

92. P Là, vous avez réussi

Vous avez assez de cubes pour pouvoir faire la somme jusqu'à trois

Et après ça fait un carré

Et après je veux l'étape suivante…

Mais vous n'avez plus assez de cubes

Va falloir que vous m'expliquiez…

Vous essayez de me donner une méthode… de me dire pourquoi ça marche.

Ok ?

Vous pouvez faire des dessins à côté, d'accord ?

93. E2 Non, faut mettre…

94. E3 C'est « chiant » ces petits trucs, là…

E4 *stabilise l'agencement avec un double-décimètre*

Groupe 3

E1 *suit attentivement ce que* E2 *dessine*

95. E2 Le dernier, il est comme ça

Un gnomon avec, heu …

E2 *fait des gestes dans la zone concernée*

E2 *parcourt le dessin au-dessus d'un gnomon imaginaire*

96. E1 Après faudra rajouter 5, 5

« tac, tac » 6, 6 …7, 7

Après faut trouver « la propriété »

[l'extension !]

Groupe 1

97. P Faites un petit dessin

Le groupe est bloqué après avoir disposé convenablement les cubes en carré avec des gnomons détachés

98. E1 Ben, j'attends ça, hein ?

99. P Vous prenez du brouillon

100. E1 Bon, juste, question…

Est-ce que c'est notre figure initiale

E1 *indique les cubes agencés*

Est-ce qu'on en a besoin dans notre poster ?

Est-ce que c'est une figure essentielle, le poster ?...

[*les élèves demandent ici des précisions sur la consigne*]

Oui

101. E3 Ensuite, est-ce que je dessine les couleurs comme

102. E1 ça, là [E1 *indique les cubes*]

Non, tous de la même couleur

103. E3 Non, fais juste des ronds vides

104. E4 On les remplira

C'est des carrés

105. E2 Bon, bon, des carrés […]

106. E4

Groupe 2

107. E1 Là, tu en as 1, 2, 3…

Là, tu vas en avoir 4

E1 *fait une référence au gnomon suivant*

108. E2 T'en auras 4 ici aussi

Groupe 3

109. P Ah, vous avez muis les cubes comme ça, c'est curieux …oui, on peut…

Et on aurait pas pu avoir une disposition plus symétrique ?

C'est pas plus « joli » le symétrique » ?...

Vous voyez la symétrie par rapport à…

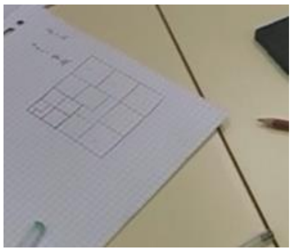
P *fait un geste le long de la diagonale*

principale

Bon, vous avez pensé augnomon à l'intérieur du « truc » [relâchement de P !]

Ça c'est pas mal

Tout ça c'est un gnomon et à l'intérieur vous avez mis un autre gnomon



En fait, moi je veux savoir pourquoi ça marche « **tout le temps** » …

Quand je vais rajouter le cube, je veux savoir exactement ce qui va se passer

On rajoute la longueur qui est donnée

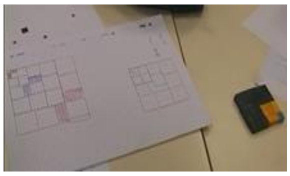
110. E1 Par exemple, là … 1, 2, 3, 4, 5

Si on veut rajouter 6

On va rajouter 6 ici, 6 là

Ouais, ouais…

111. P Là, ça va pas « rentrer pile »



112. E1 E1 *pense aux carrés par couches*

Il y en a deux qui vont rentrer pile de chaque côté et il y aura un gnomon en plus

C'est parce que tu as remarqué que le phénomène

113. P est alterné … Ça, je suis d'accord

Maintenant, il y a juste un truc…

Pourquoi, quand tu prends un cube, ça fait soit un truc comme ça, quand tu les mets à plat, ou soit ça fait ça… Ok ?

Il vous manque juste ça, ok ?

Pourquoi, avec le cube en 3D, on peut le mettre à plat comme ça…

Groupe 5

Le dessin est bien avancé (coloriage effectué)

114. E1 En fait tu mets 4 sur les côtés et tu complètes le tour

115. E2 En fait le 4 c'est « tout con » !

Groupe 2

116. P C'est curieux d'avoir mis les gnomons à l'intérieur

Groupe 5

P *s'adresse à* E1

117. P L'extension, c'est vraiment ça

118. E2 Ah, je ne comprends pas, j'ai vraiment du mal…

119. E1 Faut savoir que sur les côtés tu rajoutes toujours 4

E2 *tente de suivre le processus de généralisation*

Là, il y a le 2, là, le 3, là le 4

120. E2 Regarde

121. P Pourquoi tu as rajouté ça dedans

Regarde, je peux te montrer

P *est contraint d'apporter une aide*

122. E2 Ah, je pensais que…

III) Phase multimodale

1. P Are you ready?
2. E Yes.
3. P Let's go

   Show me something
4. E At first we have three cubes

   One big, one medium and one little

So, we can see that the cube can be decomposed of a square and, heu, two little row(s)…. Yes?

5. P Yes.
6. E And then the second one…
7. P You may use both hands!
8. E OK.

9. E When we compose the three cubes

   we have the big square.
10. P So where is the big square?
11. E Here.
12. P Yes.
13. P So what would be the next step?
14. E [hésite]

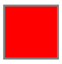
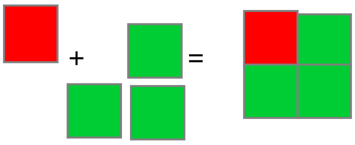
    The next step would be … four…

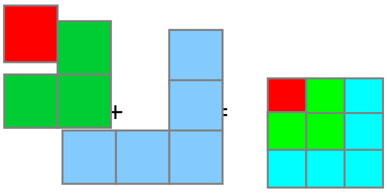
The row of four cubes… [Hesite] 15. P And then? Go on. [ne saisit pas où P veut en venir] 16. P If we had a cube of side 4. 4 by 4 by 4. Where would you place the rows? 17. E Here. 18. P It's just one (row) [E s'apprête à prendre d'autres cubes dans la boîte mais P intervient car la consigne initiale était d'expliquer verbalement] 19. P No ! Don't use… 20. E Ah, ok. 21. P Just explain without any cubes. That' the principle. How should we lay the cubes flat? 22. E We have a (cube) like this (row?) Then (next row?) Then three And then 4 and 4 23. P Ok. Can we generalise that? 24. E Yes. 25. P Is it easy to explain without cubes? 26. E No 27. P So what should we do? 28. E [hésite] 29. P Generalise	

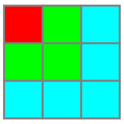
We could do something instead of manipulating cubes. What have we got to do? 30. E A drawing. 31. P Thank you. 32. E Ok…	

ANNEXE 5 : Les identités algébriques et les preuves en L1 et en L2

Parallèle entre preuve schématique et preuve par induction

<table>
<tr><th>schematic / visual elements</th><th colspan="2">intermediate</th><th>algebraic transcription</th></tr>
<tr><td></td><td>an object
a ……….</td><td>a number
a ……….</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">



</td><td colspan="2">particular configurations</td><td rowspan="2">$1 + 3 = 2^2$

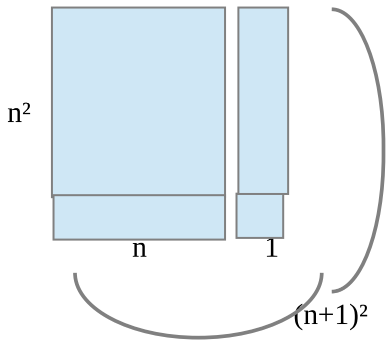
$2^2 + 5 = 3^2$

$1 + 3 + 5 = 3^2$</td></tr>
<tr><td>Adding the ………. (2+1) to the unit-square yields the square of side 2

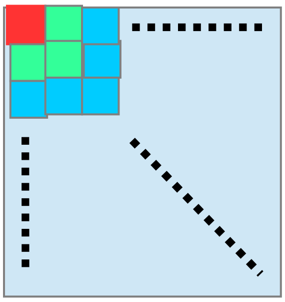
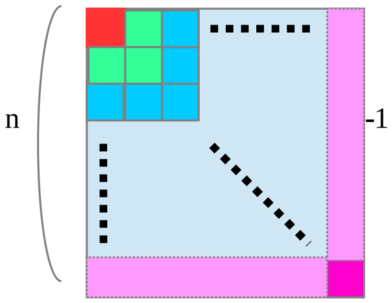
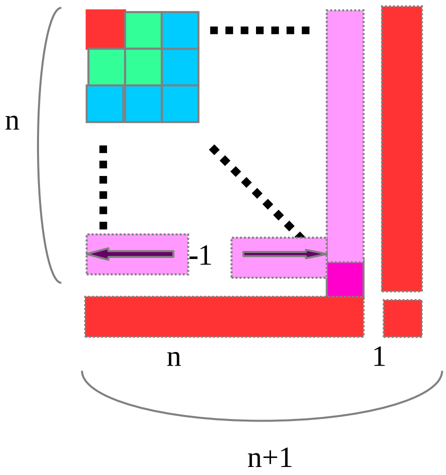
Adding the gnomon (2x2+1) to the square of side 2 yields the ………………3.

consequence:
the square ……….
…….is made up of 3 gnomons: (2x0 +1), (2x1+1) and (2x2+1) (the first gnomon is the same as the unit-square, i.e. 1)</td><td>Adding the ……… number 3 to 1 yields the square number 2^2

Adding the odd number 5 to 2^2 yields ………… …...........3^2

consequence:
the square number 3^2 is the …….. of the consecutive odd numbers 1, 3 and 5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td colspan="2">properties

physical algebraic</td><td rowspan="2">$(n + 1)^2 = n^2 + 2n+1$</td></tr>
<tr><td>Visual identity
Adding a ………
to a square (of side n) yields the next ………</td><td>Algebraic identity (squares of ntegers)
“(n+1) squared is equal to ………..
plus the ……….
product plus …..</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>The sum of …………… gnomons is a square</td>
<td>The sum of consecutive …… numbers is a square number</td>
<td>$1 + 3 + 5 + \ldots = (\ \ )^2$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">
</td>
<td colspan="2">More precision</td>
<td rowspan="3">$1+3+ \ldots + (2n-1) = n^2$</td>
</tr>
<tr>
<td>The last ……..
is recognizable : its value is (2n-1)</td>
<td>The last …… in the sum is no longer implicit : (2n-1)</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Surprisingly, it's almost more difficult to guess that the last term in the sum is (2n-1) (right column) than to notice that the …. inner gnomon is 2n-1 (left column)</td>
</tr>
<tr>
<td>Schematic proof / visual proof

</td>
<td>Schematic induction

1) start by looking at the ……….. corner we observe that the first squares are made up of gnomons

2) By ……… the gnomon of value 2n+1 to the …… with side n we get the next square (i.e. the square with side n+1)

3) Conclusion : A square is made up of consecutive gnomons</td>
<td>Comments

the first step is a matter of ……… the property with the first value(s) of n or along the main diagonal, starting at the top left corner

By adding a gnomon, or by adding 2n+1, we get the next physical …….. (left column) or the next square number (right column)

the conclusion is standard</td>
<td>Proof by induction

1) initialization
With n =1:
1 is simultaneously the first odd ……… and a square (1^2)
Or with n = 2 :
1+3 is a square (2^2)
2) …….. step
Assuming that, for some ……… n, the following ……… holds :
$1+3+ \ldots + (2n-1) = n^2$
and ……. the identity :
$n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$
we get :
$1+3+ \ldots + (2n+1) = (n+1)^2$

3) conclusion :
the sum of ………..
……… numbers is always a square number</td>
</tr>
</table>

Dimension-outil des identités algébriques

- **Activité en classe**

<u>Part I</u>

Here is a logical pattern whose rule is to be conjectured:

R U

R U R U U U

R U R U U U R U U U U U ………

1) Can you determine the next pattern ?

We now consider a path along a coordinate grid so that R stands for *a Shift of 1 unit to the Right* (Right Shift) and that U stands for *a Shift of 1 unit Up* (Upward Shift).

The point attained after a succession of one R and some number of U's is denoted by A_i .

The next point, attained from A_i after *a Shift of 1 unit to the Right* is denoted by B_i

The point A_0 coincides with the origin O of the axes.

Hence, the summarization of the succession of shifts in the following table:

Points attained after a succession of unit-Shifts (R or UUU…U)								
Shift		R	U	R	U U U	R	U U U U U	
Point	O = A_0	B_0	A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	

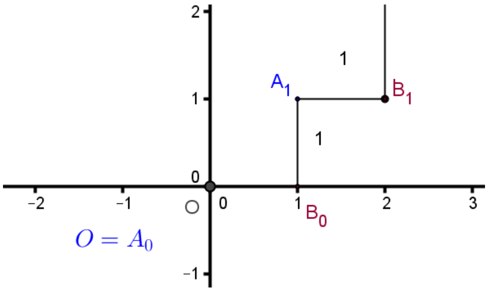
The next picture (taken from the previous table) shows that, starting at A_1 , if we shift *1 unit to the Right* we reach B_1

U	R
A_1	B_1

2) Plot points A_i and B_i on the coordinate grid for i = 1 to 3.

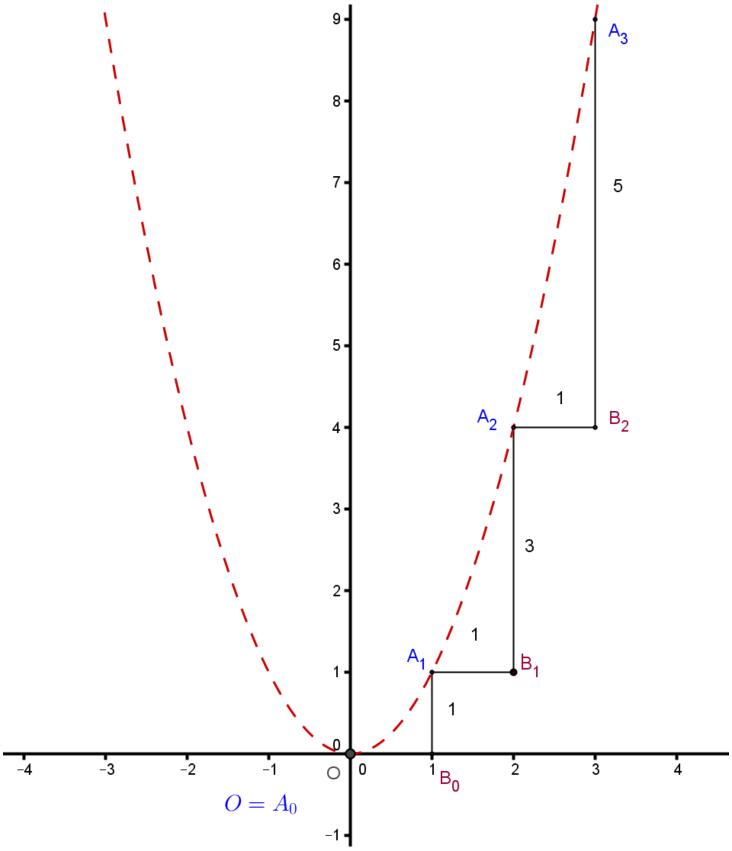
The picture opposite represents the first points:

O , B_0 , A_1 and B_1



The points A_i seem to lie on a well-known curve.

3) Do you recognize this curve? Justify your answer and give an equation of the curve.



4) What do you think as to the location of points B_i ? Justify.

Part II

Write an algorithm that returns the “straight” distance $A_{n-1} A_n$ if we input *n*.

- **Homework**

❖ More about Gnomons

A Gnomon is a kind of arrangement of a certain amount of objects according to a specific shape. (so far, we have only met L-shaped gnomons).

(a physical Gnomon is made up of real, physical objects: balls, cubes, etc…)

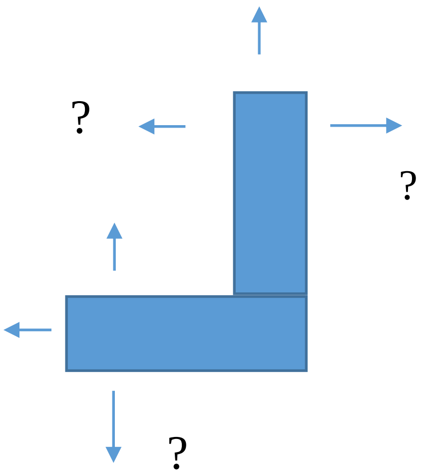
A physical Gnomon can be symbolized on a diagram by an arrangement of unit-squares.

(in this case we get a schematized Gnomon)

As an arrangement, a Gnomon has a shape and can be enlarged or reduced.

This enlargement can be performed according to a rule.

The length and/or the width can be enlarged. The order in which we add unit-squares to get the new Gnomon doesn't really matter.



As a number of objects, arranged according to a particular shape, a Gnomon has a specific value. This value can be increased according to a rule. (the first gnomon you encountered was L-shaped and its value was 2*n*-1, expressed in terms of the rank *n* of the design).

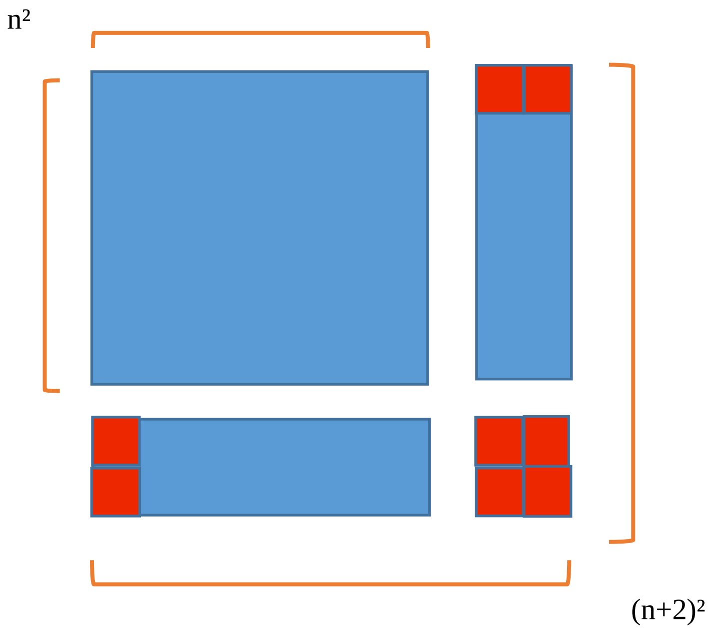
(This rule consists in determining how many new objects are added and in the way of counting these objects)

To sum up:

- ✓ A Gnomon has a specific shape.
- ✓ A Gnomon is a particular arrangement of physical or symbolized objects.
- ✓ A Gnomon has a numerical value which is the number of objects.
- ✓ A Gnomon can be enlarged by fallowing a rule.

- New type of L-shaped Gnomons

The next diagram shows a larger Gnomon and establishes a visual, schematic relationship between n^2 and $(n+2)^2$.



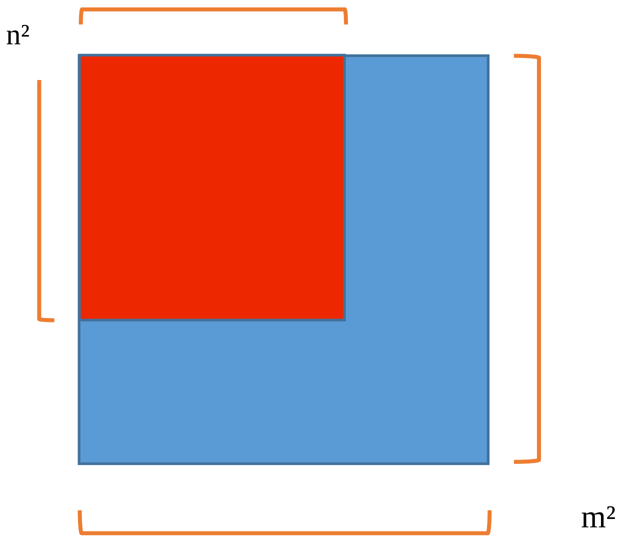
1) Closely examine this diagram and put it into algebraic terms.

   (establish an algebraic transcription)

   There are several different ways of counting the numbers of objects in the arrangement of the Gnomon.

- General situation

The next diagram shows an even larger Gnomon and establishes a visual, schematic relationship between two squares, that is between n^2 and m^2 where m and n are **any** integers.



2) Closely examine this diagram and put it into algebraic terms.

Part II

Here is a logical pattern whose rule is to be conjectured:

R U

R U R U U

R U R U U R U U U ....

1) Can you determine the next pattern ?

We now consider a path along a coordinate grid so that R stands for *a Shift of 1 unit to the Right* (Right Shift) and that U stands for *a Shift of 1 unit Up* (Upward Shift).

The point attained after a succession of one R and some number of U's is denoted by A_i .

The next point, attained from A_i after *a Shift of 1 unit to the Right* is denoted by B_i

The point A_0 coincides with the origin O of the axes.

Hence, the summarization of the succession of shifts in the following table:

Points attained after a succession of unit-Shifts (R or UUU…U)								
Shift		R	U	R	U U	R	U U U	
Point	$O = A_0$	B_0	A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	

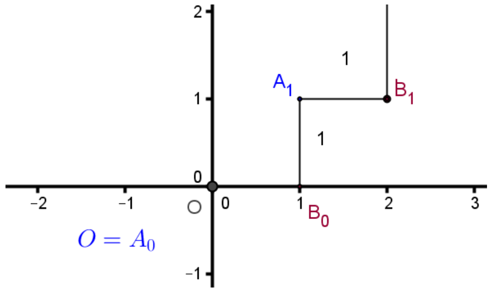
The next picture (taken from the previous table) shows that, starting at A_1 , if we shift *1 unit to the Right* we reach B_1

U	R
A_1	B_1

2) Plot points A_i and B_i on the coordinate grid for i = 1 to 3.

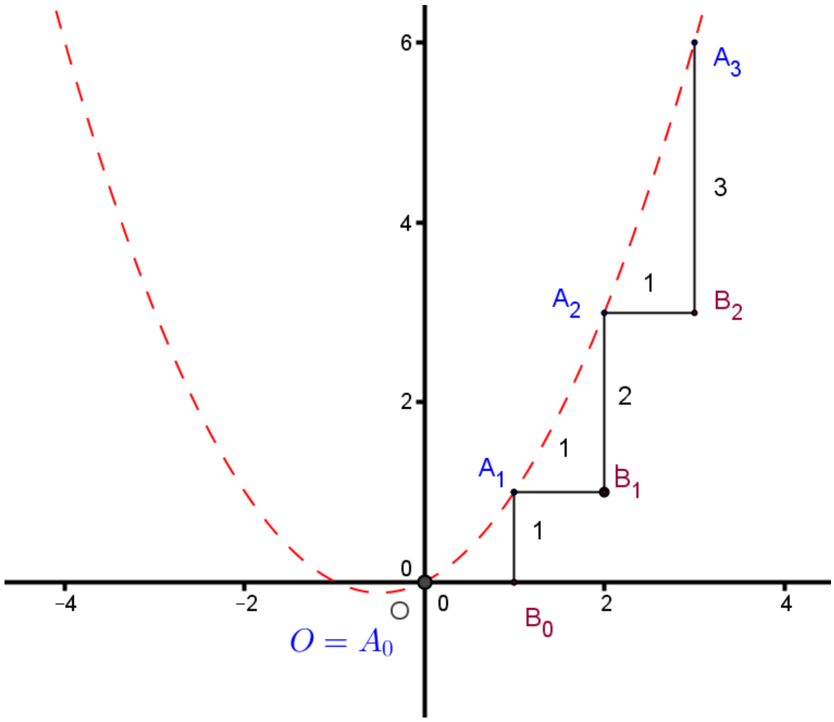
The picture opposite represents the first points:

O , B_0 , A_1 and B_1



The points A_i seem to lie on a parabola.

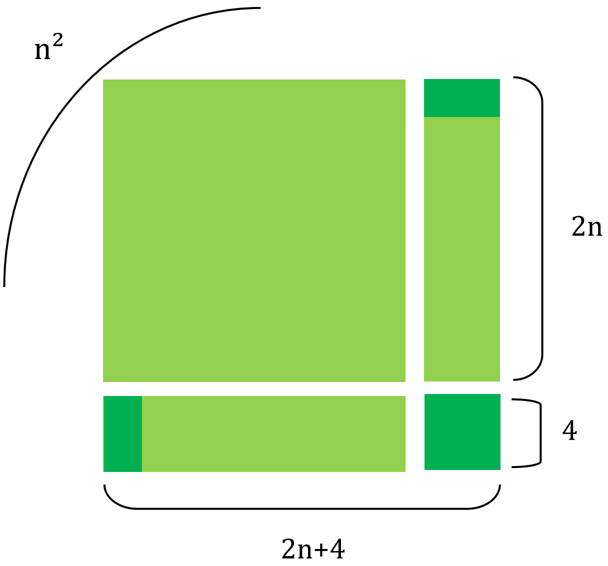
3) Give an equation of the curve. Justify your answer.



4) Determine the coordinates $(\alpha;\beta)$ of the vertex of the parabola and write the equation in vertex form (that is, in canonical form: $y = a\,(x - \alpha)^2 + \beta$).

Nous présentons ci-dessous une production d'élève relative au sujet précédent.

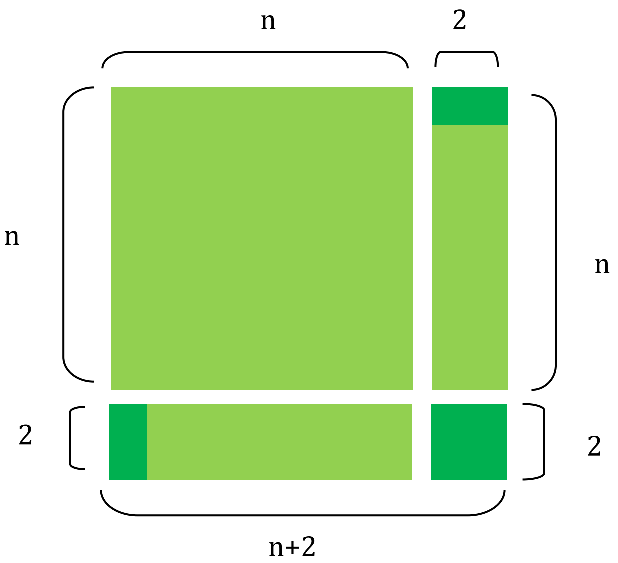
❖ <u>In terms of type of objects :</u>



First, we can expand the algebraic identity in terms of name of objects that is that the big light green square is "named" n^2, the two rectangles are "called" 2n and the small dark green square is 4. By adding the objects, we get:

$n^2 + 2 \times 2n + 4 = n^2 + 4n + 4 = \boxed{(n+2)^2}$

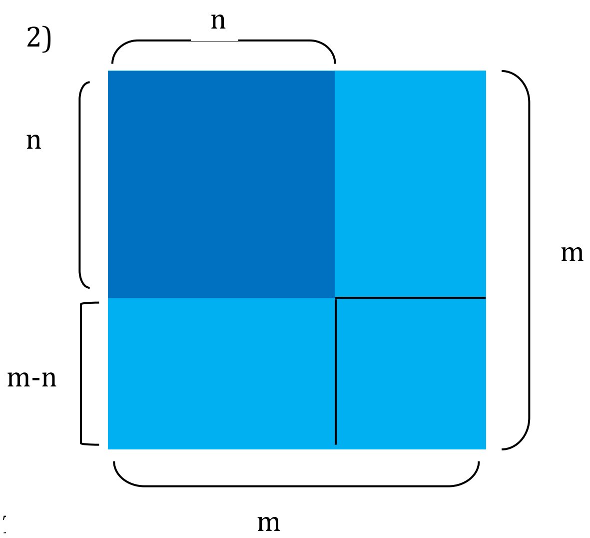
❖ <u>In terms of areas of objects:</u>



We can also see the algebraic identity in terms of area of the objects. That's why we consider that the small dark green square is composed of 4 unit squares. This way, its side is 2, the length of the two rectangles is n and its width is 2, and the side of the big light green square is n. By expressing and calculating the areas, we get:

$n \times n + 2(2 \times n) + 2 \times 2 = n^2 + 4n + 4 = \boxed{(n+2)^2}$

2)



We based our examination on our precious answer. Indeed, the big light blue square has been obtained by adding the small dark blue one and a L-shaped gnomon which is composed of two rectangles and a square. This way, the side of the small light blue square is m-n, the length of the two rectangles is n and its width is m-n, and the side of the dark blue square is n. By expressing and calculating the areas, we get:

$n^2 + 2 \times [n(m-n)] + (m-n)^2 = n^2 + 2(nm-n^2) + m^2 - 2mn + n^2 = 2n^2 - 2n^2 + 2mn - 2mn + m^2 = \boxed{m^2}$

Part II:

Write an algorithm that returns the "straight" distance $A_{n-1}A_n$ if we input n.

Input: Enter n

Treatment: x_a takes value n-1

y_a takes value $(n-1)^2$

x_b takes value n

y_b takes value n^2

d takes value $\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$

Output: Display d

1) R U

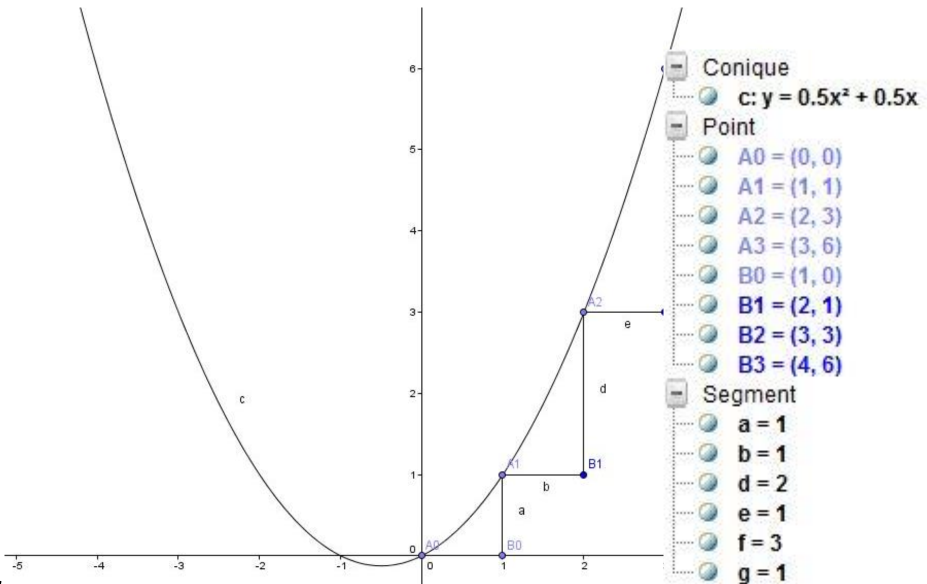
R U R U U

R U R U U R U U U

We can determine the next pattern which is: R U R U U R U U U R U U U U

2) Then, we plot points A_i and B_i on a coordinate grid for i = 1 to 3 and whose coordinates are given in the following table:

Points	A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3
x-value	1	2	2	3	3	4
y-value	1	1	3	3	6	6



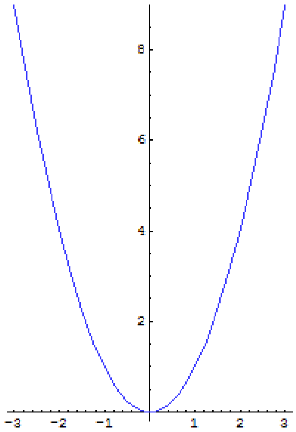
3) The curve is a parabola, so its equation is in the form $y = ax^2 + bx +$ c. The y-value of point A_0 (0;0) is the y-intercept of the parabola so c = 0. Using the coordinates of point A_1 (1;1), and A_2 (2;4), we get the following system:

ANNEXE 6 : Compléments

Exemple de formulation utilisant le ton humoristique[3]

Le premier exemple est tiré du paragraphe *Images and metaphors* **:**

- We think of a function that has a positive derivative as "going up". But the function ***isn't really going up***, it just sits there like your pet rock.



- We think of the parabola $y = x^2$ as like a bowl whose sides go up forever. But "forever" is a metaphor. ***There is no time involved.***
- Besides, we may forget that ***the sides go out in the positive and negative x direction "forever",*** too (every vertical line cuts the graph!), even though the picture looks like they are too steep to do that.
- As these examples illustrate, we think about math objects in terms ***of images and metaphors*** that we have developed out of our experience with them. These are valuable insights but they generally ***cannot be used to prove theorems about them***.

Le second exemple porte sur des *exemples d'images* :

> Children don't always sort these out correctly. Father: "We are all going to fly to Saint Paul to see our cousin Petunia." Little child: "But Dad, I don't know how to fly!"

We know what a ***pyramid*** looks like. But when we refer to the government's food pyramid we are not talking about actual food constituting a pyramidal pile. We are talking about a **visual image** of the pyramid. In the study of literature, the word "image" is used in a more general way, to refer to an evocation of a sensory experience.

Examples of metaphors

We know by direct physical experience what it means to be ***warm*** or ***cold***. We use these words as metaphors in many ways:

We refer to a person as having a warm or cold personality. This has nothing to do with their body temperature.

[3] Extrait du site abstractmath.org

When someone is on a treasure hunt we may tell them they are "getting warm", even if they are hunting outside in the snow.

Le troisième exemple concerne la distinction kind / property:

The ideas of kind and property are not really different.

You could define a kind of mathematical object called **ent** to denote an even integer and another kind **ont** to denote odd integers. Then you could say "42 is an ent" using the same grammar as when you say "42 is an integer". So although we think of "integer" as a ***kind*** of thing and "even" as a ***property*** of things, calling even integers ents allows us to think of "even integer" as a kind.

Exemples de Collocations (en anglais) fréquemment utilisées en Mathématiques

this is evident from
suppose that _, then
it follows that
it now follows that
since _, it follows that _
since _, we see that _
as _, we have _
as _, then _
if we combine this with lemma 1,
now if we recall (2.1),
we arrive at the conclusion that
we come to the conclusion that
under the assumption that
if either _ or _, then _
and, in addition,
and, additionally,
for all _ such that _, we have _
for any _ such that _, it follows that _
there exist no such
there does not exist
turning now to _, we see that
we begin by considering
take an arbitrary n>3
consider an arbitrary n>3
the function f defined on _ by f(x)=_
we want to
it will be proved that
it will appear later that
when dealing with
to a large extent
to a great extent
we are now in a position to define _
as was noted before,

this proves
this amounts
this entails
this provides
this is only true for _
by the suppositions on _,
by the above, we have
as a result, we obtain
according to the definition,
according to definition,
because of _,
the following theorem holds.
the object of this work is not only to find _ but also to use _
not only is it finite, but it even consists of
we show that if _, then
each _ may be written as _
for all integers n>3
for every integer n>3
for any _, there exists a _
in addition, suppose that
furthermore, assume that
suppose _ satisfies the assumption
let us show that
we now prove that
we also show how
we claim that _. indeed,
one of these cases is realized
we are interested in whether _
also, as is shown in _,
as was shown above,
as it was shown above,
as was shown before,

as it was noted before,
is of interest in itself
as may seem at first glance
the previous two cases
the next three cases
the last three functions
the question as to for which _
the question of whether _
we remind that
recall that
remind that
we recall the results of
takes the form
can be viewed as
has a representation of the form

we require that _ be _
three such elements
all three expressions
is of great importance to us
depending on whether
both functions are
for verification of whether _ it is sufficient to
and vice versa
instead of _ it would have sufficed to take _
in one sense or another
provides a way of describing
a way of constructing
may be regarded as
a graph each of whose components is a tree
a graph whose each component is a tree

Extrait de lexique monolingue (anglais) non phraséologique

Verbes d'action

to count
to solve
to compute
to work out
to determine
to look for
to search for
to raise to the square
to assume
to deduce from
to conclude
to prove
to show
to assert
to recap
to rank

To level off
To top
To fall off
To recover

Noms

Calculation
Reasoning
proof
Deduction
theorem
Axiom
Hypothesis
algorithm
instruction
definition
property

to estimate
to evaluate
to be equal to
to equal
to forecast
to foresee
to figure
grouping
to transpose
to extract
to simplify
to factorize
to expand= to develop
to substitute
to replace
to eliminate
to transform, to change into
to change the subject
to rearrange the formula
to vanish
to cancel
to satisfy
to increase by
to increase to
to decrease by
to decrease to
to remain constant
to rise
to raise
to vary (by)
The level rises to a peak
To pick up
To reach a peak
To plummet

proposition
relation
condition
comparison
opposite
reciprocal
converse
contrapositive
counterexample
a premise, conjecture
paradox
unit
unity
array
matrix
row
column
line
symbol
variable
random number
random variable
calculator
computer

Adjectifs

included
excluded
finite
infinite
implicit
explicit
symmetric (en soi)
symmetrical (par rapport à)
unique

Exemple de lexique simple (non phraséologique) avec phonétique

Extrait du site Emilangues

Mathematics vocabulary with phonetics and sound (English to French)

(Pour accéder au son, cliquer sur la phonétique)

angle bisector	æŋgl, baɪˈsektəʳ	bissectrice
Archimedes	ˌɑːkɪˈmiːdiz	Archimède
circumcentre	ˌsɜːkəmˈsentəʳ	centre du . . .
circumcircle	ˈsɜːkəmˌsɜːkl	cercle circonscrit
converse	ˈkɒnvɜːs	réciproque (*nom*)
diameter	daɪˈæmɪtəʳ	diamètre
divisible	dɪˈvɪzəbl	divisible
division	dɪˈvɪʒn	division
divisor	dɪˈvaɪzəʳ	diviseur
equation	ɪˈkweɪʒn	équation
equidistant from	ˌiːkwɪˈdɪstənt, ˌekwɪˈdɪstənt frɒm	équidistant de
equilateral	ˌiːkwɪˈlæt(ə)r(ə)l	équilatéral
frequency	ˈfriːkwənsɪ	effectif
finite	ˈfaɪnaɪt	fini
geometry	dʒɪˈɒmətrɪ	géométrie
histogram	ˈhɪstəgræm	histogramme
hypotenuse	haɪˈpɒtənjuːz	hypoténuse
hypothesis *plur.* -ses	haɪˈpɒθɪsɪs -siːz	hypothèse
image	ˈɪmɪdʒ	image
infinite	ˈɪnfɪnət	infini
integer	ˈɪntɪdʒəʳ	entier relatif
interval	ˈɪntəvl	intervalle
irrational	ɪˈræʃənl	irrationnel
isosceles	aɪˈsɒsɪliːz	isocèle
mathematician	ˌmæθməˈtɪʃn	mathématicien
mathematics	ˌmæθˈmætɪks	mathématiques
measure	ˈmeʒəʳ	mesure
measurement	ˈmeʒəʳmənt	mesure
median	ˈmiːdɪən	médiane
multiple	ˈmʌltɪpl	multiple
negative	ˈnegətɪv	strictement négatif
numerator	ˈnjuːməreɪtəʳ	numérateur
orthogonal	ɔːˈθɒg(ə)n(ə)l	orthogonal
parallel	ˈpærəlel	parallèle (droites)
parallel	ˈpærəlel	colinéaire (vecteurs)
parallelogram	ˌpærəˈleləgræm	parallèlogramme
parenthesis *plur.* -ses	pəˈrenθɪsɪs -siːz	parenthèse
per cent (GB)	pəˈsent	pour cent %
percent (US)	pəˈsent	pour cent %
percentage	pəˈsentɪdʒ	pourcentage
perpendicular bisector	ˌpɜːpenˈdɪkjʊləʳ, baɪˈsektəʳ	médiatrice
polygon	ˈpɒlɪgən	polygone
polyhedron *plur.* -dra	ˌpɒlɪˈhiːdrən -drə	polyèdre

LEXIQUE ANGLAIS-FRANCAIS DE MATHEMATIQUES AVEC PHONETIQUE ET SON
Alain Gauchet - Emilangues - 2011

Exemples de résultats fournis avec des dictionnaires phraséologiques

Dictionnaire : Linguee


À propos de Linguee | Linguee in English | Participer | Connexion | Outils | Contact | Aide

Linguee

français ↔ anglais

à â é è ê ë ï î ô ù û ç œ æ

pattern

Recherche

Désormais sur Linguee: La paire francais- allemand et beaucoup d'autres langues

Dictionnaire rédactionnel

pattern *nom*
motif *m*
modèle *m*
schéma *m*
dessin *m*
patron *m*
scénario *m*
prototype *m*
formule *f*

pattern *verbe*
modeler *v* · ouvrer *v*

Exemples :

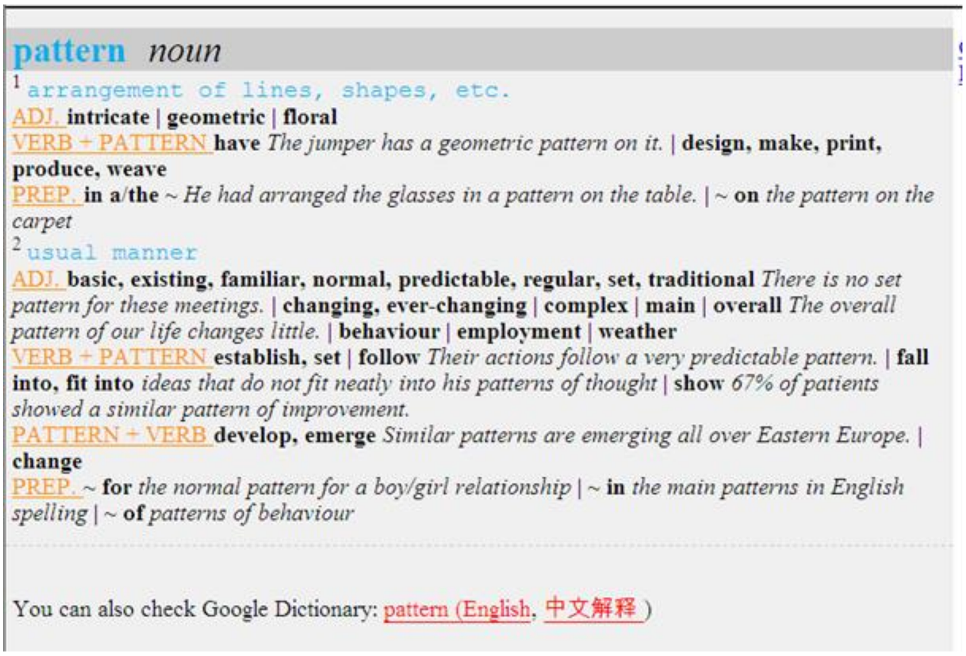
checked pattern *nom*
quadrillage *m*

Exemples de traduction provenant de sources externes pour 'pattern'

anglais	français
This potential will vary depending on the exposure pattern to the substance. *guidance.echa.europa.eu*	Ce potentiel varie en fonction du schéma d'exposition à la substance. *guidance.echa.europa.eu*
In order to evaluate whether injurious dumping would be likely to recur if the measure currently in force against Russia were to be removed, reference must be made to the pattern of trade between Russia and the Community in the investigation period and the period leading up to it. *eur-lex.europa.eu*	Pour évaluer le risque de réapparition du dumping préjudiciable en cas d'abrogation des mesures actuellement en vigueur pour la Russie, il faut tenir compte de la structure des échanges entre la Russie et la Communauté au cours de l'enquête et de la période qui l'a précédée. *eur-lex.europa.eu*
This pattern of evasion is unworthy of a government that walks around claiming that it is clean. *www2.parl.gc.ca*	Cette pratique de l'esquive est indigne d'un gouvernement qui se vante d'être intègre. *www2.parl.gc.ca*
This also helps to explain the somewhat volatile pattern of inflation perceptions. *ecb.europa.eu*	Il permet également d'expliquer le caractère assez volatil de la perception de l'inflation. *ecb.europa.eu*
This pattern of restructuring and consolidation continued in 1999. *ecb.europa.eu*	Ces opérations de restructuration et de consolidation du secteur bancaire se sont poursuivies en 1999. *ecb.europa.eu*

Dictionnaire : *Oxford collocations dictionary for students of English*

http://oxforddictionary.so8848.com/search1?word=pattern


pattern *noun*

1 arrangement of lines, shapes, etc.

ADJ. **intricate** | **geometric** | **floral**

VERB + PATTERN **have** *The jumper has a geometric pattern on it.* | **design, make, print, produce, weave**

PREP. **in a/the ~** *He had arranged the glasses in a pattern on the table.* | **~ on** *the pattern on the carpet*

2 usual manner

ADJ. **basic, existing, familiar, normal, predictable, regular, set, traditional** *There is no set pattern for these meetings.* | **changing, ever-changing** | **complex** | **main** | **overall** *The overall pattern of our life changes little.* | **behaviour** | **employment** | **weather**

VERB + PATTERN **establish, set** | **follow** *Their actions follow a very predictable pattern.* | **fall into, fit into** *ideas that do not fit neatly into his patterns of thought* | **show** *67% of patients showed a similar pattern of improvement.*

PATTERN + VERB **develop, emerge** *Similar patterns are emerging all over Eastern Europe.* | **change**

PREP. **~ for** *the normal pattern for a boy/girl relationship* | **~ in** *the main patterns in English spelling* | **~ of** *patterns of behaviour*

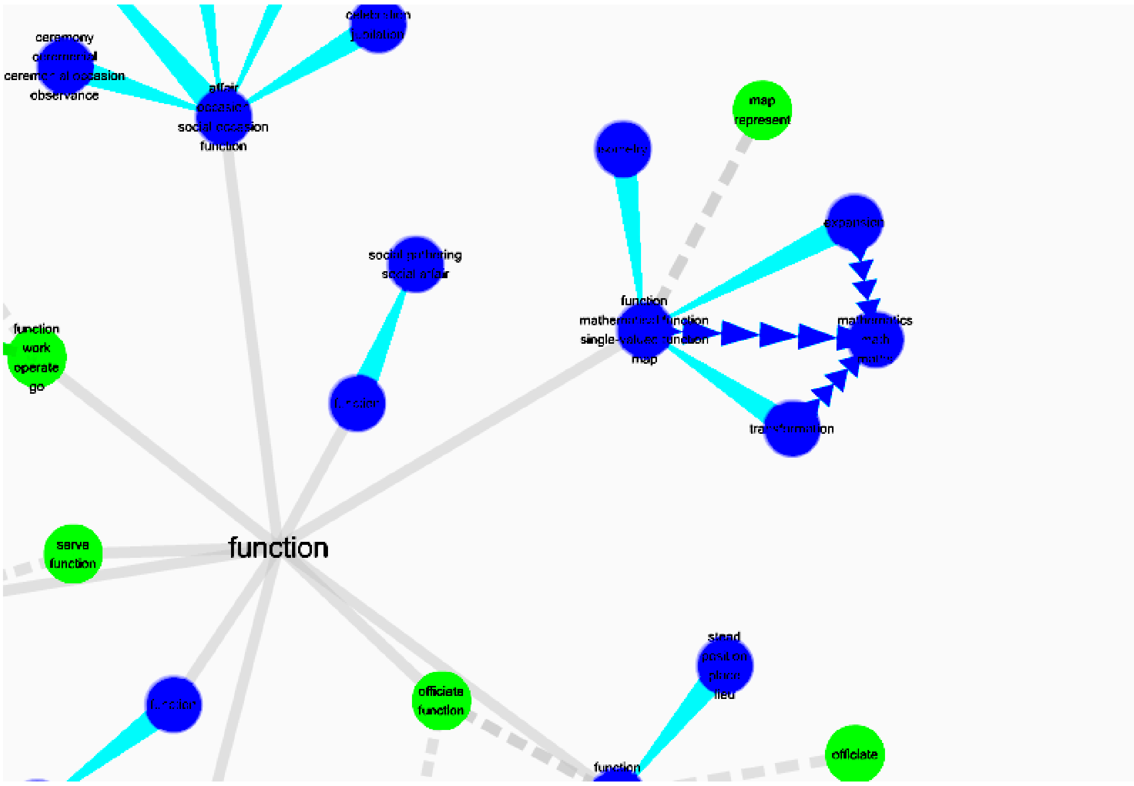
You can also check Google Dictionary: pattern (English, 中文解释)

Exemples de résultats fournis par les dictionnaires visuels (visual dictionaries)

Dictionnaire : visuwords

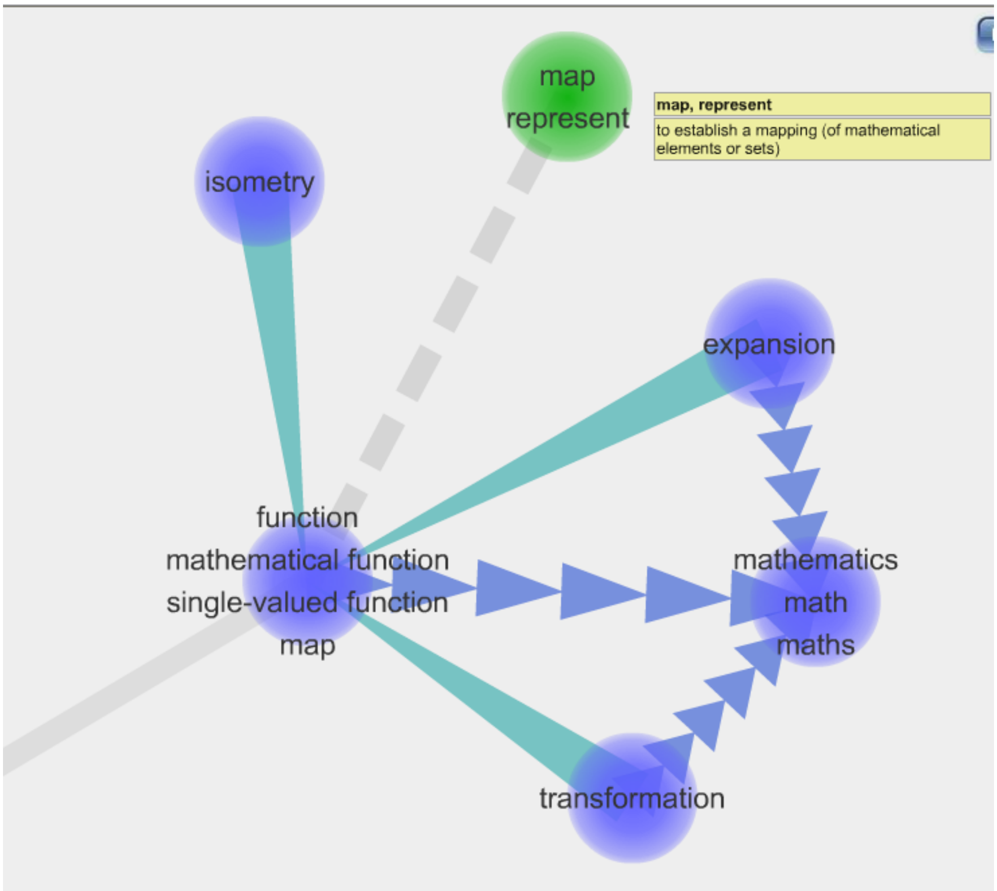
http://www.visuwords.com

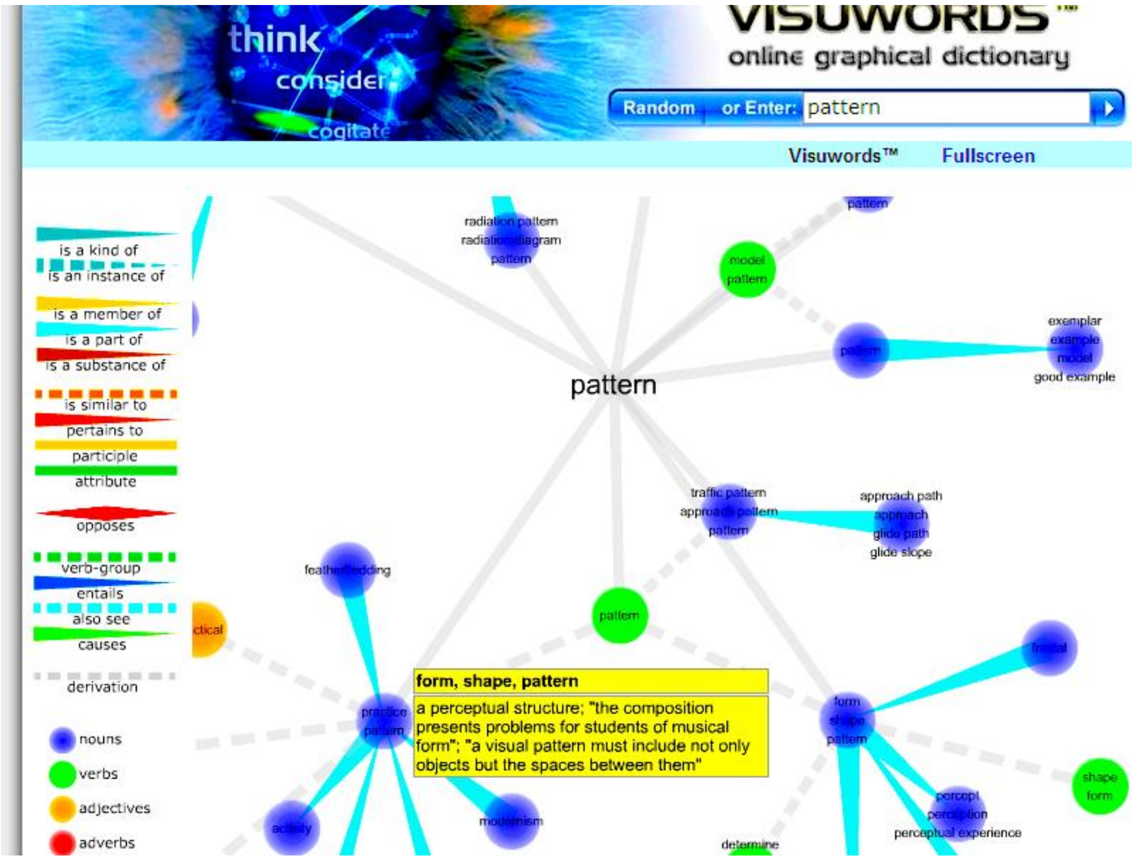
autour des termes *function, pattern, map*



Dans les figures qui suivent, des renseignements d'ordre définitoire ou phraséologique apparaissent dans les encadrés (en jaune).

Au-delà de son caractère convivial et original, le dictionnaire *visuwords* constitue une ressource intéressante pour la phraséologie. Les stuctures phraséologiques (combinaisons de mots du type collocations) apparaissent en lien direct avec les nœuds sémantiques du réseau (voir ci-dessous).


map
represent
map, represent
to establish a mapping (of mathematical elements or sets)
isometry
expansion
function
mathematical function
single-valued function
map
mathematics
math
maths
transformation

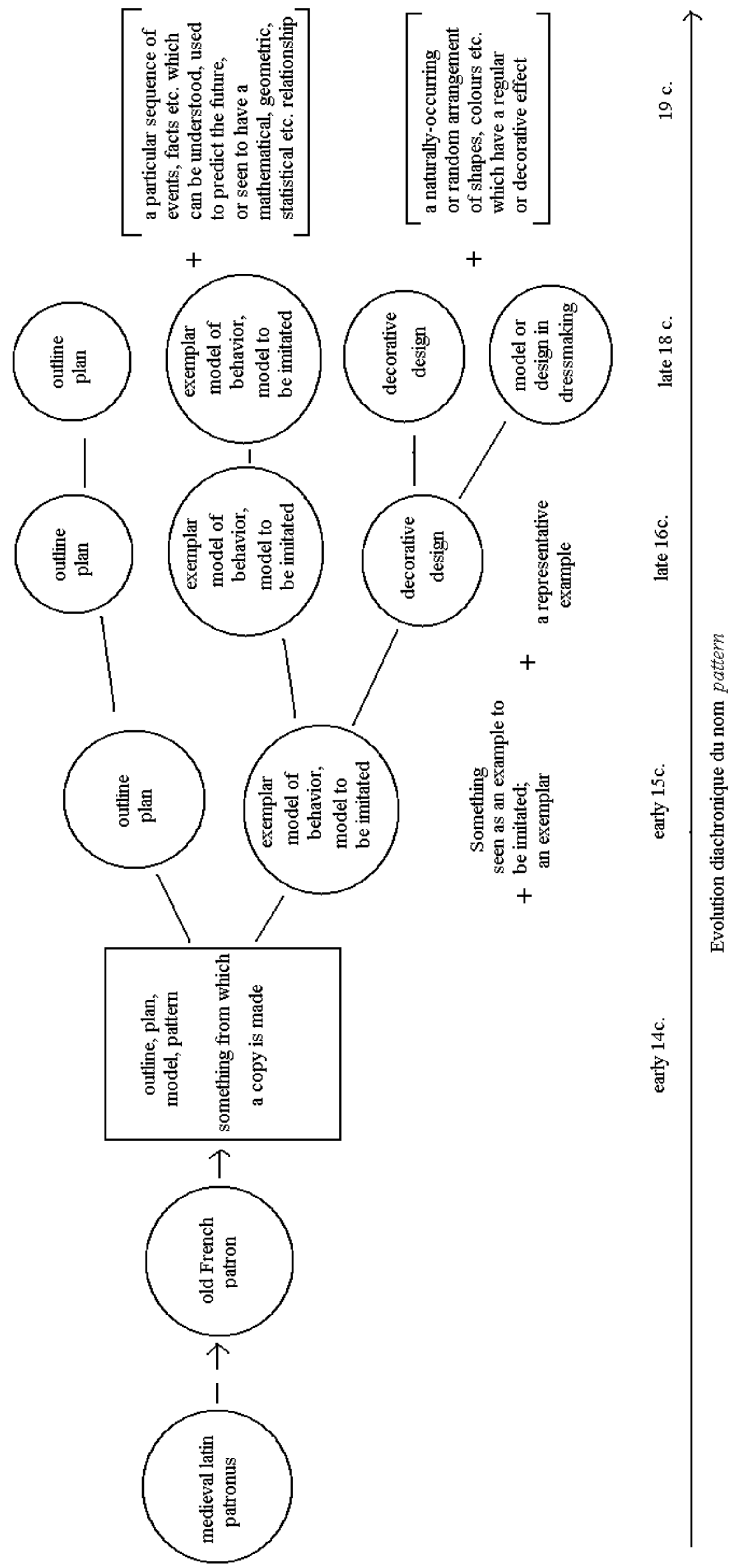

think
consider
cogitate
VISUWORDS™
online graphical dictionary
Random
or Enter:
pattern
Visuwords™
Fullscreen
is a kind of
is an instance of
is a member of
is a part of
is a substance of
is similar to
pertains to
participle
attribute
opposes
verb-group
entails
also see
causes
derivation
nouns
verbs
adjectives
adverbs
pattern
radiation pattern
radiation diagram
pattern
model
pattern
exemplar
example
model
good example
traffic pattern
approach pattern
pattern
approach path
approach
glide path
glide slope
pattern
form, shape, pattern
a perceptual structure; "the composition presents problems for students of musical form"; "a visual pattern must include not only objects but the spaces between them"
percept
perception
perceptual experience
shape
form
modernism
determine

Word clouds

Exemples de résultats obtenus avec le logiciel *wordle,* à partir de quelques pages du site *Math is fun* (thème des probabilités)

http://www.wordle.net/

Evolution diachronique de *pattern*



Evolution diachronique du nom *pattern*

Définitions lexicales (*raisonnement, preuve, démonstration*, etc…)

Les définitions proviennent des sites suivants : http://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/... http://www.cnrtl.fr/definition/...

- Raisonnement 1 (Larousse)

1.a. Activité, exercice de la raison, de la pensée : *comprendre les choses par intuition plutôt qu'en faisant appel au raisonnement.*

1.b. Suite d'arguments, de propositions liés les uns aux autres, en particulier selon des principes logiques, et organisés de manière à aboutir à une conclusion : *suivez bien mon raisonnement*.

- Raisonnement 2 (CNRTL)

2.a. Faculté d'analyser le réel, de percevoir les relations entre les êtres, les rapports entre les objets, présents ou non, de comprendre les faits; exercice de cette faculté, activité de la raison discursive.

2.b. Capacité de connaître, de juger, de convaincre; aptitude à comprendre, envisagée du point de vue de son développement plus ou moins grand selon les personnes; qualité d'une personne, disposition d'un esprit qui juge avec discernement, avec sagesse.

2.c. *Notamment en logique et dans le langage Scientifique*. Opération qui consiste à lier deux propositions pour en former une troisième (ou conclusion), au moyen de règles logiques.

2.d. Ensemble des arguments issus d'une réflexion, mis en œuvre dans une discussion, et qui ont pour but de convaincre quelqu'un ou de démontrer, de prouver quelque chose.

2.e. *Notamment en logique et dans le langage Scientifique*. Suite logique de propositions aboutissant à une conclusion. *Mettre en forme, construire un raisonnement*.

- Preuve 1 (Larousse)

1.a. Élément matériel (exemple document contractuel, attestation) qui démontre, établit, prouve la vérité ou la réalité d'une situation de fait ou de droit : *la preuve d'un crime*.

1.b. Opération par laquelle on contrôle l'exactitude d'un calcul ou la justesse de la solution d'un problème.

- Preuve 2 (CNRTL)

2.a. Fait, témoignage, raisonnement susceptible d'établir de manière irréfutable la vérité ou la réalité de (quelque chose).

- Démonstration 1 (Larousse)

1.a. Action de démontrer, de rendre évidente la vérité d'une loi scientifique, d'un raisonnement, d'une donnée objective : *démonstration d'une théorie*.

1.b. Ensemble de formules qui s'enchaînent à l'intérieur d'une théorie (théorie de la démonstration) et dont la dernière constitue un théorème, appelé également *thèse*.

1.c. *Chez Descartes*, raisonnement mathématique qui, procédant du plus simple au plus complexe, parvient à montrer la vérité de propositions déduites d'autres propositions déjà admises comme vraies.

- Démonstration 2 (CNRTL)

2.a. Action de montrer, d'expliquer par des expériences faites sous les yeux de l'assistance la vérité d'une donnée scientifique.

2.b. Action de démontrer par le raisonnement.

2.c. *Logique*. Raisonnement qui établit la vérité d'une proposition déductivement, c'est-à-dire en la rattachant par un lien nécessaire à d'autres propositions admises comme vraies ou antérieurement démontrées.

- Argumentation 1 (Larousse)

1.a. Ensemble de techniques discursives destinées à provoquer ou à accroître l'adhésion de l'interlocuteur aux thèses qui lui sont présentées.

- Argumentation 2 (CNRTL)

1.b. Action d'argumenter; ensemble des raisonnements par lesquels on déduit les conséquences logiques d'un principe, d'une cause ou d'un fait, en vue de prouver le bien-fondé d'une affirmation, et de convaincre.

- Logique 1 (Larousse)

1.a. Science du raisonnement en lui-même, abstraction faite de la matière à laquelle il s'applique et de tout processus psychologique.
1.b. Caractère logique, rationnel de quelque chose : *admirez la logique de son raisonnement*.
1.c. Manière de raisonner, d'agir cohérente, rationnelle : *travailler avec logique*.
1.d. Manière dont les faits s'enchaînent, découlent les uns des autres : *c'est dans la logique des choses*.

- Logique 2 (CNRTL)

2.a. Science relative aux processus de la pensée rationnelle (induction, déduction, hypothèse p. ex.) et à la formulation discursive des vérités.
2.b. *Logique formelle*. Étude des concepts, jugements et raisonnements considérés abstraitement et sans considération des objets qu'ils désignent. *Logique propositionnelle, modale, bivalente, plurivalente, binaire; logique des prédicats; logique des propositions.*
2.c. *Logique naturelle*. Capacité naturelle en vertu de laquelle l'intelligence discerne dans les phénomènes de la nature des rapports de causalité : *C'est de l'extension d'une certaine géométrie naturelle, suggérée par les propriétés générales et immédiatement aperçues des solides, que la logique naturelle est sortie. C'est de cette logique naturelle, à son tour, qu'est sortie la géométrie scientifique*. Bergson, Évol. créatr.,1907, p. 162.

- Vérité 1 (Larousse)

1.a. Adéquation entre la réalité et l'homme qui la pense.
1.b. Idée, proposition qui emporte l'assentiment général ou s'accorde avec le sentiment que quelqu'un a de la réalité : *les vérités éternelles*.
1.c. Connaissance ou expression d'une connaissance conforme à la réalité, aux faits tels qu'ils se sont déroulés ; les faits réels eux-mêmes : *le témoin a caché la vérité*.
1.d. *En logique.* Position d'une proposition par rapport aux conditions imposées par un langage donné et par rapport à un état de fait.

- Vérité 2 (CNRTL)

2.a. Connaissance reconnue comme juste, comme conforme à son objet et possédant à ce titre une valeur absolue, ultime.
2.b. *En logique*. Conformité de la pensée ou de son expression avec son objet. Rapport de non-contradiction entre une proposition et un ensemble de propositions servant de référence.

Formes d’enseignement et d’apprentissage des mathématiques[4]

(en anglais)

The Coding of communication activities is based on the CEFR: R = reception; P = production; I = interaction; M = mediation; O = oral; W = written.

Presentation by the teacher (teacher-learner interaction as monologic instruction) using visual aids (maps, diagrams, data tables, graphs, computer animations, applets dynamic geometry software etc.) (AuR, WR and WP note-taking)	teacher-learner interaction as monologic instruction / frontal education
Teacher-learner interaction as dialogic instruction (OI)	teacher-learner interaction as dialogic instruction / pedagogical dialogue / IRE model[5]
Learners presenting the results of their homework using visual aids (OWP), comparing the results (AuR, WR), asking and answering questions using visual aids (OWI)	learner-learner interaction as monologic instruction / presentations by students
Learners explaining a mathematical conception, an assertion, a rule, a procedure, a proof etc. to others (OWI)	learner-learner interaction as dialogic instruction / instruction by peers
Learners read the textbook (WR) and solve problems (WP) or work individually within a learning environment (WR) and (WP)	Individual work (problem solving)
Learners working on mathematical exercises individually (WP)	Individual work (practising)
Learners exploring individually a mathematical state of affairs or testing conjectures systematically (WR, WP)	Individual work (exploring)

[4] LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN H. (2012) Items for a description of linguistic competence in the language of schooling necessary for learning/ teaching mathematics (*in secondary education).* An approach with reference points, *in language and school subjects linguistic dimensions of knowledge building in school curricula, n° 4, Language Policy Unit Directorate of Education, DGII,* Platform of resources and references for plurilingual and intercultural education Council of Europe.

[5] The IRE model (Initiation by the teacher – Response by the learners – Evaluation by the teacher) was presented by Sinclair & Coulthard (1975).

Gathering information (WR and WP: note-taking)	Individual work (gathering information)
Activities run as projects (linking different competences) of individual research; e.g. inventing new mathematical problems (WP) departing from solved problems (WR)	Individual work (working on an individual project / creative work)
Learners writing a study diary (WP)	Individual work (metacognition)
Learners interact with fellow pupils in group work (WR, WP, OI, OWI) solving a problem or working together with a learning environment	Group work (problem solving)
Learners exploring individually a mathematical state of affairs or testing conjectures systematically (OWI , WP)	Group work (exploring)
Searching information: planning the search (OI), gathering information (WR and WP; note-taking); sharing the results (OWI)	Group work (planning the search for information), individual work (gathering information)
Presentations of the results of group work by learners (OP) based on notes, using PowerPoint (O&WP), Blackboard (O&WP), etc.; answering questions (OWI)	Group work (preparing a presentation), individual work (presenting)
Activities run as projects (linking different competences) as group research (OWI, O&WP)	Group work (working on a common project)
Teamwork: Developing new mathematical problems (OI, WP)	Group work (creative work)
Controlling and reflecting results (WR, OI)	Group work (reflective work)

Niveaux de discours

Level	Type of Discourse	Description
1	**Answering, stating, or sharing**	A student gives a short right or wrong answer to a direct question, or a student makes a simple statement or shares his or her results in a way that does not involve an explanation of how or why.
2	**Explaining**	A student explains a mathematical idea or procedure by describing how or what he or she did but does not explain why.
3	**Questioning or challenging**	A student asks a question to clarify his or her understanding of a mathematical idea or procedure, or a student makes a statement or asks a question in a way that challenges the validity of an idea or procedure.
4	**Relating, predicting, or conjecturing**	A student makes a statement indicating that he or she has made a connection or sees a relationship to some prior knowledge or experience, or a student makes a prediction or a conjecture based on his or her understanding of the mathematics behind the problem.
5	**Justifying or generalizing**	A student provides a justification for the validity of a mathematical idea or procedure, or makes a statement that is evidence of a shift from a specific example to the general case.

Extrait de :

Oregon Mathematics Leadership Institute Spring 2007 Evaluation Report

by D. Weaver, 2007, Portland, OR, RMC Research Corporation, p. 26.

Le projet que nous mentionnons, et qui était focalisé sur le discours mathématique des élèves, a fait l'objet d'une analyse et d'un compte-rendu (Fredericks et Van Cleave)

Exemples de questions incitant au retour réflexif sur la tâche ou facilitant l'anticipation ou l'imagination

Questions invitant à un retour réflexif sur le travail ou l'activité :	Questions facilitant la l'anticipation, l'imagination ou la résolution de problème :
What mathematics were you investigating? What questions arose as you worked? What were you thinking when you made decisions? What strategy did you select to solve the problem? What changes did you have to make to solve the problem? What was the most challenging part of the task? What were the steps involved? What was the most important thing you learned in this activity today? What else could you have done?	What would happen if ………..? What decisions can you make from the pattern that you discovered? How else might you have solved the problem? Will it be the same if we use different numbers? How is this pattern like ……….. ? How can you prove that there is only one possible answer? Can you tell me what is the same and what is different? How can you prove your estimate?

Exemple de séance à focalisation linguistique

Nous insistons auprès du lecteur sur le fait que nous avons dû faire des choix en ce qui concerne les thèmes abordés au niveau des séances expérimentales. Pour des raisons de place limitée, mais aussi du fait que nous considérons avoir choisi jusqu'à présent un moyen d'illustrer convenablement nos propos théoriques en concentrant nos efforts sur le thème des preuves visuelles, et de manière plus générale sur celui de l'arithmétique, nous ne présenterons dans cette partie que quelques exemples issus de séances que nous avons effectuées avec les élèves de première ou de terminale européenne. Nous joignons également quelques documents complémentaires.

Cette séance a été effectuée avec l'aide de dictionnaires en ligne :

http://www.larousse.fr/dictionnaires/anglais-français
http://www.thesaurus.com
http://www.etymonline.com
http://www.prefixsuffix.com

Elle est inspirée de l'article « Wort.Schatz » de Tanja Tajmel (Tajmel 2011).

Keyword	To differentiate
Examples of use Everyday language	he cannot differentiate between mother and daughter / a policy which is differentiated by sector and sub-sector / to identify what differentiates the two categories /
Other languages	Spanish : differenciare German : unterscheiden French : différencier
Meanings in mathematical context	to calculate or get the derivative of (a function)
Examples in mathematical context	to differentiate the function x^2+2x+3 WRT x
Collocations	unable to differentiate between/ differentiate between right and wrong hard to differentiate
Prepositional phrases	differentiate X from Y / differentiate between X and Y/ differentiate X and Y
Synonyms	distinguish / separate
Antonyms	link / group math: to integrate
Idioms / proverbs / rhymes	
Similar words / words that look similar	dissociate / disclose / disrupt / detach / dismiss / distract referentiate
Word root	difference / differ, infer radical: "fer"
Etymology	1816, from Medieval Latin *differentiatus*, past participle of *differentiare*, from Latin *differentia* originally a mathematical term
Prefix / suffix	dis- / -iate or -tiate

Exemples de sujets donnés à l'épreuve spécifique de terminale

Rappel :

L'élève dispose de 20 minutes de préparation et présente sa solution pendant 10 minutes. L'épreuve se prolonge par 10 minutes supplémentaires consacrées à un entretien sur un des thèmes d'une liste proposée par l'élève.

Les sujets 2 et 3 sont des sujets plus propices à un élargissement du discours. Ils sont très récents (épreuve de mai 2015, Académie de Bordeaux). Le sujet 1 n'intègre pas les recommandations récentes selon lesquelles le questionnement doit permettre à l'élève de ne pas cantonner son discours et sa réflexion au seul formalisme mathématique.

Sujet 1[6] :

Exercise 1:

Let g be the function defined on $[0;+\infty[$ by : $g(x) = 2xe^{-x^2}$.

1) For any number a in $[0;+\infty[$, let $I(a)$ be defined as:
$$I(a) = \int_0^a g(x)dx$$
Express $I(a)$ in terms of a and then deduce the limit of $I(a)$ as x tends to positive infinity.
2) Justify that g is a density of probability.
3) Let X be a random variable following a distribution with g as density of probability.
Determine the real number m in such a way that $P(X \leq m) = 0.5$.
What does m represent?

[6] Nous n'avons fait figurer qu'un seul exercice, le sujet comportant en fait un deuxième exercice. Le candidat choisit un exercice parmi les deux proposés.

Sujet 2 ARROWHEAD

The arrowhead on the picture opposite was found on an archaeological digging site near Stonehenge.

Figure 1

This gave a math teacher the insight to simplify its shape and make a word-problem out of it.
(see figure 2).

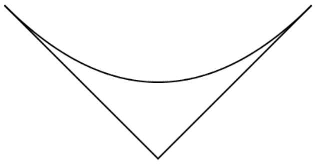
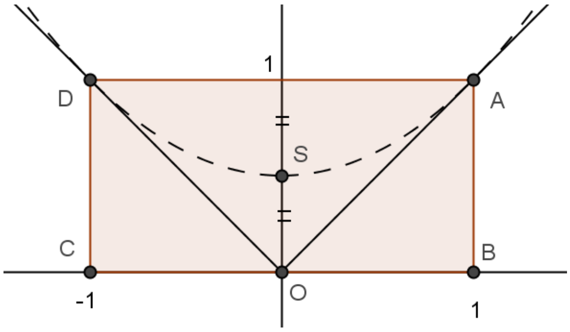


Figure 2

He then asked the whole class if they could solve the following problem:

Let ABCD be a rectangle drawn on a coordinate plane and symmetrical with respect to the y-axis.



Is it possible to draw a parabola

- whose vertex is on the y-axis, halfway between 0 and 1
  and
- which is tangent both to line (OA) at point A and to line (OD) at point D ?

Paul claimed that this is mathematically impossible, saying that the only possibility would be to consider an arc of a circle.
Lucy on the contrary claimed that she could determine a solution to the problem.
She even added that there exists one and only one such parabola.

Where do you stand on this?
Justify your point of view.

Vocabulary:
arrowhead = tip of arrow

Sujet 3 <u>Tangent to a parabola</u>

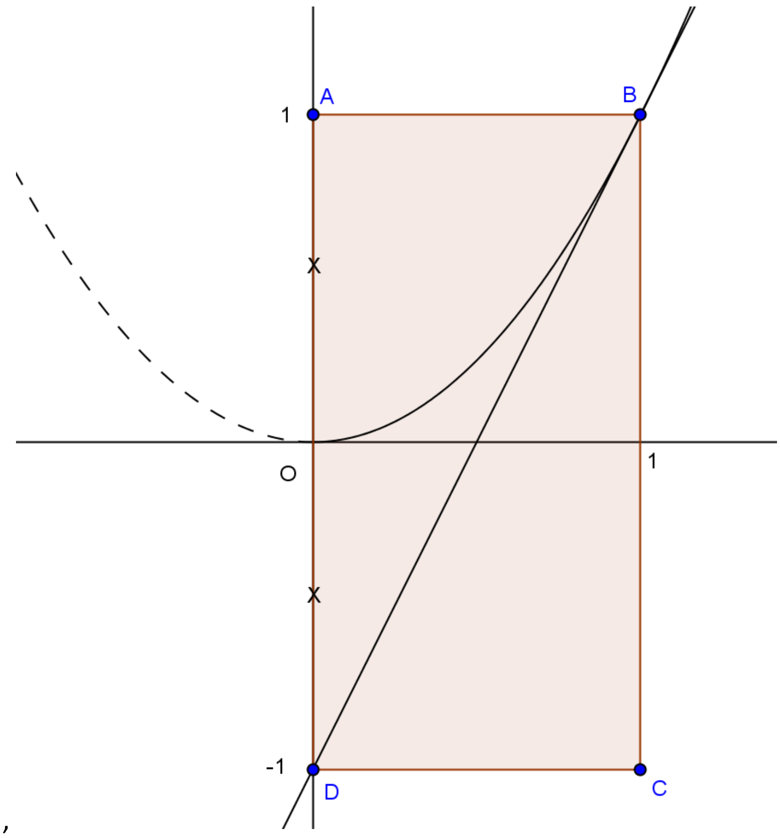
The diagram below shows the parabola $y=x^2$ in the coordinate plane.

The rectangle ABCD is made up of two unit-squares, as shown on the picture.

The origin of the axes is halfway from points A and D, as symbolized through the two crosses on the vertical axis.

At first sight, the diagonal of the rectangle seems to be tangent to the parabola.

1) Where do you stand on this rather immediate and natural conjecture?
   Justify your answer.



By reasons of symmetry, and provided that question 1 receives a favourable answer, there should exist another parabola that would open down and also be tangent to line (BD).

2) What do you think?
   Would you go so far as giving an equation of this parabola?